

# Testi del Syllabus

Resp. Did.	<b>NISTICO' Giuseppe Antonio</b>	Matricola: <b>002021</b>
Anno offerta:	<b>2015/2016</b>	
Insegnamento:	<b>27002282 - FISICA MATEMATICA AVANZATA</b>	
Corso di studio:	<b>0739 - MATEMATICA</b>	
Anno regolamento:	<b>2014</b>	
CFU:	<b>8</b>	
Settore:	<b>MAT/07</b>	
Tipo Attività:	<b>B - Caratterizzante</b>	
Anno corso:	<b>2</b>	
Periodo:	<b>Primo Semestre</b>	
Sede:	<b>UNIVERSITA' DELLA CALABRIA</b>	



## Testi in italiano

<b>Contenuti / Contents</b>	Inadeguatezza dei paradigmi della Fisica Teorica Classica. Formulazione della teoria quantistica generale. Derivazione della Teoria Quantistica di un sistema isolato da principi di simmetria secondo un approccio gruppo teorico. Derivazione della teoria specifica di una particella localizzabile.
<b>Lingua insegnamento / Language</b>	Italiano. Inglese.
<b>Prerequisiti / Prerequisites</b>	Laurea di primo livello in Matematica o Fisica. Elementi di Analisi Funzionale: Spazi con prodotto interno, spazi di Hilbert, operatori lineari in spazi di Hilbert, lo spazio $L^2(\mathbb{R}^3)$ .
<b>Obiettivi formativi (in termini di risultati di apprendimento attesi) / Learning outcomes</b>	Comprensione delle problematiche trattate nell'insegnamento e della formalizzazione dei concetti. Capacità di risolvere problemi dall'applicazione della teoria sviluppata. Capacità di elaborazione autonoma per la soluzioni di problemi, anche di natura teorica, non risolvibili attraverso la diretta applicazione della teoria sviluppata.
<b>Programma / Program</b>	<p>1. Inadeguatezza delle teorie fisiche classiche; necessità di una nuova teoria. Strumenti Matematici: Spazi con prodotto interno; spazi di Hilbert. <math>d_2</math>, <math>l_2</math>, <math>L_2</math>; separabilità; Basi di Hamel, basi di Schauder. Sistemi e basi ortonormali in spazi con prodotto interno, caratterizzazioni di basicità in spazi di Hilbert; operatori di proiezione, proprietà degli operatori di proiezione; caratterizzazione della commutatività; proiezioni in <math>L^2(\mathbb{R})</math>; misura a valori di proiezioni in <math>L_2</math>; rappresentazione in <math>l_2</math>. Operatore aggiunto; auto-aggiunto; operatore di moltiplicazione in <math>L^2(\mathbb{R})</math>. Il problema della rappresentazione spettrale in spazi di Hilbert; rappresentazione spettrale per l'operatore di moltiplicazione. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti e limitati. Caratterizzazione degli autovalori e misura spettrale; calcolo funzionale. Teoria spettrale per operatori auto aggiunti; calcolo funzionale;</p> <p>2. La formulazione della teoria quantistica generale secondo Von Neumann. I concetti fisici ; Il sistema di assiomi; co-misurabilità di osservabili; co-misurabilità e commutatività: caso spettro puntuale puro; co-misurabilità e</p>

commutatività: caso generale; Il problema della rappresentazione dei valori d'aspettazione. Teorema di Von Neumann sui valori d'aspettazione. Osservabili 1-0; distribuzione di probabilità di osservabili. Caratterizzazione degli stati quantistici puri. Interpretazione dello spettro. Relazioni di indeterminazione.

3. Teoria standard di una particella localizzabile. Quantizzazione canonica; operatore posizione; operatore velocità; Trasformata di Fourier; Operatore di Fourier-Plancherel; densità di probabilità di momento. Relazioni di indeterminazione per (Q,P). Criticità delle condizioni sui domini di definizione. L'operatore  $H=K+u(Q)$  e la sua interpretazione. Completezza di Q. Teoria quantistica in  $L_2(R^3)$ . Dinamica.

4. Il secondo problema della quantizzazione.

5. Rotazioni spaziali; decomposizione, identificazione con  $SO(3)$ ; rototraslazioni. Il gruppo di Euclide E; gruppi matriciali; E come sottogruppo di  $GL(4,R)$ . Il gruppo  $SU(2)$ , Epimorfismo  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ .

