**Fisica Matematica Avanzata, 11 9 2009**

**1.** Sia $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^2$.

a) Trovare la risoluzione dell'identità di $A$.

b) Determinare i possibili risultati di una misurazione di $\mathcal{A}$.

c) Se lo stato è rappresentato dal vettore di stato $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, determinare la probabilità di ottenere ognuno dei valori possibili.

d) Dimostrare che l'operatore $B = \frac{1}{2}(A + 1)$ rappresenta un'osservabile 1-0.

**2.** Sia $G$ il gruppo di Euclide, cioè il gruppo delle rototraslazioni dello spazio tridimensionale,

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $G$ deve essere unitaria.

Se tale gruppo $G$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

b) Determinare il commutatore $[P_x, P_y]$, dove $P_x, P_y$ sono i generatori hermitiani corrispondenti alle traslazioni lungo l'asse $x$ e l'asse $y$, rispettivamente.

c) Determinare le regole di commutazione $[J_x, Q_y] = iQ_z$ ($Q_y, Q_z$ sono gli operatori autoaggiunti che rappresentano la componente $y$ e $z$ dell'osservabile posizione, e $J_x$ è il generatore hermitiano corrispondente alle rotazioni attorno l'asse $x$).

**3.** Si descrivano lo schema di Schroedinger e lo schema di Heisenberg per rappresentare l'evoluzione temporale di un sistema quantistico.

**4.** Sia $H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)$ l'operatore hamiltoniano per una particella libera localizzabile di massa $m$, dove le tre osservabili di posizione sono rappresentate dagli operatori $Q_x, Q_y, Q_z$.

a) Scrivere esplicitamente l'equazione dinamica per gli operatori posizione $Q_{x_j}^{(t)}$ al tempo $t$ secondo la descrizione di Heisenberg ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$).
b) Risolvere le equazioni per determinare tali operatori.
c) Determinare le parentesi di commutazione $[Q_{x_j}, Q_{x_k}^{(t)}]$.

**Fisica Matematica Avanzata, 5 9 2008**

**1.** Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due osservabili 1-0 di un sistema quantistico, simultaneamente misurabili.

a) Introdurre un'osservabile $\mathcal{A}$ a quattro valori e individuare due funzioni $f$ e $g$ tali che $\mathcal{P} = f(\mathcal{A})$ e $\mathcal{Q} = g(\mathcal{A})$.

b) Determinare la risoluzione dell'identità dell'operatore autoaggiunto $A$ che rappresenta $\mathcal{A}$, in termini degli operatori $P$ e $Q$ che rappresentano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

c) Dimostrare che, se lo stato è rappresentato da $\rho = | \psi\rangle\langle\psi |$, allora *il risultato 1 per $\mathcal{P}$ implica il risultato 1 per $\mathcal{Q}$* $\quad\Leftrightarrow\quad P\psi = PQ\psi$.

**2.** Sia $G$ il gruppo di Euclide, cioè il gruppo delle rototraslazioni dello spazio tridimensionale.

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $G$ deve essere unitaria.

b) Se tale gruppo $G$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

1. Determinare il commutatore $[P_x, P_y]$ dove $P_x, P_y$ sono i generatori hermitiani corrispondenti alle traslazioni lungo gli assi $x$ e $y$ rispettivamente.

2. Determinare le regole di commutazione canoniche $[Q_\alpha, P_\beta] = \delta_{\alpha,\beta}\mathbf{1}$ ($Q_\alpha$ è l'operatore autoaggiunto che rappresenta la componente $x_\alpha$ dell'osservabile posizione e $P_\beta$ è il generatore hermitiano corrispondente alle traslazioni spaziali della coordinata $x_\beta$).

**3.**a) Si descrivano lo schema di Schroedinger e lo schema di Heisenberg per rappresentare l'evoluzione temporale di un sistema quantistico.

b) Si dimostri che se per due osservabili $A$ e $B$ vale $\langle\psi_t \mid B \mid \psi_t\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi_t \mid A \mid \psi_t\rangle$, allora $B = i[H, A]$, dove $H$ è l'operatore hamiltoniano.

**Fisica Matematica Avanzata, 23 6 2009**

**1.** Dimostrare che un operatore autoaggiunto $P$ rappresenta un'osservabile 1-0 se e soltanto se $P$ è un proiettore ortogonale.

