INTRODUZIONE AL CALCOLO INTEGRALE

a. a. 07-08, docente: C. Marchi

ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

Si svolgano i seguenti esercizi.

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$(a)\quad \int \left(x^{2/3}+e^x\right)\,dx \quad ;(b)\quad \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx.$$

Risposta: (a).

$$\int \left(x^{2/3}+e^x\right)\,dx = \int x^{2/3}\,dx + \int e^x\,dx,$$

gli integrali a secondo membro sono entrambi immediati (il primo è del tipo $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$):

$$\int x^{2/3}\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3}+c$$
$$\int e^x\,dx = e^x+c.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\int \left(x^{2/3}+e^x\right)\,dx = \frac{3}{5}x^{5/3}+e^x+c.$$

(b).

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

gli integrali a secondo membro sono entrambi immediati:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = \arcsin x - \arctan x + c.$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(a) \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+8\right)\,dx \quad , \quad (b) \quad \int_0^1 \left(\frac{4}{1+x^2}+2x\right)\,dx,$$

$$(c) \quad \int_0^{1/2} \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{x}\right)\,dx.$$

Risposta: (a).

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}+8\right)\,dx = [\ln|x|+8x]_1^2 = (\ln 2+16)-(\ln 1+8) = \ln 2+8.$$

(b).

$$\int_0^1 \left(\frac{4}{1+x^2}+2x\right)\,dx = \left[4\arctan x + x^2\right]_0^1 = 4\arctan 1{+}1 = 4\frac{\pi}{4}{+}1 = \pi{+}1.$$

(c).

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{x}\right)\,dx &= \left[3\arcsin x + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{1/2} \\ &= 3\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 3\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}.\end{aligned}$$

3. Calcolare il valor medio delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} a) & f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x}+2x & \text{su } [0,\dfrac{\pi}{4}], \\ b) & g(x) = 7\sin x - 3\cos x + 1 & \text{su } [0,\dfrac{\pi}{2}]. \end{array}$$

Risposta: si ricordi che il valor medio $\overline{f}$ della funzione f sull'intervallo $[a,b]$ è:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Per i due integrali dell'enunciato si ha:

(a).

$$\begin{aligned}\overline{f} &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{9}{\cos^2 x}+2x\right]\,dx = \frac{4}{\pi}\left[9\tan x + x^2\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{4}{\pi}\left[9\tan(\pi/4)+(\pi/4)^2\right] = \frac{4}{\pi}\left[9+\frac{\pi^2}{16}\right] = \frac{36}{\pi}+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned}\overline{g} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[7\sin x - 3\cos x + 1\right]\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-7\cos x - 3\sin x + x\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(-3+\frac{\pi}{2}\right)-(-7)\right] = \frac{2}{\pi}\left(4+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}+1.\end{aligned}$$

4. Calcolare l'area di:

$$R_1 = \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{\cos^2 x}-3x \le & y & \le 2x+9 \\ 0 \le & x & \le \pi/6 \end{array}\right\}, R_2 = \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{x+2} \le & y & \le e^x+4 \\ 1 \le & x & \le 3 \end{array}\right\}.$$

Risposta: si ricordi che, per $f(x) \ge g(x)$, l'area della regione compresa tra il grafico della funzione f e quello della g nell'intervallo $[a,b]$ è:

$$\text{Area} = \int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\,dx.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(R_1) &= \int_0^{\pi/6}\left[(2x+9)-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-3x\right)\right]\,dx\\ &= \int_0^{\pi/6}\left[5x+9-\frac{1}{\cos^2 x}\right]\,dx = \left[\frac{5}{2}x^2+9x-\tan x\right]_0^{\pi/6}\\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{\pi^2}{36}+\frac{3}{2}\pi-\tan(\pi/6) = \frac{5}{72}\pi^2+\frac{3}{2}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Area}(R_2) &= \int_1^3\left[e^x+4-\frac{1}{x+2}\right]\,dx = \left[e^x+4x-\ln|x+2|\right]_1^3\\ &= \left(e^3+12-\ln 5\right)-\left(e+4-\ln 3\right) = e^3-e+8+\ln(3/5).\end{aligned}$$

Nel secondo integrale si è usato il seguente calcolo:

$$\int\frac{1}{x+2}\,dx = \left(\begin{array}{l}\text{sostituzione:}\\ t = x+2\\ dt = dx\end{array}\right) = \int\frac{1}{t}dt = \ln|t|+c = \ln|x+2|+c.$$

5. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \sqrt{3x-5}\,dx, \qquad \int e^x \cos(2-e^x)\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{x^2}{x^3+4}\,dx.$$

