

Parte 2

METODI MATEMATICI PER LA MECCANICA QUANTISTICA

Spazi di pre-Hilbert e spazi di Hilbert

Gianpiero CATTANEO

10 giugno 2008

Indice

I - Spazi con Prodotto Interno e Spazi di Hilbert	5
1 Spazi con Prodotto Interno	7
1.1 Introduzione	7
1.2 Spazi con prodotto interno	9
1.3 Spazi di Hilbert	14
1.4 Continuità del prodotto interno.	16
1.5 Spazi con norma non ottenibile da un prodotto interno	18
1.6 Ortogonalità e ordine parziale di sottospazi	19
1.6.1 Insiemi parzialmente ordinati di sottospazi	21
1.6.2 Ortospazi	23
2 Esempi	27
2.1 Introduzione	27
2.2 Esempi di spazi con prodotto interno	27
3 Sistemi ortonormali completi	39
3.1 Introduzione	39
3.2 Sistemi ortonormali di vettori	39
3.3 Sistemi ortonormali completi	43
3.4 Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt	52
4 SONC in spazi di Hilbert	59
4.1 Sonc in spazi di Hilbert	59
4.2 Sonc in coppie spazio pre Hilbert-spazio di Hilbert	63
4.3 Sonc nello spazio di Hilbert \mathbb{R}^2	64
4.4 Integrale diretto di spazi di Hilbert	65
4.4.1 Esempio: Caso particolare $I = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$	66
5 SONC in spazi funzionali	69
5.1 Sistemi ortonormali completi polinomiali in $L_2[a, b]$	69
5.2 Polinomi di Legendre	71
5.3 Polinomi di Hermite	76
5.4 Polinomi di Laguerre	84

6	SONC di Fourier	95
6.1	Sonc trigonometrico ed esponenziale	95
6.2	Serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$	105
6.3	Serie di Fourier in (a, b)	109
6.4	Sviluppo in armoniche	111
6.5	Equazioni differenziali e serie di Fourier	114
7	Operatori Unitari e Antiunitari	119
7.1	Operatori isometrici, unitari e antiunitari	119
7.1.1	Trasformazioni ortogonali e isometriche in spazi con prodotto interno reali	126
8	Rappresentazioni di Heisenberg e di Dirac	131
8.1	Rappresentazione matriciale di Heisenberg	131
8.1.1	Caso finito-dimensionale	133
8.2	Completamento di uno spazio con prodotto interno	134
8.3	Notazione di Dirac: vettori <i>bra</i> e <i>ket</i>	138
8.4	Sottospazi ortogonali in spazi di Hilbert	143
8.4.1	Equivalenza antiunitaria fra uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e il suo duale topologico \mathcal{H}^*	146
9	Trasformata di Fourier	149
9.1	La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	149
9.2	Operatore unitario di Fourier	154
9.3	L'operatore di Fourier–Plancherel su L_2	161
9.4	Proprietà particolari su $L_1(\mathbb{R})$	167
II	- Operatori in Spazi di Hilbert	169
10	Operatori che ammettono aggiunto	
	Operatori simmetrici e autoaggiunti	171
10.1	Aggiunto di un operatore densamente definito	171
10.2	Algebra degli operatori densamente definiti in \mathcal{H}	180
10.3	Operatori lineari limitati	181
10.4	Operatori unitari ed antiunitari	185
10.4.1	Il caso finito-dimensionale	187
11	Spettro approssimato	189
11.1	Spettro puntuale e spettro puntuale approssimato	189
11.2	Spettro di un operatore	193
12	Operatori chiusi	197
12.1	Operatori chiusi	197
12.2	Teorema del grafo chiuso	200
12.3	Operatori chiusi in spazi di Hilbert	202

13 Operatori differenziali al secondo ordine	205
13.1 Operatori differenziali formalmente autoaggiunti	205
13.2 Esempi. L'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ con condizioni al contorno	213
14 Problemi di Sturm–Liouville di tipo polinomiale	219
14.1 Problemi di Sturm–Liouville Polinomiali	219
14.2 Equazioni e polinomi di Jacobi, Legendre, Laguerre, Hermite	230
14.2.1 Equazioni e polinomi di Jacobi: intervallo $[-1, 1]$: Caso $a_0(x) = 1 - x^2$	230
14.2.2 (2) Equazione e polinomi di Legendre: caso $a_0(x) = 1 -$ x^2 , $p = q = 0$, $\gamma_0 = 0$	232
14.2.3 (3) Equazioni e polinomi di Hermite: intervallo $[-\infty, \infty]$, caso $a_0(x) = 1$, $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_0 = -1$	234
 III - Operatori in Spazi pre–Hilbertiani	 235
15 Operatori Normali ed Hermitiani	237
15.1 Operatori definiti su coppie Hilbertiane	237
15.2 Operatori normali e Hermitiani	242
16 Operatori unitari in pre-Hilbert	255
16.1 Autovalori e autovettori di un operatore lineare	255
16.2 L'operatore di parità: esempio di operatore contemporaneamente unitario e hermitiano	260
16.3 Le matrici di Pauli	263
16.4 Operatori unitari da uno spazio in se	266

Modulo I

SPAZI CON PRODOTTO INTERNO
E SPAZI DI HILBERT

Capitolo 1

Spazi con Prodotto Interno e Spazi di Hilbert

1.1 Introduzione

Abbiamo più volte usato lo *spazio euclideo* \mathbb{R}^n le cui nozioni e proprietà fondamentali sono state ottenute generalizzando le corrispondenti nozioni e proprietà fondamentali dell'usuale spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Così è stato in particolare per le operazioni di somma di due vettori $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e di prodotto di uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$ per un vettore \underline{x} di \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned}\underline{x} + \underline{y} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \alpha \underline{x} &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)\end{aligned}$$

Una delle nozioni più importanti definibili su \mathbb{R}^n è quella di *prodotto scalare* o *prodotto interno*, che associa ad ogni coppia ordinata di vettori $(\underline{x}, \underline{y})$ di \mathbb{R}^n un numero reale

$$(1.1) \quad \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

In \mathbb{R}^3 questo prodotto interno è l'usuale prodotto scalare utilizzato, per esempio, in Meccanica Razionale. Le più importanti proprietà del prodotto scalare sono le seguenti:

$$(S-1) \quad \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \langle \underline{y} | \underline{x} \rangle$$

$$(S-2) \quad \langle \underline{x}_1 + \underline{x}_2 | \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}_1 | \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}_2 | \underline{y} \rangle$$

$$(S-3) \quad \langle \alpha \underline{x} | \underline{y} \rangle = \alpha \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle$$

$$(S-4) \quad \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle \geq 0 \quad \text{per ogni } \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(S-5) \quad \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle = 0 \quad \text{sse } \underline{x} = \underline{0}$$

La verifica di queste proprietà è immediata conseguenza della definizione di prodotto interno introdotta su \mathbb{R}^n . Da queste proprietà se ne possono dedurre

ovviamente delle altre, per esempio che

$$\begin{aligned}\langle \underline{x} | \underline{y}_1 + \underline{y}_2 \rangle &= \langle \underline{x} | \underline{y}_1 \rangle + \langle \underline{x} | \underline{y}_2 \rangle \\ \langle \underline{x} | \alpha \underline{y} \rangle &= \alpha \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle\end{aligned}$$