**2.** Tre osservabili di un sistema quantistico, descritto nello spazio di Hilbert $\mathbf{C}^3$, sono rappresentate dagli operatori

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare quali coppie di queste osservabili sono simultaneamente misurabili.
b) Trovare i possibili risultati di una sua misurazione di $J_x$ e $J_y$.
c) Trovare la risoluzione dell'identità di $J_x$.
d) Sia $\psi$ il vettore di stato del sistema. Se $\psi$ è tale che il risultato di una misurazione di $J_y$ è sicuramente 1, determinare la probabilità che una misurazione di $J_x$ dia come risultato un valore nell'intervallo $(-1/2, 3/2)$.

**3.** Sia $G$ il gruppo di Euclide, cioè il gruppo delle rototraslazioni dello spazio tridimensionale,

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $G$ deve essere unitaria.

Se tale gruppo $G$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

b) Determinare il commutatore $[J_x, J_y]$, dove $J_x, J_y$ sono i generatori hermitiani corrispondenti alle rotazioni attorno all'asse $x$ e all'asse $y$, rispettivamente.
c) Determinare le regole di commutazione canoniche $[Q_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha,\beta}\mathbf{1}$ ($Q_\alpha$ è l'operatore autoaggiunto che rappresenta la componente $x_\alpha$

dell'osservabile posizione e $P_\beta$ è il generatore hermitiano corrispondente alle traslazioni spaziali della coordinata $x_\beta$).

**4.** Sia $H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)$ l'operatore hamiltoniano per una particella libera localizzabile di massa $m$, dove le tre osservabili di posizione sono rappresentate dagli operatori $Q_x, Q_y, Q_z$.

a) Scrivere esplicitamente l'equazione dinamica per gli operatori posizione $Q_{x_j}^{(t)}$ al tempo $t$ secondo la descrizione di Heisenberg ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$).

b) Risolvere le equazioni per determinare tali operatori.

c) Determinare le parentesi di commutazione $[Q_{x_j}, Q_{x_k}^{(t)}]$.

**Fisica Matematica Avanzata, 7 gennaio 2010**

**1.** Sia $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^2$.

a) Trovare la risoluzione dell'identità di $A$.

b) Determinare i possibili risultati di una misurazione di $\mathcal{A}$.

c) Se lo stato è rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dove $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, determinare la probabilità di ottenere ognuno dei valori possibili.

d) L'operatore $B = \frac{1}{2}(A + 1)$ rappresenta un'osservabile 1-0?

**2.** a) Si descrivano lo schema di Schroedinger e lo schema di Heisenberg per rappresentare l'evoluzione temporale di un sistema quantistico.

b) Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $[\rho_{t_1}]_{t_2} = \rho_{t_1+t_2}$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, si ricavino le equazioni di evoluzione temporale per gli stati quantistici e per le osservabili.

**3.** Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di Galileo, cioè il gruppo generato dalle rototraslazioni dello spazio tridimensionale e dai boost di Galileo.

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ è unitaria.

Se $\mathcal{G}$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

b) Determinare il commutatore $[J_x, P_y]$, dove $J_x, P_y$ sono i generatori hermitiani corrispondenti alle rotazioni attorno l'asse $x$ e alle traslazioni lungo l'asse $y$, rispettivamente.

c) Determinare la regola di commutazione $[J_x, Q_y] = iQ_z$ ($Q_y, Q_z$ sono gli operatori autoaggiunti che rappresentano la componente $y$ e $z$ dell'osservabile posizione, e $J_x$ è il generatore hermitiano corrispondente alle rotazioni attorno l'asse $x$).

d) Determinare la relazione tra i generatori hermitiani delle traslazioni spaziali $P_x, P_y, P_z$ e gli operatori $V_x, V_y, V_z$ che rappresentano le tre componenti della velocità.

**4.** Sia $H = \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + u(\vec{Q})$ l'operatore hamiltoniano per una particella di massa $m$ localizzabile in $\mathbf{R}^3$, dove $[Q_\alpha, mV_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}$ e $u(\vec{Q}) = \lambda_0(Q_x^2 + Q_y^2)$.

Dimostrare che se $A_\alpha = \frac{dV_\alpha^{(t)}}{dt}$ è l'operatore accelerazione, allora

$$mA_\alpha = -\frac{\partial u(\vec{Q})}{\partial x_\alpha}$$

.

**Fisica Matematica Avanzata, 7 7 2010**

**1.** Dimostrare che un operatore autoaggiunto $P$ rappresenta un'osservabile 1-0 se e soltanto se $P$ è un proiettore ortogonale.