Risposta:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{3x-5}\,dx &= \begin{pmatrix} \text{sostit.:} \\ t = 3x-5 \\ dt = 3dx \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\int t^{1/2}\,dt = \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} + c = \frac{2}{9}(3x-5)^{3/2} + c, \\
\int e^x \cos(2-e^x)\,dx &= \begin{pmatrix} \text{sostit.:} \\ t = 2-e^x \\ dt = -e^x dx \end{pmatrix} = -\int \cos t\,dt = \\
&= -\sin t + c = -\sin(2-e^x) + c, \\
\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+4}\,dx &= \begin{pmatrix} \text{sostit.:} \\ t = x^3+4 \\ dt = 3x^2 dx \\ x=1;\ t=5 \\ x=2;\ t=12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\int_5^{12} \frac{1}{t}\,dt = \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln|t|\right]_5^{12} = \frac{1}{3}\left[\ln(12)-\ln(5)\right] = \ln\sqrt[3]{12/5}.
\end{aligned}$$

6. Sia $f(x) = x^3+1$. Calcolare $L(f,P)$ e $U(f,P)$, dove P è la partizione che divide l'intervallo $[0,2]$ in 4 parti di uguale lunghezza.
Risposta: si ricordi che la somma inferiore e la somma superiore di Riemann della funzione f sull'intervallo $[a,b]$ diviso dalla partizione $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ sono rispettivamente

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta_i \quad , \qquad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta_i$$

dove $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ (è la lunghezza di $[x_{i-1}, x_i]$, l'i-esimo intervallino della partizione P) mentre l_i ed u_i sono rispettivamente i punti di minimo e di massimo della funzione f su $[x_{i-1}, x_i]$.

Nel nostro caso, la partizione P che divide l'intervallo $[0,2]$ in 4 parti di uguale lunghezza è: $P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$, con $\Delta_i = \frac{1}{2}$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Il fatto che la funzione $f(x) = x^3+1$ sia sempre crescente implica che su ciascun intervallino $[x_{i-1}, x_i]$ il valore minimo è assunto su x_{i-1} mentre quello massimo su x_i, cioè valgono: $l_i = x_{i-1}$ e $u_i = x_i$. Le somme di Riemann sono

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1/2) + f(1) + f(3/2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{9}{8} + 2 + \frac{35}{8}\right] = \frac{17}{4}, \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(1/2) + f(1) + f(3/2) + f(2)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{9}{8} + 2 + \frac{35}{8} + 9\right] = \frac{33}{4}. \end{aligned}$$

7. Calcolare il punto di massimo della funzione

$$f(x) = \int_x^0 \sin t \, dt \qquad \text{su } [0,1]$$

Risposta: per il Teorema di Fermat, il valore massimo è assunto o su un estremo dell'intervallo ($x = 0$, $x = 1$) o su un punto critico (dove si annulla la derivata) o su uno singolare (dove la funzione non è derivabile).

Si ricordi che la funzione f, definita da

$$f(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} l(x)\, dx$$

(con g ed h derivabili ed l continua), è derivabile e la sua derivata è

$$f'(x) = l(g(x))g'(x) - l(h(x))h'(x).$$

Applicando questa regola alla nostra funzione deduciamo che non esistono punti singolare, che la derivata vale

$$f'(x) = -\sin x$$

e quindi che non ci sono punti critici all'interno dell'intervallo $(0,1)$.

(Alla stessa conclusione si può giungere ottenendo esplicitamente la formula della funzione f: $f(x) = -\cos x$ e calcolandone la derivata).

Il valore massimo deve quindi essere assunto o in $x = 0$ o in $x = 1$. Calcoliamo i due valori $f(0)$ e $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^0 \sin t\, dt = 0 \qquad \text{(gli estremi di integrazione coincidono)} \\ f(1) &= \int_1^0 \sin t\, dt = [-\cos t]_1^0 = -1 + \cos 1 < 0. \end{aligned}$$

In conclusione il valore massimo è assunto in $x = 0$.

8. Motivare o confutare la seguente affermazione: se f e g sono due funzioni definite su $I = (0,1) \cup (2,3)$, tali che

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in I,$$

allora differiscono per una costante (cioè, $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) - g(x) = c \ \forall x \in I$).
Risposta: l'affermazione è falsa. Si considerino le funzioni

$$f(x) \equiv 1 \quad , \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ 2 & \text{se } x \in (2,3) \end{cases} .$$

Tali funzioni verificano: $f'(x) = g'(x) (= 0)\ \forall x \in (0,1) \cup (2,3)$ MA si ha

$$f(x) - g(x) = 0 \qquad \text{se } x \in (0,1); \qquad f(x) - g(x) = 1 \qquad \text{se } x \in (2,3).$$