Rappresentazioni lineari; lemmi di Schur; inverso del lemma di Schur.

Gruppi topologici; connessione in gruppi topologici. Sistemi di coordinate.

Gruppi di Lie locali; commutatore in un gruppo di Lie locale e costanti di struttura. Algebra di Lie di un gruppo di Lie locale.

6. Simmetrie Quantistiche e sistemi di imprimitività.

Teorema di Wigner; trasformazioni di simmetria quantistiche;

identificazione tra trasformazioni di simmetrie quantistiche e trasformazioni di Wigner.

Ray representations e rappresentazioni proiettive. Evoluzione temporale quantistica generale. Equazione dinamica. Teorema di Stone.

Decomposizione di rappresentazioni proiettive del gruppo di Galilei G mediante gruppi a 1 parametro.

Rappresentazioni indotte. Teorema di Mackey.

7. Identificazione della teoria quantistica di una particella localizzabile senza spin.

Commutatori tra generatori hermitiani del gruppo di Galilei G.

Individuazione di un sistema di imprimitività in una rappresentazione proiettiva di G; Il caso più semplice, identificazione dell'operatore posizione Q;

Dinamica omogenea. Simmetrie dinamiche euclidee. Proprietà di covarianza di Q rispetto a G. Determinazione della equazione dinamica.

## Metodologie didattiche / Teaching Methods

Lezione frontali. discussione delle questioni.

## Metodi e criteri di valutazione dell'apprendimento / Methods and Criteria for Learning Assessment

Prova scritta e discussione della stessa.

## Testi di riferimento ed eventuali letture consigliate / Textbooks and Further References

[1] R.P.Feynman, R.B. Leighton, M.Sands  
The Feynman lectures on physics, Vol. III  
Addison-Wesley Pub.Co., Reading 1970

[2] G. Cattaneo,  
Metodi Matematici per la Meccanica Quantistica. Parte 2  
<https://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/FMA1.pdf>

[3] J.M Jauch,  
Foundations of Quantum Mechanics,  
Addison-Wesley Pub.Co., Reading 1973

[4] Dispense a cura del docente:  
I Fondamenti della Teoria Quantistica a secondo Von Neumann

<https://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/TQ3.pdf>

[5] L. E. Ballentine,  
Quantum Mechanics - a modern development  
World Scientific, Singapore 1999

[6] E. Kreyszig,  
Introductory Functional Analysis with Applications  
Wiley, NY 1989

[7] F. Stancu,  
Group Theory in subnuclear Physics,  
Oxford Science Pub., Oxford 1996

[8] L.S, Pontryagin,  
Topological groups,  
Gordon and Breach sci. pub., NY 1966

[9] Dispense a cura del docente:  
Teoria dei gruppi e Meccanica Quantistica,  
<https://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/TQ4.pdf>

## Pagina web del docente / Teacher website

<https://www.mat.unical.it/~nistico/>

## Stima del carico di lavoro per lo studente / Student workload

ARGOMENTI:  
inadeguatezza dei paradigmi della fisica teorica classica.

MATERIALE:  
[1] paragrafi da 1-1 a 1-6  
LEZIONI: 2  
STUDIO: 4

ARGOMENTI:  
strumenti matematici della teoria quantistica: richiami su spazi di Hilbert; operatori di proiezione; operatori autoaggiunti; teoria spettrale.

MATERIALE:  
[2] paragrafi 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 10.1  
[3] Capitoli 3 e 4.  
LEZIONI: 15  
STUDIO: 30

ARGOMENTI:  
Teoria quantistica generale secondo Von Neumann:  
Concetti fisici: osservabili, valori d'aspettazione; sistema di assiomi;  
commensurabilità e commutatività; teorema di rappresentazione degli stati  
quantistici; stati puri; osservabili 1-0 e proiettori ortogonali;  
relazioni di indeterminazione.

MATERIALE:  
[4]; [5] paragrafo 8.4  
LEZIONI : 10  
STUDIO: 24

ARGOMENTI:  
La teoria Quantistica Standard di una particella localizzabile:  
Quantizzazione canonica; gli operatori posizione e velocità; operatore di Fourier-  
Plancherel; l'equazione di Schroedinger

MATERIALE:  
[6] capitolo 11  
LEZIONI: 7  
STUDIO: 15

ARGOMENTI:  
Il secondo Problema della quantizzazione:  
Trasformazioni di Galilei e teoria dei gruppi; gruppi matriciali; epimorfismo  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ ; Gruppi di Lie locali; operazione commutazione in un gruppo di Lie locale.