**2.** Tre osservabili di un sistema quantistico, descritto nello spazio di Hilbert $\mathbf{C}^3$, sono rappresentate dagli operatori

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare quali coppie di queste osservabili sono simultaneamente misurabili.
b) Per ognuna delle tre osservabili, possibili risultati di una sua misurazione.
c) Trovare la risoluzione dell'identità di $L_x$.
d) Sia $\psi$ il vettore di stato del sistema. Se $\psi$ è tale che il risultato di una misurazione di $L_y$ è sicuramente 1, determinare la probabilità che una misurazione di $L_x$ dia come risultato un valore nell'intervallo $(-1/2, 3/2)$.

**3.** Sia $G$ il gruppo di Euclide, cioè il gruppo delle rototraslazioni dello spazio tridimensionale,

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $G$ deve essere unitaria.

Se tale gruppo $G$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

b) Determinare il commutatore $[J_x, P_y]$, dove $J_x, P_y$ sono i generatori hermitiani corrispondenti alle rotazioni attorno all'asse $x$ e alle traslazioni lungo $y$, rispettivamente.
c) Determinare le regole di commutazione canoniche $[Q_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha,\beta}\mathbf{1}$ ($Q_\alpha$ è l'operatore autoaggiunto che rappresenta la componente $x_\alpha$

dell'osservabile posizione e $P_\beta$ è il generatore hermitiano corrispondente alle traslazioni spaziali della coordinata $x_\beta$).

**4.** Sia $H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}kQ^2$ l'operatore hamiltoniano per un particella di massa $m$ localizzabile in $\mathbf{R}$, dove $[Q, P] = i$.

a) Scrivere l'equazione dinamica per l'operatore posizione $Q^{(t)}$ al tempo $t$ secondo la descrizione di Heisenberg;

b) Determinare l'operatore "velocità" $V = \frac{dQ^{(t)}}{dt}\,|_{t=0}$;

c) Determinare l'operatore accelerazione $A = \frac{dV^{(t)}}{dt}\,|_{t=0}$.

**5.** a) Introdurre le distribuzioni temperate in relazione al concetto di trasformata di Fourier di una distribuzione.

**Fisica Matematica Avanzata, 8 9 2008**

**1.** Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due osservabili 1-0 di un sistema quantistico, simultaneamente misurabili.

a) Introdurre un'osservabile $\mathcal{A}$ a quattro valori e individuare due funzioni $f$ e $g$ tali che $\mathcal{P} = f(\mathcal{A})$ e $\mathcal{Q} = g(\mathcal{A})$.

b) Determinare la risoluzione dell'identità dell'operatore autoaggiunto $A$ che rappresenta $\mathcal{A}$, in termini degli operatori $P$ e $Q$ che rappresentano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

c) Dimostrare che, se lo stato è rappresentato da $\rho = \mid \psi\rangle\langle\psi \mid$, allora $\langle\psi \mid PQ\psi\rangle$ *è la probabilità che in una misura simultanea di* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$ *entrambi i risultati siano 1.*

**2.** Sia $G$ il gruppo di Euclide, cioè il gruppo delle rototraslazioni dello spazio tridimensionale.

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $G$ deve essere unitaria.

b) Se tale gruppo $G$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

1. Determinare il commutatore $[G_x, G_y]$.
2. Determinare le regole di commutazione canoniche $[Q_\alpha, P_\beta] = \delta_{\alpha,\beta}\mathbf{1}$ ($Q_\alpha$ è l'operatore autoaggiunto che rappresenta la componente $x_\alpha$ dell'osservabile posizione e $P_\beta$ è il generatore hermitiano corrispondente alle traslazioni spaziali della coordinata $x_\beta$).

**3.** a) Si descrivano lo schema di Schroedinger e lo schema di Heisenberg per rappresentare l'evoluzione temporale di un sistema quantistico.

b) Si dimostri che se per due osservabili $A$ e $B$ vale $\langle\psi_t \mid B \mid \psi_t\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi_t \mid A \mid \psi_t\rangle$, allora $B = i[H, A]$, dove $H$ è l'operatore hamiltoniano.

**Fisica Matematica Avanzata, 21 11 2011**

**1.** Dimostrare che un operatore densità $\rho$ rappresenta uno stato puro se e soltanto se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, con $\|\psi\| = 1$.

**2.** Tre osservabili di un sistema quantistico, descritto nello spazio di Hilbert $\mathbf{C}^3$, sono rappresentate dagli operatori

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_z = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determinare quali coppie di queste osservabili sono simultaneamente misurabili.
b) Determinare i possibili valori dell'osservabile rappresentata dall'operatore $A = L_x + L_y$
c) Trovare la risoluzione dell'identità di $L_z$.
d) Sia $\psi$ il vettore di stato del sistema. Se $\psi$ è tale che il risultato di una misurazione di $L_y$ è sicuramente 1, determinare la probabilità che una misurazione di $L_z$ dia come risultato un valore nell'intervallo $(-1/2, 3/2)$.