Ma il fatto rilevante é che la (S-4) permette di introdurre la *norma* (o *modulo*) indotta dal prodotto interno secondo la definizione

$$(1.2) \quad \|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x} | \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

che é proprio la norma euclidea di \mathbb{R}^n . Questa norma é tale da essere legata al prodotto scalare tramite la diseguaglianza di Schwarz:

$$(1.3) \quad |\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$$

in cui é vero il segno uguale sse $\underline{x} = \lambda \underline{y}$ per un opportuno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Dalla diseguaglianza precedente, sotto l'ipotesi che $\|\underline{x}\| \neq 0$ e $\|\underline{y}\| \neq 0$, si ricava che

$$(1.4) \quad -1 \leq \frac{\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \|\underline{y}\|} \leq 1$$

e perciò esisterà un unico numero reale $\theta \in [0, \pi]$, chiamato *angolo*, compreso fra i vettori \underline{x} e \underline{y} , e tale che

$$\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos \theta.$$

In questo modo abbiamo ottenuto la generalizzazione dell'usuale definizione di prodotto scalare di due vettori in \mathbb{R}^3 quale prodotto delle loro norme (o moduli) per il coseno dell'angolo compreso fra di essi.

La nozione di prodotto scalare può essere estesa allo spazio lineare complesso \mathbb{C}^n associando ad ogni coppia di vettori di \mathbb{C}^n

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad \underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

il numero complesso

$$(1.1c) \quad \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$$

Relativamente a questo prodotto interno sono soddisfatte proprietà analoghe a quelle di tipo (s) viste ora nel caso di \mathbb{R}^n , precisamente

$$(s-1) \quad \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \overline{\langle \underline{y} | \underline{x} \rangle}$$

$$(s-2) \quad \langle \underline{x}_1 + \underline{x}_2 | \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}_1 | \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}_2 | \underline{y} \rangle$$

$$(s-3) \quad \langle \alpha \underline{x} | \underline{y} \rangle = \bar{\alpha} \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle$$

$$(s-4) \quad \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle \geq 0 \quad \text{per ogni } \underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

$$(s-5) \quad \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle = 0 \quad \text{sse } \underline{x} = \underline{0}$$

La (s-3) permette di introdurre la norma indotta dal prodotto interno

$$(1.2c) \quad \|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x} | \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

che é la norma $\|\cdot\|_2$ definita su \mathbb{C}^n . Anche in questo caso varrà la proprietà (1.3) ma da questa non sarà più possibile dedurre la (1.4) e quindi non saremo più in grado di definire l'angolo compreso fra due vettori.

1.2 Spazi con prodotto interno

Astraendo da queste considerazioni, possiamo introdurre in maniera assiomatica la definizione generale di spazio con prodotto interno.

Definizione 1.2.1 *Si definisce spazio con prodotto interno o spazio unitario uno spazio lineare complesso \mathcal{S} munito di una applicazione $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$ che ad ogni coppia ordinata (x, y) di vettori in \mathcal{S} associa un numero complesso, indicato con $\langle x | y \rangle$ e chiamato prodotto interno di x e y , tale che per ogni $x, x_1, x_2, y \in \mathcal{S}$ e ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, sono soddisfatte le condizioni:*

$$(S-1) \quad \langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle} \quad (\text{hermitianità})$$

$$(S-2) \quad \langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle \quad (\text{additività a sinistra})$$

$$(S-3) \quad \langle \alpha x | y \rangle = \overline{\alpha} \langle x | y \rangle \quad (\text{antiomogeneità a sinistra})$$

$$(S-4) \quad \langle x | x \rangle \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{C}^n \quad (\text{non negativo})$$

$$(S-5) \quad \langle x | x \rangle = 0 \quad \text{sse } x = \underline{0} \quad (\text{non degenera})$$

Osservazione 1.2.2 Se \mathcal{S} é uno spazio lineare reale, la definizione di spazio con prodotto interno (reale) é data di conseguenza. In questo caso tutte le precedenti condizioni rimarranno invariate ad eccezione della (S-1) e della (S-3) in cui ovviamente non comparirà la coniugazione complessa. In questo caso, la (S-1) viene chiamata condizione di *simmetria* e la (S-3) condizione di *omogeneità a sinistra*.

Teorema 1.2.3 *In uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

$$(i) \quad \langle x | y_1 + y_2 \rangle = \langle x | y_1 \rangle + \langle x | y_2 \rangle$$

$$(ii) \quad \langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$$

$$(iii) \quad \langle \underline{0} | x \rangle = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{S}$$

$$(iv) \quad \langle x | y \rangle = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{S} \quad \text{implica } y = \underline{0}$$

$$(v) \quad |\langle x | y \rangle|^2 \leq \langle x | x \rangle \cdot \langle y | y \rangle \quad (\text{diseguaglianza di Schwarz})$$

Nella (v) il segno uguale vale sse $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. (i) Dalla (S-1) e (S-2), definizione 1.2, si ha

$$\begin{aligned}\langle x|y_1 + y_2 \rangle &= \overline{\langle y_1 + y_2|x \rangle} = \\ &= \overline{\langle y_1|x \rangle} + \overline{\langle y_2|x \rangle} = \\ &= \langle x|y_1 \rangle + \langle x|y_2 \rangle\end{aligned}$$

(ii) Analogamente dalla (S-1) e (S-3), definizione 1.2, otteniamo che

$$\langle x|\alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y|x \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle y|x \rangle} = \alpha \langle x|y \rangle$$

(iii) Essendo $\langle \underline{0}|y \rangle = \langle x|y \rangle = 0 \cdot \langle x|y \rangle = 0$ questa proprietà segue dalla (S-3), definizione 1.2.

(iv) La iv é conseguenza del fatto che fra tutti i possibili x vi é anche $x = y$ e perciò $\langle y|y \rangle = 0$ implica, per la (S-5) definizione 1.2, che $y = \underline{0}$.

