CALCOLO INTEGRALE, a. a. 07-08, docente: C. Marchi
ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

Si svolgano i seguenti esercizi:

1) Sia $f(x) = x^3 + 1$. Calcolare $L(f, P)$ e $U(f, P)$, dove P è la partizione che divide l'intervallo $[0, 2]$ in 4 parti di uguale lunghezza.
Risposta: $L(f, P) = \frac{17}{4}$, $U(f, P) = \frac{33}{4}$.

2) Calcolare il valor medio di $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + x$ sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{4}]$.
Risposta: $\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)$

3) Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra le curve $f(x) = |2x|$ e $g(x) = -x^2 + 3$.
Risposta: $\frac{10}{3}$.

4) Calcolare il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin t \, dt \qquad \text{su } [0, 1]$$

Risposta: I punti di massimo sono $x = 0$ ed $x = 1$.

5) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{\log(\log x)}{x} \, dx \qquad , \qquad \int (\log x)^2 \, dx \qquad , \qquad \int 2^x \sin(3x) \, dx.$$

Risposta: rispettivamente

$$\log x[\log(\log x) - 1] + c \qquad , \qquad x\left[(\log x)^2 - 2\log x + 2\right] + c$$

$$3\frac{2^x}{9 + \log 4}\left[-\cos(3x) + \frac{\log 2}{3}\sin(3x)\right] + c.$$

6) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2x)\cos^2(2x) \, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \, dx \quad , \quad \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 2\tan^3 x) \, dx.$$

Risposta: rispettivamente

$$\frac{\pi}{8} \qquad , \qquad \frac{\sqrt{2}}{4}\log\left(3+2\sqrt{2}\right) \qquad , \qquad 2-\frac{\pi}{4}-\log 2.$$

7) Motivare o confutare la seguente affermazione: se f e g sono due funzioni definite su $I = (0,1) \cup (2,3)$, tali che

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in I,$$

allora differiscono per una costante (cioè, $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c \; \forall x \in I$).
Risposta: FALSO: si considerino le funzioni $f(x) \equiv 0$ e $g(x) = [x]$ ("*parte intera*"). Tali funzioni verificano: $f'(x) = g'(x) (= 0) \; \forall x \in (0,1) \cup (2,3)$ MA si ha

$$f(x) - g(x) = 0 \qquad \text{se } x \in (0,1); \qquad f(x) - g(x) = 2 \qquad \text{se } x \in (2,3).$$