**3.** Sia $G$ il gruppo di Euclide, cioè il gruppo delle rototraslazioni dello spazio tridimensionale,

a) Dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva di $G$ deve essere unitaria.

Se tale gruppo $G$ è un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$,

b) Determinare il commutatore $[J_x, J_y]$, dove $J_x, J_y$ sono i generatori hermitiani corrispondenti alle rotazioni attorno all'asse $x$ e $y$, rispettivamente.
c) Determinare le relazioni tra $Q_\alpha$ e $G_\beta$ usando le proprietà di simmetria e covarianza.

**4.** Sia $H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}kQ^2$ l'operatore hamiltoniano per un particella di massa $m$ localizzabile in $\mathbf{R}$, dove $[Q, P] = i$.

a) Scrivere l'equazione dinamica per l'operatore posizione $Q^{(t)}$ al tempo $t$ secondo la descrizione di Heisenberg;

b) Determinare l'operatore "velocità" $V = \frac{dQ^{(t)}}{dt}\,|_{t=0}$;

c) Determinare l'operatore accelerazione $A = \frac{dV^{(t)}}{dt}\,|_{t=0}$.

**Fisica Matematica Avanzata, 5 7 2011**

**1.** Far vedere che un'operatore densità $\rho$ rappresenta un valore d'aspettazione puro se e soltanto se $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

**2.** Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $[\rho_{t_1}]_{t_2} = \rho_{t_1+t_2}$ per ogni $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, si ricavino le equazioni di evoluzione temporale per gli stati quantistici e per le osservabili (fare uso del teorema di Stone).

**3.** a) Dimostrare che le costanti di struttura di un gruppo di Lie abeliano sono nulle.

b) Determinare l'algebra di Lie $su(2)$ di $SU(2)$ come sottoalgebra di $gl(2, \mathbf{C})$.

**4.** Sia il gruppo di Lie $G$ un gruppo di trasformazioni di simmetria di un sistema quantistico descritto mediante lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

a) Dimostrare che il teorema di Wigner implica l'esistenza di una rappresentazione proiettiva di $G$.

b) Siano $H$ e $K$ sottogruppi di Lie di $G$, a 1 parametro additivo, con generatori hermitiani $A$ e $B$ rispettivamente. Dimostrare che se gli elementi di $H$ commutano con gli elementi di $K$ allora

$$[B, A] = ib,$$

dove $b$ è una costante reale.

**5.** Sia il gruppo di Galileo $G$ un gruppo di simmetria per una particella localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare la regola $[J_x, J_y] = iJ_z$.

b) Dimostrare che per una particella libera $[H, J_\alpha] = [H, P_\alpha] = \mathbf{0}$.

c) Trovare la relazione tra i generatori $P_\alpha$ e gli operatori velocit $V_\alpha$, sotto l'ipotesi che valga l'identificazione $V_\alpha = \dot{Q}_\alpha$.

**Fisica Matematica Avanzata, 14 1 2012**

**1.** a) Dimostrare che ogni gruppo $G$ è isomorfo a un sottogruppo del gruppo $\mathcal{S}(G)$ delle bijezioni di $G$.

b!) Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme finito di un gruppo $G$. Far vedere che $\mathcal{F}$ è un sottogruppo di $G$ se e soltanto se $f \cdot h \in \mathcal{F}$ per ogni coppia $f, h \in \mathcal{F}$.

**2.** Si consideri il gruppo $G$ delle trasformazioni $g \equiv (\mathbf{w}, R) \in \mathbf{R}^2 \times SO(2)$, $g(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{w}$ del piano generato dalle traslazioni e dalle rotazioni (gruppo di Euclide).

a) Determinare una rappresentazione di $G$ in $GL(3, \mathbf{R})$.

b) Verificare se tale rappresentazione è irriducibile.

**3.** a) Determinare le algebre di Lie $su(2)$ di $SU(2)$ e $so(3)$ di $SO(3)$ come sottoalgebre di $gl(2, \mathbf{C})$ e $gl(3, \mathbf{R})$ rispettivamente.

b) Verificare che esse sono isomorfe.