(v) Poniamo $A = \langle x|x \rangle$, $B = |\langle x|y \rangle|$, $C = \langle y|y \rangle$. Il caso $B = 0$ é banale. Se $B \neq 0$ sia $\alpha = \frac{\langle y|x \rangle}{B}$ allora

$$\alpha \langle x|y \rangle = \frac{\langle y|x \rangle \langle x|y \rangle}{|\langle x|y \rangle|} = |\langle x|y \rangle| = B \quad \text{e} \quad |\alpha| = 1$$

Qualunque sia il numero reale $r \in \mathbb{R}$, avremo che

$$\langle x - r\alpha y|x - r\alpha y \rangle = \langle x|x \rangle - r\alpha \langle x|y \rangle - r\bar{\alpha} \langle y|x \rangle + r^2 \langle y|y \rangle$$

L'espressione sulla sinistra, per la (S-4) definizione 1.2, é reale non negativa e perciò

$$A - 2rB + r^2C \geq 0 \quad \text{per ogni } r \in \mathbb{R}$$

Se $C \neq 0$, questa disequazione in r sar  soddisfatta per ogni $r \in \mathbb{R}$ sse $B^2 - AC \leq 0$, ossia sse $B^2 \leq AC$; altrimenti scritta come

$$|\langle x|y \rangle|^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$$

Se $C = 0$ allora $C = \langle y|y \rangle = 0$ implica $y = \underline{0}$ da cui

$$B = |\langle x|y \rangle| = 0$$

Se $x = \lambda y$ allora

$$\begin{aligned}|\langle x|y \rangle|^2 &= |\langle \lambda y|y \rangle|^2 = |\lambda|^2 |\langle y|y \rangle|^2 = \\ &= \bar{\lambda} \lambda \langle y|y \rangle \langle y|y \rangle = \\ &= \langle \lambda y|\lambda y \rangle \langle y|y \rangle = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $|\langle x|y \rangle|^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$ e con x e y entrambi diversi dal vettore nullo. (Se fosse $x = \underline{0}$ allora $|\langle \underline{0}|y \rangle|^2 = \langle \underline{0}|\underline{0} \rangle \cdot \langle y|y \rangle$ e $x = 0y$; analogamente se fosse $y = \underline{0}$). Sotto l'ipotesi fatta, la condizione

$$|\langle x|y \rangle|^2 = \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$$

impone che $\langle x|x \rangle \neq 0$ e $\langle y|y \rangle \neq 0$ e perciò pure $\langle x|y \rangle \neq 0$. Posto allora

$$\lambda = \frac{\langle y|x \rangle}{\langle y|y \rangle}$$

sarà $\lambda \neq 0$ e perciò avremo che

$$\langle x - \lambda y | x - \lambda y \rangle = \langle x|x \rangle - \lambda \langle x|y \rangle - \overline{\lambda \langle x|y \rangle} + |\lambda|^2 \langle y|y \rangle$$

ma

$$\begin{aligned} \frac{|\langle x|y \rangle|^2}{\langle y|y \rangle} &= \frac{\langle y|x \rangle}{\langle y|y \rangle} \langle x|y \rangle = \lambda \langle x|y \rangle \\ \frac{|\langle x|y \rangle|^2}{\langle y|y \rangle} &= \frac{\langle x|y \rangle}{\langle y|y \rangle} \overline{\langle x|y \rangle} = \overline{\lambda \langle x|y \rangle} \\ \frac{|\langle x|y \rangle|^2}{\langle y|y \rangle} &= \frac{|\langle y|x \rangle|^2}{\langle y|y \rangle^2} \langle y|y \rangle = |\lambda|^2 \langle y|y \rangle \end{aligned}$$

pertanto la (1.2) assume la forma

$$\langle x - \lambda y | x - \lambda y \rangle = \langle x|x \rangle - \frac{|\langle x|y \rangle|^2}{\langle y|y \rangle} = 0$$

e ciò implica $x - \lambda y = \underline{0}$ da cui $x = \lambda y$. □

Osservazione 1.2.4 Se si applicano un numero finito di volte le condizioni (S-1) e (S-2) definizione 1.2 e le proprietà (i) e (ii) del teorema 1.2.3 si ottiene che

$$(1.5) \quad \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \mid y \right\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \langle x_k | y \rangle$$

$$(1.6) \quad \left\langle x \mid \sum_{h=1}^m \beta_h y_h \right\rangle = \sum_{h=1}^m \beta_h \langle x | y_h \rangle$$

Teorema 1.2.5 Se \mathcal{S} è uno spazio con prodotto interno l'applicazione

$$\mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x|x \rangle}$$

soddisfa le condizioni

$$(N-1) \quad \|x\| = 0 \quad \text{sse} \quad x = 0$$

$$(N-2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad (\text{assoluta omogeneità})$$

$$(N-3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{diseguaglianza triangolare})$$

ossia è una norma su \mathcal{S} detta norma indotta dal prodotto interno. Relativamente a questa norma \mathcal{S} diviene uno spazio lineare normato in cui vale la diseguaglianza di Schwarz:

$$(N-4) \quad |\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dimostrazione. La (5), definizione 1.2, implica che $\|x\| = 0$ sse $x = \underline{0}$. Inoltre,

$$\|\alpha x\|^2 = \langle \alpha x | \alpha x \rangle = \bar{\alpha} \alpha \langle x | x \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2$$

Rimane da dimostrare la disuguaglianza triangolare. Ma

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x | y \rangle) + \|y\|^2$$

applicando la (v) del teorema 1.2.3 avremo che

$$\operatorname{Re}(\langle x | y \rangle) \leq |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

per mezzo della quale si ottiene la seguente maggiorazione della (1.2)

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \text{ovvero} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Infine, la disuguaglianza di Schwarz é la (1.2), teorema 1.2.3, scritta in maniera diversa. \square

Osservazione 1.2.6 Ogni spazio con prodotto interno munito della norma indotta dal prodotto interno risulta essere uno spazio lineare normato.

Se lo spazio con prodotto interno é reale, sar  $\langle x | y \rangle \in \mathbb{R}$ per ogni x e $y \in \mathcal{S}$ e in questo caso la disuguaglianza di Schwarz, altrimenti scritta come

$$\frac{|\langle x | y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq 1 \quad \text{per} \quad x \neq \underline{0}, y \neq \underline{0}$$

assume la forma

$$-1 \leq \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

Da ci  segue che esiste un unico $\vartheta \in [0, \pi]$, chiamato *angolo* fra i vettori x e y , tale che

$$\langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \vartheta.$$

Proposizione 1.2.7 Se \mathcal{S} é uno spazio con prodotto interno non banale, ossia diverso da $\{\underline{0}\}$, per ogni $x \in \mathcal{S}$ si ha

$$\|x\| = \sup \{ |\langle x | y \rangle| : \|y\| = 1 \}$$

Dimostrazione. Infatti,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\langle x \left| \frac{x}{\|x\|} \right. \right\rangle \leq \sup \{ |\langle x | y \rangle| : \|y\| = 1 \} \leq \\ &\leq \sup \{ \|x\| \|y\| : \|y\| = 1 \} = \|x\|. \end{aligned}$$

\square

Tramite la norma indotta dal prodotto interno si può introdurre una nozione di convergenza di una successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a valori nello spazio con prodotto interno \mathcal{S} . Diremo che $x \in \mathcal{S}$ é il *limite* per n tendente all'∞ della successione $\{x_n\}$, e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{sse} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

o, equivalentemente, sse

- per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un intero positivo $n_0 = n_0(\epsilon)$ tale che $\|x_n - x\| < \epsilon$ per ogni $n > n_0$.

Il limite di una successione, se esiste, é unico in quanto se fosse $x_1 = \lim x_n$ e $x_2 = \lim x_n$ allora

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_n\| + \|x_n - x_2\| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow \infty$$

e perciò $\|x_1 - x_2\| = 0$ da cui $x_1 = x_2$.