MATERIALE:  
[7] paragrafi da 3.1 a 3.8 e 8.3; [8] pagari 17,22,41,52

LEZIONI: 12

STUDIO:24

ARGOMENTI:

Simmetrie quantistiche e sistemi di imprimitività: teorema di Wigner; trasformazioni di simmetria quantistiche;

rappresentazioni proiettive;

evoluzione temporale quantistica generale;

rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei;

Teorema di Stone; teorema di imprimitività.

MATERIALE:

[9] paragrafi 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 3.1

LEZIONI: 8

STUDIO: 16

ARGOMENTI:

Identificazione della teoria quantistica di una particella libera senza spin: individuazione di un sistema di imprimitività in una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei; realizzazione della più semplice teoria attraverso il teorema di imprimitività; identificazione delle osservabili rilevanti; equazione dinamica specifica.

MATERIALI:

[9] paragrafi 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9

LEZIONI: 10

STUDIO: 20

ESAME:18



## Testi in inglese

### Contenuti / Contents

Inadequacy of the paradigm of Classical Theoretical Physics.

Formulation of general quantum theory.

Derivation of the Quantum Theory of an isolated system based on symmetry principles according to a Group-theoretical approach.

Derivation of the specific theory of a localizable particle.

### Lingua insegnamento / Language

Italian. English.

### Prerequisiti / Prerequisites

Undergraduate degree in Mathematics or Physics.

Elements of functional analysis: Hilbert spaces, linear operators in Hilbert spaces, the space  $L^2(\mathbb{R})$

### Obiettivi formativi (in termini di risultati di apprendimento attesi) / Learning outcomes

Understanding of the problematics treated by the course and of the formalization of the concepts.

Ability in solving problems requiring the application of the developed theory.

Ability of autonomous elaborations of the theoretical concepts, also to solve problems

that cannot be solved by a direct application of the theory.

### Programma / Program

1. Inadequacy of classical physical theories; necessity of a novel theory.

Mathematical tools: Inner product spaces, Hilbert spaces. The spaces  $d_2$ ,  $l_2$ ,  $L_2$ ; separability; Hamel bases, Schauder bases, orthonormal bases in inner product spaces; characterization of basicity in Hilbert spaces; projection operators and their properties; characterization of commutativity; projections in  $L_2$ ; representation in  $l_2$ ; self-adjoint operators; multiplication operator in  $L_2$ . The problem of the spectral representation in Hilbert spaces; the spectral representation of the multiplication operator. Spectral theory for bounded and self-adjoint operators; characterization of eigenvalues and spectral measure; functional calculus. Spectral theory for self-adjoint operators; functional calculus.

2. Von Neumann's formulation of the general quantum theory. Physical concepts; the axioms; co-measurability of observables; co-measurability and commutativity: the purely discrete spectrum case; general case; the problem of the representation of expected values; Von Neumann's representation theorem. 1-0 observables; probability distribution for observables. Characterization of pure quantum states. Interpretation of the spectrum. Uncertainty relations.

3. Standard quantum theory of a localizable particle. Canonical quantization; operators position and velocity. Fourier transform; the Fourier-Plancherel operator; probability density of the momentum; uncertainty relations for position-momentum; criticality of the conditions on the domains of operators. The operator 'Energy' and its interpretation. Completeness of the position operator. Quantum theory in  $L_2(\mathbb{R}^3)$ . Schrodinger equation.

3. The second problem of the quantization.

5. Spatial rotations; identification with  $SO(3)$ ; Euclidean Group E, Matrix groups; E as a sub-group of  $GL(\mathbb{R},4)$ . The Group  $SU(2)$ . Epimorphism  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ . Linear representations of groups; Schur's lemmas; the converse of second lemma of Schur. Topological groups; connectedness of topological groups. Coordinate systems of topological groups. Local Lie groups; commutator on a local Lie Group; structure constants; Lie algebra of a local Lie Group.

6. Quantum symmetries and imprimitivity systems. Wigner theorem; quantum symmetry transformations; identificability of quantum symmetry transformations and Wigner transformations; ray representations and projective representations. General quantum dynamics; Quantum dynamical equation. Stone theorem. One parameter sub-groups of Galilei's Group. Induced representation. Imprimitivity theorem.