**4.** Sia $H$ l'operatore hamiltoniano di un sistema quantistico per il quale vale $P_t = e^{-iHt} P e^{iHt}$, dove $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ e $P_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ rappresentano lo stato all'istante 0 e $t$.

a) Trovare l'equazione di evoluzione per i vettori di stato $\psi_t$ nella descrizione di Schroedinger e per le osservabili $A^{(t)}$ nella descrizione di Heisenberg.

b) Sia $A$ un operatore hermitiano che rappresenta un'osservabile. Dimostrare che se $[H, A] = 0$, allora per ogni funzione analitica $f$ si ha $[f(A)]^{(t)} = f(A)$.

**5.** Il gruppo di Galileo $G$ sia un gruppo di simmetria per un sistema localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$. Date le regole per i commutatori $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$,

a) determinare i commutatori $[J_\alpha, G_\beta]$ e $[G_\alpha, P_\beta]$;

b) Dalle proprietà di covarianza, determinare $[J_\alpha, V_\beta]$.

c) Dimostrare che se le rotazioni e le traslazioni spaziali sono simmetrie dinamiche, allora $[H, J_\alpha] = [H, P_\alpha] = \mathbf{0}$.

**Fisica Matematica Avanzata, 14 II 2012**

**1.** Dimostrare che $\mathcal{E}$ è un'osservabile 1-0 se e soltanto se l'operatore $E$ è un proiettore ortogonale.

**2.** Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ osservabili rappresentate da operatori $A = \sum_i \lambda_j P_j$ e $B = \sum_k \mu_k Q_k$ dove $P_j$ e $Q_k$ sono proiettori tali che $[P_j, Q_k] = \mathbf{0}$. Dimostrare che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono simultaneamente misurabili.

**3.** a) Dimostrare che ogni gruppo $G$ è isomorfo a un sottogruppo del gruppo $\mathcal{S}(G)$ delle bijezioni di $G$.

b) Si consideri il gruppo $G$ delle trasformazioni $g \equiv (\mathbf{w}, R) \in \mathbf{R}^2 \times SO(2)$, $g(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{w}$ del piano generato dalle traslazioni e dalle rotazioni (gruppo di Euclide).

b.i) Determinare una rappresentazione di $G$ in $GL(3, \mathbf{R})$.

b.ii) Verificare se tale rappresentazione è irriducibile.

**4.** a) Determinare le algebre di Lie $su(2)$ di $SU(2)$ e $so(3)$ di $SO(3)$ come sottoalgebre di $gl(2, \mathbf{C})$ e $gl(3, \mathbf{R})$ rispettivamente.

b!) Verificare che esse sono isomorfe.

**5.** Sia $H$ l'operatore hamiltoniano di un sistema quantistico per il quale vale $P_t = e^{-iHt} P e^{iHt}$, dove $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ e $P_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$ rappresentano lo stato all'istante 0 e $t$.

a) Trovare l'equazione di evoluzione per i vettori di stato $\psi_t$ nella descrizione di Schroedinger e per le osservabili $A^{(t)}$ nella descrizione di Heisenberg.

b) Sia $A$ un operatore hermitiano che rappresenta un'osservabile. Dimostrare che se $[H, A] = 0$, allora per ogni funzione analitica $f$ si ha $[f(A)]^{(t)} = f(A)$.

**6.** Il gruppo di Galileo $G$ sia di simmetria per un sistema localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$. Date le regole per i commutatori $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$,

a) determinare i commutatori $[J_\alpha, G_\beta]$ e $[G_\alpha, P_\beta]$;

b) Dalle proprietà di covarianza, determinare $[J_\alpha, V_\beta]$.

c) Indicare le condizioni per cui l'operatore hamiltoniano è $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} + cost.$ In questo caso, determinare $[Q_\alpha, Q_\alpha^{(t)}]$ e derivarne le implicazioni fisiche.

**MPDQT february 9, 2023**

**1.** Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ be the matrix that represents an observable $\mathcal{A}$ of a quantum system in the Hilbert space $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$.

a) Find the resolution of the identity of $A$.

b) If the quantum state is represented by $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, where $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$, find the probability of obtaining each of the possible outcomes.

**2.** Let $(S_1, S_2)$ be a symmetry quantum transformation. Without making use of Wigner theorem, prove

a) that $S_1$ is a convex isomorphism of the set $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ of density operators;

b) that $S_2$ is linear and weakly continuous.

**3.** Let the Galilei's group $\mathcal{G}$ be the symmetry group for an isolated system and let $\mathcal{H}$ be the Hilbert space of its quantum theory.

a) Show the existence of a unitary projective representation $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ of $\mathcal{G}$ such that $S_g^{(n)}[B] = U_g B U_g^{-1}$, $n = 1, 2$, by making use of Wigner theorem.

b) In the representation of item (a), given $[J_j, J_k]$, determine $[J_j, G_k]$.