Una successione si dirá *convergente* sse esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$, altrimenti si dirá *divergente*. Dalla definizione di convergenza di una successione si deducono immediatamente le seguenti proprietà:

- (1) se esistono in \mathcal{S} i $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$ allora esiste in \mathcal{S} pure il $\lim(x_n + y_n)$ ed é

$$\lim(x_n + y_n) = x + y;$$

- (2) se esiste in \mathcal{S} il $\lim x_n = x$ e esiste in \mathbb{C} il $\lim \alpha_n = \alpha$ allora esiste in \mathcal{S} il $\lim(\alpha_n x_n)$ e risulta

$$\lim \alpha_n x_n = \alpha x;$$

- (3) se esiste in \mathcal{S} il $\lim x_n$ allora il $\lim \|x_n\|$ esiste in \mathbb{R} ed é

$$\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|.$$

La struttura algebrica di spazio lineare assicura soltanto che le combinazioni lineari *finite* di vettori dello spazio

$$\sum_{n=1}^k \alpha_n x_n$$

danno come risultato un vettore che appartiene ancora allo spazio. Per poter prendere in considerazione combinazioni lineari “infinite” bisogna che lo spazio lineare sia munito almeno di una norma tramite la quale sia possibile introdurre la nozione di convergenza di una successione e quindi di convergenza di una serie.

Precisamente, se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é una successione e $\{s_k = \sum_{n=1}^k x_n : k \in \mathbb{N}\}$ é la successione delle *somme parziali*, definiamo come *serie* la coppia $(\{x_n\}, \{s_n\})$ costituita da una successione in \mathcal{S} e dalla corrispondente successione delle somme parziali. Diremo che la serie in esame é *convergente* in \mathcal{S} sse esiste in \mathcal{S} un elemento, indichiamolo con x , tale che

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k x_n \right)$$

tale elemento si usa denotare più comunemente con $(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)$. Se ciò non accade la serie si dirà *divergente*. In genere la serie si indicherà più semplicemente col simbolo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e nel caso in cui questa serie sia convergente si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è un ben preciso elemento di \mathcal{S} , chiamato *somma* della serie.

Con questa definizione di convergenza di una serie ha senso chiedersi se sia o no convergente in \mathcal{S} una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Se questa serie è convergente parleremo di *combinazione lineare infinita* dei vettori $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Per le combinazioni lineari infinite valgono le proprietà:

- (1) se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = x_\alpha$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n = x_\beta$ sono combinazioni lineari infinite dei medesimi vettori $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) x_n$$

è una combinazione lineare infinita dei vettori $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ed è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) x_n = x_\alpha + x_\beta;$$

- (2) se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = x$ è una combinazione lineare infinita dei vettori $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \alpha_n) x_n$ è una combinazione lineare infinita dei vettori $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \alpha_n) x_n = \lambda x.$$

Considerato uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} e preso un suo sottoinsieme $A \subseteq \mathcal{S}$ diremo che un punto $x \in \mathcal{S}$ è di *aderenza* per A sse esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$, contenuta in A , tale che $\lim a_n = x$. L'insieme di tutti i punti di aderenza di A viene indicato con \overline{A} e viene chiamato *chiusura* di A . Ovviamente $A \subseteq \overline{A}$ e se $A \subseteq B$ allora $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Un sottoinsieme K di \mathcal{S} si dice *chiuso* sse $K = \overline{K}$. In ogni spazio con prodotto interno sono insiemi chiusi: i singoletti $\{x\}$ qualunque sia $x \in \mathcal{S}$, l'insieme vuoto e l'intero spazio \mathcal{S} , la chiusura \overline{A} di un qualsiasi insieme A .

Un sottoinsieme A di uno spazio con prodotto interno si dirà *denso* in \mathcal{S} sse la sua chiusura coincide con \mathcal{S} , ossia sse $\overline{A} = \mathcal{S}$. Lo spazio \mathcal{S} si dirà *separabile* sse esiste in \mathcal{S} un sottoinsieme al più infinito numerabile e denso in \mathcal{S} .

Una successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{S} si dirà di *Cauchy* o *fondamentale* sse per ogni reale $\epsilon > 0$, esiste un intero positivo $n_0 = n_0(\epsilon)$ tale che $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ per ogni $n, m > n_0$.

1.3 Spazi di Hilbert

Chiaramente, ogni successione convergente è anche una successione di Cauchy ma in generale non è vero il viceversa. Diremo che lo spazio \mathcal{S} è *completo* sse ogni successione di Cauchy costituita da vettori di \mathcal{S} è convergente in \mathcal{S} .

Definizione 1.3.1 Si definisce spazio di Hilbert uno spazio con prodotto interno completo rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

Proposizione 1.3.2 Ogni spazio con prodotto interno finito dimensionale è completo, ossia è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Sia $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ una base ortonormale di \mathcal{S} , ossia una base tale che $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$. (Come vedremo in seguito ogni spazio finito dimensionale possiede sempre almeno una di tali basi). Sia ora $\{\psi_m : m \in \mathbb{N}\}$ una successione di Cauchy in \mathcal{S} ed esprimiamo il generico vettore di questa successione quale combinazione lineare dei vettori della base ortonormale in esame

$$\psi_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(m)} \varphi_i$$

Essendo

$$\|\psi_m - \psi_l\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(l)}|^2$$

dal fatto che la successione $\{\psi_m\}$ è di Cauchy ne segue che

$$\lim_{l, m \rightarrow \infty} |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(l)}| = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots, n$$

Pertanto le successioni $\{\alpha_i^{(m)}\}$ sono, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, successioni di Cauchy di numeri complessi e quindi, per la completezza di \mathbb{C} , esisteranno degli scalari complessi α_i , per $i = 1, 2, \dots, n$, tali che

$$(1.7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_i^{(m)} = \alpha_i$$

Considerato il vettore

$$\psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i,$$

che è un elemento di \mathcal{S} , dall'uguaglianza

$$\|\psi - \psi_m\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \alpha_i^{(m)}|^2$$

tenuto conto della (1.7) segue che $\lim_m \psi_m = \psi$. \square

Se V è una varietà lineare di \mathcal{S} , la restrizione a V del prodotto interno definito su \mathcal{S} , ossia il considerare i numeri complessi $\langle h | k \rangle$ al variare dei vettori h e k in V , è un prodotto interno su V . Pertanto,

- ogni varietà lineare V di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} può essere considerata come un vero e proprio spazio con prodotto interno, una volta munita della restrizione ad essa del prodotto interno definito su \mathcal{S} .

Un sottoinsieme M di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} si dice *sottospazio* di \mathcal{S} sse M è una varietà lineare (topologicamente) chiusa.

Proposizione 1.3.3 Tutte le varietà lineari di \mathcal{S} di dimensione lineare finita sono sottospazi.

Dimostrazione. Sia M una varietà lineare finito dimensionale di \mathcal{S} e x_0 un punto della sua aderenza: $x_0 \in \overline{M}$. Esisterà allora una successione $\{x_n\} \subseteq M$ tale che $\lim x_n = x_0$. Ma dal fatto che $\{x_n\}$ è convergente in \mathcal{S} , segue che essa è di Cauchy nello spazio con prodotto interno M , il quale, per la proposizione 2, è completo. Pertanto il limite x_0 della successione $\{x_n\}$ non può che essere un punto di M : $x_0 \in M$. Da ciò segue che $M = \overline{M}$, ossia che M è chiuso. \square

La proposizione precedente assicura che tutte le varietà lineari di dimensione lineare finita di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} sono dei sottospazi di \mathcal{S} . In generale, però, se V è una varietà lineare di \mathcal{S} non è detto che essa sia anche un sottospazio di \mathcal{S} ; ossia non è detto che V sia un sottoinsieme chiuso di \mathcal{S} . Comunque si può dimostrare che

- la chiusura \overline{V} di una varietà lineare V è sempre un sottospazio di \mathcal{S} .