7. Identification of the quantum theory of a spin-less particle. Commutation rules between hermitean generators of a projective representation of Galilei's Group. how to single out an imprimitivity system in a projective representation of Galilei's Group. The simplest case: no spin. Identification of the position operator. Homogeneous dynamics. Covariance properties of the position operator with respect to Galileian transformations. Determination of the specific dynamical equation.

### Metodologie didattiche / Teaching Methods

Frontal lectures. Discussion of problematic issues.

### Metodi e criteri di valutazione dell'apprendimento / Methods and Criteria for Learning Assessment

Written exam and discussion about it.

### Testi di riferimento ed eventuali letture consigliate / Textbooks and Further References

[1] R.P.Feynman, R.B. Leighton, M.Sands  
The Feynman lectures on physics, Vol. III  
Addison-Wesley Pub.Co., Reading 1970

[2] G. Cattaneo,  
Metodi Matematici per la Meccanica Quantistica. Parte 2  
<https://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/FMA1.pdf>

[3] J.M Jauch,  
Foundations of Quantum Mechanics,  
Addison-Wesley Pub.Co., Reading 1973

[4] Notes from the teacher:  
I Fondamenti della Teoria Quantistica a secondo Von Neumann  
<https://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/TQ3.pdf>

[5] L. E. Ballentine,  
Quantum Mechanics - a modern development  
World Scientific, Singapore 1999

[6] E. Kreyszig,  
Introductory Functional Analysis with Applications  
Wiley, NY 1989

[7] F. Stancu,  
Group Theory in subnuclear Physics,  
Oxford Science Pub., Oxford 1996

[8] L.S, Pontryagin,  
Topological groups,  
Gordon and Breach sci. pub., NY 1966

[9] Notes from the teacher:  
Teoria dei gruppi e Meccanica Quantistica,  
<https://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/TQ4.pdf>

**Pagina web del docente /  
Teacher website**

<https://www.mat.unical.it/~nistico/>

**Stima del carico di lavoro  
per lo studente / Student  
workload**

**SUBJECTS:**  
Inadequacy of the paradims of classical theoretica physics.

**REFERENCES:**  
[1] from section 1-1 to1-6  
**LECTURES:** 2  
**STUDY:** 4

**SUBJECTS:**  
Mathematical tools of quantum theory: recalls on Hibert spaces; proiection operators;  
self-adjoint operators; spectral theory.

**REFRENCES:**  
[2] sections 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 3.1, 3.2, 3.3, 10.1  
[3] Chapters 3 and 4.  
**LECTURES:** 15  
**STUDY:** 30

**Subjects:**  
Von Neumann's general quantum theory:  
Physical concepts: observables, expected values; axiomatic system; co-  
measurability and commutativity; representation theorem of quantum states; pure  
states; 1-0 observables and projection operators; uncertainty relations.

**REFERENCES:**  
[4]; [5] section 8.4  
**LECTURES :** 10  
**STUDY:** 24

**SUBJECTS:**  
The standard quantum theory of a localizable particle:  
canonical quantization; the operator of position and velocity;  
Fourier-Plancherel operator; Schroedinger's equation.

**REFERENCES:**  
[6] chapter 11  
**LECTURES:** 7  
**STUDY:** 15

**SUBJECTS:**  
Second problem of the quantization:  
Galilei's transformations and group theory; matrix groups;  
the epimorphism  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ ; local Lie groups; commutator in a local Lie group.

**REFERENCES:**  
[7] from section 3.1 to 3.8 and 8.3; [8] sections 17,22,41,52  
**LECTURES:** 12  
**STUDY:**24

**SUBJECTS:**

Quantum symmetries and imprimitivity systems: Wigner Theorem; quantum symmetry transformations; projective representations; general quantum dynamics; projective representations of Galilei's group; Stone's theorem; imprimitivity theorem.

**REFERENCES:**

[9] sections 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 3.1

LECTURES: 8

STUDY: 16

**SUBJECTS:**

Identification of the quantum theory of a free spin-less particle: singling out an imprimitivity system within a projective representation of Galilei's group; realization of the simplest theory by means of the imprimitivity theorem; identifying the relevant operators; specific dynamical equation.

**REFERENCES:**

[9] sections 3.2, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9

LECTURES: 10

STUDY: 20

EXAM:18