**4.** Let us consider the simplest quantum theory of a particle with interaction homogeneous with respect to time.

a) prove that the interaction admits a Q-covariant $\sigma$-conversion if and only if the position operator is the multiplication operator $\mathbf{F}$.

b) Prove that if the $\sigma$-conjversion leaves unaltered at frst order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to translations, then $H = F(\hat{\mathbf{P}}) + \Phi(\mathbf{Q})$.

c) Prove that if the $\sigma$-conversion leaves unaltered at first order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to the whole $\mathcal{G}$, then $H = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} + \Phi(\mathbf{Q})$.

**Mathematical Physical Development of Quantum Theory**
**January 19, 2023**

**1.** The operators $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ of $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ represent two quantum 0-1 observables $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ that can be measured together.

a) Determine the value of the real number $k$.

b) Identify a self-adjoint operator $C$ and two functions $f$ and $g$ such that $\mathcal{P} = f(\mathcal{C})$ and $\mathcal{Q} = g(\mathcal{C})$.

c) Determine the pure state $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ such that every simultaneous measurement of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ yields two identical outcomes.

**2.** Let the Galilei's group $\mathcal{G}$ be the symmetry group of the simplest quantum theory of a localizable particle, where the position operator $\mathbf{Q}$ coincides with the multiplication operator $\mathbf{F}$.

a) Given as known the commutators $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$, prove that $e^{-iP_\alpha a} F_\beta e^{iP_\alpha a} = F_\alpha - \delta_{\alpha\beta} a$, where $\mathbf{F} = \frac{1}{\mu}\mathbf{G}$.

b) Prove that $\frac{d}{dt} Q_\alpha \equiv \dot{Q}_\alpha = P_\alpha/\mu$.

**3.** Let us consider the simplest quantum theory of a particle undergoing an interaction homogeneous with respect to time, which admits a $Q$-covariant $\sigma$-conversion for which the position oprator is the multiplication operator: $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$.

a) Show that if the $\sigma$-conversion leaves invariant at first order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to spatial translations, then $H = F(\mathbf{P}) + \Phi(\mathbf{Q})$.

**b!**) Show that if the $\sigma$-conversion leaves unaltered at first order also the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to the whole $\mathcal{G}$, then $H = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} + \Phi(\mathbf{Q})$.

**Mathematical Physical Development of Quantum Theory - November 28, 2022**

**1.** Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ be 0-1 observables that are measurable together.

a) Show that the operators $P$ and $Q$ representing $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ must be projection operators.

b) Determine an observable $\mathcal{C}$ and two functions $f$ and $g$ such that $\mathcal{P} = f(\mathcal{C})$ and $\mathcal{Q} = g(\mathcal{C})$.

c) Let $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ be the state of the system. Show that in a symultaneous measurement of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ the outcome 1 for $\mathcal{P}$ implies the outcome 1 for $\mathcal{Q}$ if and only if $PQ\psi = P\psi$.

**2.** Let us consider the general quantum dynamical evolution

$$\rho_t = U_t \rho U_t^{-1}, \quad A_t = U_t^{-1} A U_t$$

in the case that every $U_t$ is unitary. Show that time homogeneity implies the existence of an hermitean operator $H$ such that $U_t = e^{-iHt}$, using Stone's theorem.

**3.** Let the Galilei's group $\mathcal{G}$ be the symmetry group for a localizable particle and $\mathcal{H}$ the Hilbert space of its quantum theory.

a) Show the existence of a unitary projective representation $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ of $\mathcal{G}$ by making use of Wigner theorem and of the properties of symmetry quantum transformations.

b) In the representation of item (a), given $[J_\alpha, J_\beta]$, determine $[J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta]$.

**4.** Let us consider the hamiltonian operator $H = \frac{1}{2\mu}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\hat{P}_\alpha - f_\alpha(\mathbf{Q})\right)^2 + \varphi(\mathbf{Q})$ of the simplest quantum theory of a particle undergoing interaction homogeneous with respect to time, in the case of a $Q$-covariant $\sigma$-conversion that leaves invariant the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to boosts at first order. Determine the hamiltonian operator if the $\sigma$-conversion leaves invariant at first order also the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$

a) with respect to spatial translations,

b) with respect to spatial translations and spatial rotations.