Un'altra interessante proprietà che riguarda i sottospazi di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} è la seguente

- se \mathcal{S} è separabile tutte le sue varietà lineari sono separabili. Se \mathcal{S} è completo tutti i suoi sottospazi sono completi.

Quest'ultima proprietà può essere messa nella seguente forma:

- se H è uno spazio di Hilbert tutti i suoi sottospazi sono spazi di Hilbert.

1.4 Continuità del prodotto interno.

In uno spazio con prodotto interno le combinazioni lineari finite

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \quad \text{e} \quad \sum_{h=1}^n \beta_h y_h$$

di vettori dello spazio soddisfano le relazioni (1.5) e (1.6) viste nel paragrafo 1.2. Però sappiamo che, in virtù della norma indotta dal prodotto interno, è possibile parlare anche di combinazioni lineari infinite (numerabili)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \quad \text{e} \quad \sum_{h=1}^{\infty} \beta_h y_h$$

purché le serie siano convergenti in norma. In questo paragrafo vogliamo dimostrare che si possono estendere le relazioni (1.5) e (1.6) anche al caso delle combinazioni lineari infinite e in questo risultato consiste la cosiddetta continuità del prodotto interno.

Ricordiamo che se \mathcal{S} è uno spazio lineare normato e $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$ un funzionale da \mathcal{S} in \mathbb{C} , allora si dice che f è *continuo* in x_0 sse

- (C-i) per ogni numero reale $\epsilon > 0$, esiste un numero reale $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$ tale che $\|x - x_0\| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Si dirà che f è continuo (globalmente) in \mathcal{S} sse f è continuo in ogni punto di \mathcal{S} . La condizione di continuità (C-i) può essere equivalentemente sostituita dalla seguente condizione di *continuità sequenziale*:

(C-ii) per ogni successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{S} convergente a x_0 la successione $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ converge in \mathbb{C} a $f(x_0)$.

Teorema 1.4.1 *In uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} , fissato un punto $x \in \mathcal{S}$ qualsiasi, il funzionale*

$$D_x : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}, y \mapsto D_x(y) := \langle x|y \rangle$$

è lineare e continuo. Mentre, fissato un punto $y \in \mathcal{S}$ qualsiasi, il funzionale

$$L_y : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}, x \mapsto L_y(x) := \langle x|y \rangle$$

è antilineare e continuo.

Dimostrazione. La linearità di D_x è una banale conseguenza della linearità a destra del prodotto interno e analogamente la antilinearità di L_y è una banale conseguenza della antilinearità a sinistra del prodotto interno. Inoltre, essendo

$$|D_x(y) - D_x(y_0)| = |D_x(y - y_0)| = |\langle x|y - y_0 \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y - y_0\|$$

ed essendo x fissato, preso $\epsilon > 0$, esiste $\delta = \frac{\epsilon}{\|x\|}$ tale che $\|y - y_0\| < \delta$ implica

$$|D_x(y) - D_x(y_0)| < \epsilon$$

Con lo stesso procedimento si dimostra che L_y è continuo. \square

Abbiamo appena ricordato che in uno spazio lineare normato la continuità è equivalente alla continuità sequenziale e perciò i risultati del teorema 1.4.1 possono tradursi nelle proposizioni:

1) *se esiste in \mathcal{S} il limite della successione $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ allora per ogni $x \in \mathcal{S}$ fissato esiste in \mathbb{C} il limite della successione $\{\langle x|y_n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ ed è*

$$\lim \langle x|y_n \rangle = \langle x|\lim y_n \rangle ;$$

2) *se esiste in \mathcal{S} il limite della successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ allora per ogni $y \in \mathcal{S}$ fissato esiste in \mathbb{C} il limite della successione $\{\langle x_n|y \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ ed è*

$$\lim \langle x_n|y \rangle = \langle \lim x_n|y \rangle .$$

In particolare, se $\{\beta_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$ è una successione in \mathcal{S} tale che la corrispondente serie è convergente, posto $s_k = \sum_{n=1}^k \beta_n y_n$ la somma parziale di posto k e con $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n = \lim_k s_k$ la somma della serie, avremo che

$$\lim_k \langle x|s_k \rangle = \left\langle x \left| \lim_k s_k \right. \right\rangle$$

cioè

$$\lim_k \left\langle x \left| \sum_{n=1}^k \beta_n y_n \right. \right\rangle = \left\langle x \left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n \right. \right\rangle$$

da cui segue

$$\lim_k \sum_{n=1}^k \beta_n \langle x | y_n \rangle = \left\langle x \left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n \right. \right\rangle$$

ossia abbiamo ottenuto il seguente risultato:

- 3) se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$ è convergente in \mathcal{S} , allora per ogni $x \in \mathcal{S}$ fissato la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \langle x | y_n \rangle$ è convergente in \mathbb{C} e si ha che

$$\left\langle x \left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n \right. \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \langle x | y_n \rangle .$$

Usando lo stesso procedimento si dimostra che

- 4) se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ è convergente in \mathcal{S} , allora per ogni $y \in \mathcal{S}$ fissato la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \langle x_n | y \rangle$ è convergente in \mathbb{C} e risulta essere

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \left| y \right. \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \langle x_n | y \rangle .$$

Le proprietà 4 e 5 ora ottenute sono la naturale generalizzazione della (1.5) e (1.6) sezione 1.2 e per il fatto che il prodotto interno soddisfa queste proprietà si usa dire che esso è continuo.

1.5 Spazi lineari con norma non ottenibile da un prodotto interno

Negli spazi in cui la norma si ottiene da un prodotto interno, presi due elementi f e g , vale la seguente *legge del parallelogramma*:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 &= \langle f + g | f + g \rangle + \langle f - g | f - g \rangle = \\ &= \langle f | f \rangle + \langle f | g \rangle + \langle g | f \rangle + \langle g | g \rangle + \\ &\quad + \langle f | f \rangle - \langle f | g \rangle - \langle g | f \rangle + \langle g | g \rangle = \\ &= 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 . \end{aligned}$$

□

In \mathbb{R}^2 questo teorema ha una rappresentazione grafica corrispondente alla seguente proprietà:

- la somma dei quadrati delle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma del doppio dei quadrati dei lati.

