

CALCOLO INTEGRALE, a.a. 07-08 (C. Marchi)

ESERCIZI PROPOSTI PER CASA

1. Dimostrare per induzione le seguenti forme chiuse

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (x \geq 0, x \neq 1).$$

2. Usando le proprietà delle sommatorie, si ridimostri la seconda forma dell'esercizio precedente. (Suggerimento: dimostrare $(1-x) \sum_{i=0}^n x^i = 1 - x^{n+1}$).
3. Calcolare la rata annuale di un mutuo di 10 anni per un finanziamento di 10^5 euro al tasso fisso del 5% annuo. Calcolare anche la rata semestrale. (per quest'ultima: attenzione al tasso di interesse!).
4. È possibile trovare una funzione f e due partizioni P_1, P_2 tali che si abbia:

$$L(f, P_1) > U(f, P_2)?$$

5. Mostrare che non è possibile trovare una funzione f e due famiglie di partizioni

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_i, \dots \quad \text{e} \quad \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_i, \dots$$

tali che si abbiano le seguenti relazioni

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(f, P_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} U(f, P_i) = I, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} L(f, \bar{P}_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} U(f, \bar{P}_i) = \bar{I}$$

con $I \neq \bar{I}$. (Sugg.: supporre che esistano tali famiglie, trovarne una terza di raffinamenti comuni, usare il teo. dei carabinieri).

6. Sapendo $\int_0^3 x^2 dx = 9$, dedurre il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(3i+1)^2}{n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(3i+n^{-1})^2}{n^2}.$$

7. Calcolare

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx.$$

(Sugg.: moltiplicare e dividere per $\sin x$, usare la formula $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, sostituire opportunamente.)

8. Usando la sostituzione $t = \cos x$, calcolare l'integrale dell'esercizio precedente.
9. Calcolare

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx, \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx, \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx \dots \text{etc.}$$

10. Calcolare

$$\int \frac{1}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} d\theta.$$

ALCUNI ESERCIZI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON OMOGENEE

(con soluzione)

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 4x + 2 \qquad y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + x^2 - x + 1 \qquad (1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \qquad y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x} \qquad (2)$$

$$y'' - 4y' = \cos x \qquad y(x) = A + Be^{4x} - \frac{1}{17}\cos x - \frac{4}{17}\sin x \qquad (3)$$

$$y'' - 4y' = x + 1 \qquad y(x) = A + Be^{4x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{16}x \qquad (4)$$

$$y'' + y' - 6y = e^x (8 \cos x - 2 \sin x) \qquad y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} + e^x (-\cos x + \sin x) \qquad (5)$$