**Fisica Matematica Avanzata 1 - 1 9 2022**

**1.** Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$.

a) Trovare la risoluzione dell'identità di $A$.

b) Se lo stato è rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dove $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, determinare la probabilità di ottenere ognuno dei valori possibili.

**2.** Sia $(S_1, S_2)$ una trasformazione quantistica di simmetria. Dimostrare, senza usare il teorema di Wigner,

a) che $S_1$ preserva la struttura convessa degli operatori densità;

b) che $S_2$ è lineare e debolente continua.

**3.** Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per un sistema isolato e sia $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert della sua teoria quantistica.

a) Dimostrare l'esistenza di una rappresenbtazione proiettiva $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ di $\mathcal{G}$ tale che $S_g^{(n)}[B] = U_g B U_g^{-1}$, $n = 1, 2$, facendo uso del teorema di Wigner.

b) Nella rappresentazione del punto (a), date $[J_j, J_k]$, determinare $[J_j, G_k]$.

**4.** Si consideri la più semplice Teoria Quantistica di una particella soggetta a interazioni omogenee rispetto al tempo.

a) Dimostrare che l'interazione ammette una $\sigma$-conversion $Q$-covariante se e soltanto se l'operatore posizione è l'operatore di moltiplicazione.

b) Far vedere che se la $\sigma$-conversion lascia invariate al primo ordine le proprietà di covarianza di $\mathbf{Q}^{(t)}$ rispetto alle traslazioni allora $H = F(\hat{\mathbf{P}}) + \Phi(\mathbf{Q})$.

c) Far vedere che se la $\sigma$-conversion lascia invariate al primo ordine anche le proprietà di covarianza di $\mathbf{Q}^{(t)}$ rispetto a tutto $\mathcal{G}$ allora $H = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} + \Phi(\mathbf{Q})$.

**Mathematical Physical Development of Quantum Theory**
**January 19, 2023**

**1.** The operators $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ of $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ represent two quantum 0-1 observables $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ that can be measured together.

a) Determine the value of the real number $k$.

b) Identify a self-adjoint operator $C$ and two functions $f$ and $g$ such that $\mathcal{P} = f(\mathcal{C})$ and $\mathcal{Q} = g(\mathcal{C})$.

c) Determine the pure state $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ such that every simultaneous measurement of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ yields two identical outcomes.

**2.** Let the Galilei's group $\mathcal{G}$ be the symmetry group of the simplest quantum theory of a localizable particle, where the position operator $\mathbf{Q}$ coincides with the multiplication operator $\mathbf{F}$.

a) Given as known the commutators $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$, prove that $e^{-iP_\alpha a} F_\beta e^{iP_\alpha a} = F_\alpha - \delta_{\alpha\beta} a$, where $\mathbf{F} = \frac{1}{\mu}\mathbf{G}$.

b) Prove that $\frac{d}{dt} Q_\alpha \equiv \dot{Q}_\alpha = P_\alpha / \mu$.

**3.** Let us consider the simplest quantum theory of a particle undergoing an interaction homogeneous with respect to time, which admits a $Q$-covariant $\sigma$-conversion for which the position oprator is the multiplication operator: $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$.

a) Show that if the $\sigma$-conversion leaves invariant at first order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to spatial translations, then $H = F(\mathbf{P}) + \Phi(\mathbf{Q})$.

**b!**) Show that if the $\sigma$-conversion leaves unaltered at first order also the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to the whole $\mathcal{G}$, then $H = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} + \Phi(\mathbf{Q})$.

**MPDQT september 1, 2022**

**1.** Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ be the matrix that represents an observable $\mathcal{A}$ of a quantum system in the Hilbert space $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$.

a) Find the resolution of the identity of $A$.

b) If the quantum state is represented by $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, where $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, find the probability of obtaining each of the possible outcomes.

**2.** Let $(S_1, S_2)$ be a symmetry quantum transformation. Without making use of Wigner theorem, prove

a) that $S_1$ is a convex isomorphism of the set $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ of density operators;

b) that $S_2$ is linear and weakly continuous.

**3.** Let the Galilei's group $\mathcal{G}$ be the symmetry group for an isolated system and let $\mathcal{H}$ be the Hilbert space of its quantum theory.

a) Show the existence of a unitary projective representation $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ of $\mathcal{G}$ such that $S_g^{(n)}[B] = U_g B U_g^{-1}$, $n = 1, 2$, by making use of Wigner theorem.

b) In the representation of item (a), given $[J_j, J_k]$, determine $[J_j, G_k]$.