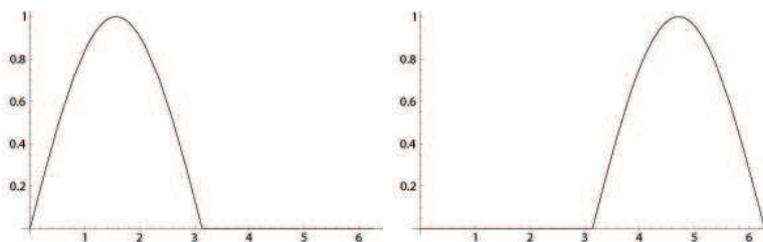
Per quanto visto ora ogni spazio con prodotto interno è uno spazio lineare normato, ma esistono norme che non sono ottenibili da un prodotto interno. Infatti nel seguente esempio considereremo una definizione di norma in uno spazio lineare \mathcal{E} , e mostreremo che, presi due particolari elementi di \mathcal{E} , non è valida la legge del parallelogramma. Ciò significherà che la norma così definita non è ottenibile da un prodotto interno.

Esempio 1.5.1 Sia $C((0, 2\pi), \mathbb{K})$ lo spazio funzionale su cui sono definite la usuale somma di funzioni e il prodotto di una funzione per uno scalare. Consideriamo la norma uniforme:

$$\|\varphi\|_\infty = \sup \{ |\varphi(x)| : x \in (0, 2\pi) \}$$

Ora scegliamo in questo spazio funzionale i due seguenti vettori

$$f = \max \{ (\sin x, 0) \} \quad g = \max \{ (-\sin x, 0) \}$$



Si verifica facilmente che

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \|f - g\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1 \\ 2 &= (\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2) \neq (2\|f\|^2 + 2\|g\|^2) = 4 \end{aligned}$$

■

1.6 Ortogonalità e ordine parziale di sottospazi

In questa sezione introdurremo l'importante nozione di ortogonalità nel caso di spazi con prodotto interno e tramite essa evidenzieremo le proprietà di quei particolari sottospazi che ammettono complemento ortogonale, i cosiddetti sottospazi ortogonali. In particolare prenderemo in esame la cosiddetta "geometria" degli spazi con prodotto interno, intendendo con questo termine lo studio delle loro proprietà rispetto alla relazione d'ordine parziale di inclusione insiemistica.

Definizione 1.6.1 Due vettori x e y di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} si dicono ortogonali sse $\langle x|y \rangle = 0$; in questo caso si usa scrivere $x \perp y$.

Se A e B sono due sottoinsiemi di \mathcal{S} , col simbolo $A \perp B$ indicheremo il fatto che $a \perp b$ per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$. In particolare se $x \in \mathcal{S}$, con $x \perp A$ verrà denotato il fatto che $x \perp a$ per ogni $a \in A$. Infine, con A^\perp si intenderà

l'insieme di tutti gli elementi di \mathcal{S} ortogonali all'intero A , questo insieme viene chiamato *annichilatore* di A ; pertanto

$$A^\perp := \{x \in \mathcal{S} : \langle x|a \rangle = 0 \text{ per ogni } a \in A\}.$$

Esempio 1.6.2 Banalmente $\{\underline{0}\}^\perp = \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}^\perp = \{\underline{0}\}$. ■

Osservazione 1.6.3 Nel caso di uno spazio con prodotto interno reale, poiché per ogni coppia di vettori x, y esiste un unico angolo $\vartheta \in [0, \pi]$ (l'angolo "compreso" fra x e y) tale che

$$\langle x|y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \vartheta,$$

la condizione di ortogonalità $x \perp y$ sse $\langle x|y \rangle = 0$ é equivalente alla usuale condizione che l'angolo compreso fra i due vettori é $\pi/2$.

Non é difficile verificare che in uno spazio con prodotto interno le seguenti proposizioni sono fra loro equivalenti

- (og-i) $\langle x|y \rangle = 0$
- (og-ii) $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$
- (og-iii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (teorema di Pitagora)
- (og-iv) $\|x + y\| = \|x - y\|$.

Proposizione 1.6.4 *La relazione binaria di ortogonalità \perp soddisfa le seguenti proprietà:*

- (i) $x \perp y$ implica $y \perp x$
- (ii) $x \perp x$ sse $x = \underline{0}$
- (iii) $\underline{0} \perp x$ per ogni $x \in \mathcal{S}$
- (iv) $x \perp y$ implica $x \perp (\lambda y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$
- (v) $x \perp y$ e $x \perp z$ implicano $x \perp (y + z)$
- (vi) sia $\{y_n\}$ una successione in \mathcal{S} convergente a $y \in \mathcal{S}$ e tale che $x \perp y_n$ per ogni n , allora $x \perp y$.
- (vii) per ogni $x, y \in \mathcal{S}$ con $x \neq \underline{0}$ esiste un unico a tale che $x \perp (ax + y)$.

Dimostrazione. Le prime cinque proprietà sono banali mentre per la (vi) si osservi che se $\lim y_n = y$ con $\langle x|y_n \rangle = 0$ per ogni n , allora

$$\langle x|y \rangle = \langle x|\lim y_n \rangle = \lim \langle x|y_n \rangle = 0$$

Per la (vii) si tratta semplicemente di risolvere l'equazione di primo grado in a ,

$$0 = \langle x|ax + y \rangle = \|x\|^2 a + \langle x|y \rangle$$

la quale dà

$$a = -\frac{\langle x|y \rangle}{\|x\|^2}.$$

□

Corollario 1.6.5 *Sia A un qualsiasi sottoinsieme di \mathcal{S} , il suo annihilatore A^\perp è un sottospazio di \mathcal{S} . Quindi, in particolare $A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$ è un sottospazio.*

Dimostrazione. La proprietà (iii), (iv) e (v) della proposizione precedente dimostrano che A^\perp è una varietà lineare di \mathbb{S} .

Sia $\{z_n\} \in A^\perp$, ossia per ogni n $\langle z_n | a \rangle = 0$ per ogni $a \in A$, tale che $\lim z_n = y \in \mathbb{S}$, allora per la (vi) si ha che $y \perp a$ per ogni $a \in A$ e quindi $y \in A^\perp$. \square

1.6.1 Insiemi parzialmente ordinati di sottospazi

La famiglia $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ di tutti i possibili sottoinsiemi di \mathcal{S} è un insieme *parzialmente ordinato* rispetto alla usuale inclusione insiemistica, la quale soddisfa le ovvie proprietà:

- (or-1) $A \subseteq A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ (*riflessiva*)
 (or-2) $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ implicano $A = B$ (*antisimmetrica*)
 (or-3) $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ implicano $A \subseteq C$ (*transitiva*)

L'ordine è parziale perché può accadere che per due generici sottoinsiemi A e B non sia né $A \subseteq B$ né $B \subseteq A$. In questo caso A e B si dicono *incomfrontabili* o *non comparabili*.

Se $\{A_j : j \in J\}$ è una collezione di sottoinsiemi di \mathcal{S} , un sottoinsieme M di \mathcal{S} si dice *maggiorante* sse $A_j \subseteq M$ per ogni $j \in J$. Un sottoinsieme M_0 di \mathcal{S} si dice *estremo superiore* della collezione sse M_0 è un maggiorante ed è contenuto in tutti i maggioranti di $\{A_j : j \in J\}$. L'estremo superiore di $\{A_j : j \in J\}$ viene indicato con

$$\vee \{A_j : j \in J\}$$

Esso esiste, è unico e coincide con l'unione insiemistica della collezione $\{A_j : j \in J\}$; cioè

$$(1.9a) \quad \vee \{A_j : j \in J\} = \cup \{A_j : j \in J\}$$

Si possono introdurre in maniera duale le nozioni di minorante e di estremo inferiore o massimo dei minoranti $\wedge \{A_j : j \in J\}$. In questo caso avremo

$$(1.9b) \quad \wedge \{A_j : j \in J\} = \cap \{A_j : j \in J\}$$

Un insieme parzialmente ordinato per cui esistono l'estremo superiore e l'estremo inferiore di ogni collezione di elementi scelti in esso viene detto *reticolo completo*.

Se indichiamo con $\Sigma(\mathcal{S})$ la famiglia di tutti i sottospazi di \mathcal{S} , si ha che $\Sigma(\mathcal{S})$ è ancora un insieme parzialmente ordinato rispetto all'inclusione insiemistica.

Chiaramente se $\{\mathcal{S}_j : j \in J\}$ è una qualsiasi famiglia di sottospazi di \mathcal{S} , l'intersezione insiemistica $\cap \{\mathcal{S}_j : j \in J\}$ è ancora un sottospazio di \mathcal{S} . Da ciò segue che esiste in $\Sigma(\mathcal{S})$ l'estremo superiore della famiglia $\{\mathcal{S}_j : j \in J\}$, ossia un sottospazio di \mathcal{S} che contiene tutti gli \mathcal{S}_j e che è contenuto in tutti i sottospazi contenenti gli \mathcal{S}_j . Precisamente sarà

$$(1.10a) \quad \vee \{\mathcal{S}_j : j \in J\} = \cap \{M \in \Sigma(\mathcal{S}) : \mathcal{S}_j \subseteq M \text{ per ogni } j \in J\}$$

mentre risulta banalmente che

$$(1.10b) \quad \wedge \{ \mathcal{S}_j : j \in J \} = \cap \{ \mathcal{S}_j : j \in J \}$$

Pertanto anche $\Sigma(\mathcal{S})$ è un *reticolo completo* in cui l'estremo inferiore coincide con la intersezione insiemistica, ma in cui l'estremo superiore *non* coincide con l'unione insiemistica. Per esempio, nel caso di \mathbb{R}^2 presentato in figura 1.1

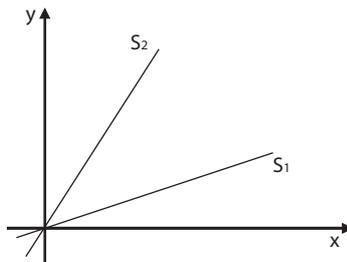


Figura 1.1: Due sottospazi 1-dimensionali in \mathbb{R}^2

avremo che

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2 &= \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\} \\ \mathcal{S}_1 \vee \mathcal{S}_2 &= \mathbb{R}^2 \neq \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \end{aligned}$$

Una caratterizzazione dell'estremo superiore è fornita dalla seguente

Proposizione 1.6.6 *Se $\{ \mathcal{S}_j : j \in J \}$ è una famiglia di sottospazi di \mathcal{S} sarà*

$$\vee_j \{ \mathcal{S}_j : j \in J \} = \overline{Sp(\cup \{ \mathcal{S}_j : j \in J \})}$$

Dimostrazione. Se M è un maggiorante di $\{ \mathcal{S}_j : j \in J \}$ avremo che $\mathcal{S}_j \subseteq M$ per ogni $j \in J$ da cui $\cup \mathcal{S}_j \subseteq M$ e quindi

$$Sp(\cup \mathcal{S}_j) \subseteq M$$

concludendo che $Sp(\cup \mathcal{S}_j) \subseteq M$. Dall'ovvia proprietà che $\mathcal{S}_j \subseteq \overline{Sp(\cup \mathcal{S}_j)}$ per ogni $j \in J$ otteniamo la tesi. \square

Da quanto visto sino ad ora possiamo introdurre l'applicazione

$$(1.11) \quad \perp : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \mapsto \Sigma(\mathcal{S}), \quad A \mapsto A^\perp$$

che ad ogni sottoinsieme A di \mathcal{S} fa corrispondere il suo annichilatore (che, in virtù del corollario 1.6.5, è un sottospazio di \mathcal{S}). Se A è un sottoinsieme di \mathcal{S} , l'annichilatore $(A^\perp)^\perp$ dell'annichilatore A^\perp di A verrà indicato con $A^{\perp\perp}$:

$$A^{\perp\perp} := (A^\perp)^\perp$$

Proposizione 1.6.7 *Se A e B sono due sottoinsiemi di \mathcal{S} varranno le proprietà*

- (oc-1) $A \subseteq A^{\perp\perp}$
- (oc-2) $A \subseteq B$ implica $B^\perp \subseteq A^\perp$
- (oc-3) $A \cap A^\perp = \{0\}$

Dimostrazione. Sia $a \in A$ allora preso un generico $y \in A^\perp$ avremo in particolare che $a \perp y$, da cui $a \in A^{\perp\perp}$. Pertanto $a \in A$ implica $a \in A^{\perp\perp}$.

Sia $A \subseteq B$ e $x \in B^\perp$, ovvero $x \perp B$, allora a maggior ragione $x \perp A$. Pertanto $x \in B^\perp$ implica $x \in A^\perp$.

Se $a \in A \cap A^\perp$ allora $\langle a|a \rangle = 0$, da cui $a = \underline{0}$. \square

Corollario 1.6.8 *L'applicazione di annichilazione soddisfa l'ulteriore proprietà:*

$$(A^{\perp\perp})^\perp = A^\perp$$

Dimostrazione. Dalla (oc-1), $A \subseteq A^{\perp\perp}$, per la (oc-2) segue che

$$(A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp$$

Inoltre applicando la (oc-1) al caso particolare di A^\perp sarà

$$A^\perp \subseteq (A^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp})^\perp$$

\square

Considerato l'insieme parzialmente ordinato $(\mathcal{P}(\mathcal{S}), \subseteq, \emptyset, \mathcal{S})$ abbiamo visto che esso è un reticolo completo avente come elemento minimo l'insieme \emptyset e come elemento massimo l'insieme \mathcal{S} . Infatti

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \mathcal{S} \quad \text{per ogni } A \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$$

Nella teoria degli insiemi parzialmente ordinati una applicazione soddisfacente le condizioni (oc-1), (oc-2) e (oc-3) viene chiamata *ortocomplementazione debole* o *intuizionista*. Facciamo osservare che rispetto a questa ortocomplementazione le seguenti tre proprietà sono equivalenti

$$\begin{array}{ll} \text{(dog-1)} & A \perp B \\ \text{(dog-2)} & A \subseteq B^\perp \\ \text{(dog-3)} & B \subseteq A^\perp \end{array}$$

Analogamente $(\Sigma(\mathcal{S}), \subseteq, \{\underline{0}\}, \mathcal{S}, \perp)$ è un reticolo completo debolmente ortocomplementato avente come elemento minimo il sottospazio banale $\{\underline{0}\}$ e come elemento massimo il sottospazio banale \mathcal{S} .