**4.** Let us consider the simplest quantum theory of a particle with interaction homogeneous with respect to time.

a) prove that the interaction admits a Q-covariant $\sigma$-conversion if and only if the position operator is the multiplication operator $\mathbf{F}$.

b) Prove that if the $\sigma$-conjversion leaves unaltered at frst order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to translations, then $H = F(\hat{\mathbf{P}}) + \Phi(\mathbf{Q})$.

c) Prove that if the $\sigma$-conversion leaves unaltered at frst order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to the whole $\mathcal{G}$, then $H = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mu} + \Phi(\mathbf{Q})$.

**MPDQT june 23, 2022**

**1.** Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ be 0-1 observables that are measurable together.

a) Show that the operators $P$ and $Q$ representing $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ must be projection operators.

b) Find an operator $C$ and two functions $f$ and $g$ such that $P = f(C)$ and $Q = g(C)$.

c) Let $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ be the quantum state such that in any symultaneous measurement of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ the outcome 1 for $\mathcal{P}$ implies the outcome 1 for $\mathcal{Q}$. Prove that this happens if and only if $PQ\psi = P\psi$.

d) Find $\psi$ for which (c) holds if $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**2.** Let the Galilei's group $\mathcal{G}$ be the symmetry group for an isolated system and let $\mathcal{H}$ be the Hilbert space of its quantum theory.

a) Show the existence of a unitary projective representation $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ of $\mathcal{G}$ such that $S_g^{(n)}[B] = U_g B U_g^{-1}$, $n = 1, 2$, by making use of Wigner theorem.

b) In the representation of item (a), given $[J_j, J_k]$, determine $[J_j, P_k]$.

**3.** Let us consider the simplest quantum theory of an interacting particle whose $Q$-covariant $\sigma$-conversion leaves invariant the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ at first order with respect to boosts, so that $H = \frac{1}{2\mu}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\hat{P}_\alpha - f_\alpha(\mathbf{Q})\right)^2 + \varphi(\mathbf{Q})$ . Derive the hamiltonian operator $H$ in the case that the $Q$-covariant $\sigma$-conversion leaves invariant the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ at first order also

a) with respect to spatial translations;

c) with respect to spatial translations and spatial rotations.

**Mathematical Physical development of Quantum Theory - 26 7 2022**

**1.** The two operators $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ of $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$ represent the two observables $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

a) Show that $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ are 0-1 observables that can be measured together.

b) Identify explicitly a self-adjoint operator $C$ and two functions $f$ and $g$ such that $\mathcal{P} = f(\mathcal{C})$ and $\mathcal{Q} = g(\mathcal{C})$.

c) Prove that a density operator $\rho$ is pure if and only if $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

**2.** Let $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ be a projective representation of Galilei's group $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}$.

a) Given $[J_j, J_k]$, derive $[J_j, P_k]$.

Let $\mathcal{G}$ be the symmetry group of the simplest quantum theory of a localizable particle, where the postion operator $\mathbf{Q}$ coincides with the multiplicaton operator $\mathbf{F}$.

b) Prove that $[Q_j, Q_k^{(t)}] = \frac{i}{\mu}\delta_{jk}t$ e $H = \frac{1}{2\mu}\sum_j P_j^2 + E_0$.

**3.** Within the development of the quantum theory of an interacting particle, let us consider the concept of quantum transformation $S_g : \Omega(\mathcal{H}) \to \Omega(\mathcal{H})$ associated to the Galilei's transformation $g \in \mathcal{G}$.

a) Prove that the properties of quantum transformations imply

$S_g[E] \in \Pi(\mathcal{H})$ iff $E \in \Pi(\mathcal{H})$, and

$S_g[A + B] = S_g[A] + S_g[B]$ if $A, B,\ A + B \in \Omega(\mathcal{H})$ and $[A, B] = \mathbf{0}$.

(b) Let $\{g \to U_g\} \to \{g \to \hat{U}_g = V_g U_g\}$ be a $Q$-covariant $\sigma$-conversion such that $\hat{U}\mid_{\mathcal{E}}$ is the projective representation induced by the simplest projective repsentation of SO(3). Prove that $V_g = e^{i\theta(\mathbf{Q})}$, where $\theta(\mathbf{Q})$ is a self-adjoint operator function of $\mathbf{Q}$.

c) Prove that if the $Q$-covariant $\sigma$-conversion leaves unaltered at first order the covariance properties of $\mathbf{Q}^{(t)}$ with respect to boosts, then

$$[\hat{G}_j, Q_k^{(t)}] = i\delta_{jk}t + \hat{o}(t), \text{ where } \lim_{t\to 0}\hat{o}(t) = \mathbf{0}.$$