1.6.2 Ortospazi

In questa sezione studieremo una particolare famiglia di sottospazi, gli ortospazi, caratterizzata da interessanti proprietà rispetto alla relazione d'ordine parziale di inclusione insiemistica.

Proposizione 1.6.9 *Siano M_1 e M_2 due varietà lineari di \mathcal{S} tali che $M_1 \cap M_2 = \{\underline{0}\}$. Allora posto*

$$M_1 + M_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}$$

avremo che essa è una varietà lineare tale che ogni $y \in M_1 + M_2$ può essere rappresentato in maniera univoca come somma

$$y = x_1 + x_2 \quad \text{con } x_1 \in M_1 \quad \text{e } x_2 \in M_2$$

In questo caso, per evidenziare questa proprietà, useremo indicare con $M_1 \oplus M_2$ la varietà lineare $M_1 + M_2$ che verrà chiamata somma diretta di M_1 e M_2 .

Dimostrazione. Supponiamo che

$$x_1 + x_2 = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \quad \text{con} \quad x_1, \hat{x}_1 \in M_1 \quad \text{e} \quad x_2, \hat{x}_2 \in M_2$$

allora $x_1 - \hat{x}_1 = x_2 - \hat{x}_2$ con $(x_1 - \hat{x}_1) \in M_1$ e $(x_2 - \hat{x}_2) \in M_2$ ma essendo $M_1 \cap M_2 = \{\underline{0}\}$ non potrà che essere $x_1 - \hat{x}_1 = x_2 - \hat{x}_2 = \underline{0}$ da cui $x_1 = \hat{x}_1$ e $x_2 = \hat{x}_2$. \square

Se V_1 e V_2 sono due varietà lineari di \mathcal{S} tali che $V_1 \perp V_2$ allora banalmente

$$V_1 \cap V_2 = \{\underline{0}\}$$

In questo caso potremo costruire la varietà lineare $V_1 \oplus V_2$ la quale, in generale, soddisferà la condizione $V_1 \oplus V_2 \subseteq \mathcal{S}$.

Proposizione 1.6.10 *Siano V_1 e V_2 due varietà lineari di \mathcal{S} mutualmente ortogonali, $V_1 \perp V_2$, e tali che $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{S}$ allora*

- (i) $V_2 = V_1^\perp \quad \text{e} \quad V_1 = V_2^\perp$
- (ii) $V_1 = V_1^{\perp\perp} \quad \text{e} \quad V_2 = V_2^{\perp\perp}$
- (iii) V_1 e V_2 sono due sottospazi di \mathcal{S}
- (iv) $\mathcal{S} = V_1 \oplus V_1^\perp = V_2 \oplus V_2^\perp$

Dimostrazione. Dall'ipotesi $V_1 \perp V_2$ segue che $V_2 \subseteq V_1^\perp$. Sia ora $z \in V_1^\perp \subseteq \mathcal{S}$, dall'ipotesi $\mathcal{S} = V_1 \oplus V_2$ risulta $z = z_1 + z_2$ con $x_1 \in V_1$ e $x_2 \in V_2$; allora si ha

$$0 = \langle z|x_1 \rangle = \langle x_1 + x_2|x_1 \rangle = |x_1|^2$$

e perciò $x_1 = \underline{0}$. Da ciò si deduce $z = x_2 \in V_2$. Pertanto $V_1^\perp \subseteq V_2$. Ossia $V_2 = V_1^\perp$. In maniera analoga si ricava $V_1 = V_2^\perp$.

Dalla prima di queste due segue che $V_2^{\perp\perp} = V_1^\perp$ la quale, per la seconda, conduce al risultato $V_2 = V_2^{\perp\perp}$. Analogamente si dimostra che $V_1 = V_1^{\perp\perp}$. Infine, da questi ultimi risultati applicando il corollario 1.6.5, si otterrà che V_1 e V_2 sono sottospazi di \mathcal{S} .

La (ii) segue banalmente dell'ipotesi $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{S}$ e dalla (i). \square

Osservazione 1.6.11 Da quanto visto sino ad ora potremo concludere che se M è un generico sottospazio di \mathcal{S} , avremo che $M \perp M^\perp$ da cui possiamo al più dedurre che $M \oplus M^\perp \subseteq \mathcal{S}$. Anzi, come vedremo in seguito,

condizione necessaria e sufficiente affinché \mathcal{S} sia uno spazio di Hilbert è che per ogni sottospazio M si abbia $M \oplus M^\perp = \mathcal{S}$.

Potremo allora isolare quei particolari sottospazi M di \mathcal{S} per cui $M \oplus M^\perp = \mathcal{S}$ e chiamarli sottospazi ortogonali o *ortospazi*.

Definizione 1.6.12 *Un sottospazio M di \mathcal{S} si dirà ortogonale sse*

$$\mathcal{S} = M \oplus M^\perp$$

L'insieme di tutti i sottospazi ortogonali di \mathcal{S} verrà indicato con $\mathcal{E}(\mathcal{S})$. Pertanto

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}) := \{M \in \Sigma(\mathcal{S}) : M \oplus M^\perp = \mathcal{S}\}$$

Per essi valgono le proprietà

- a) Se M è un sottospazio ortogonale, dalla (ii) proposizione 1.6.10 segue immediatamente che $M = M^{\perp\perp}$.
- b) Se M è un sottospazio ortogonale allora M^\perp è pure ortogonale. Infatti:
 $M \oplus M^\perp = M^\perp \oplus M^{\perp\perp} = \mathcal{S}$.

Verifichiamo ora che la classe dei sottospazi ortogonali è non vuota in quanto tutti i sottospazi di dimensione finita sono ortogonali.

Proposizione 1.6.13 *Se M è un sottospazio finito dimensionale di \mathcal{S} allora*

$$M \oplus M^\perp = \mathcal{S}$$

Dimostrazione. Considerata una base ortogonale $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ in M sia x un generico vettore di \mathcal{S} . Posto

$$y = \sum_{i=1}^k \langle u_i | x \rangle u_i \quad \text{e} \quad z = x - y$$

avremo che per ogni $j = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} \langle u_j | z \rangle &= \left\langle u_j \left| x - \sum_{i=1}^k \langle u_i | x \rangle u_i \right. \right\rangle = \\ &= \langle u_j | x \rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_j | x \rangle \langle u_j | u_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

e perciò $z \perp M$. Quindi, per ogni $x \in \mathcal{S}$ esistono $y \in M$ e $z \in M^\perp$ tali che $x = y + z$. \square

Proposizione 1.6.14 *Se M_1 ed M_2 sono sottospazi completi di \mathcal{S} e $M_1 \perp M_2$, allora la varietà lineare $M_1 \oplus M_2$ è completa.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $M_1 \oplus M_2$: poniamo $x_n = x'_n + x''_n$ con $x'_n \in M_1$ e $x''_n \in M_2$. Dal teorema di Pitagora avremo che

$$\begin{aligned} \|x'_n - x'_m\|^2 + \|x''_n - x''_m\|^2 &= \|(x'_m - x'_n) + (x''_m - x''_n)\|^2 = \\ &= \|(x'_m + x''_m) - (x'_n + x''_n)\|^2 = \\ &= \|x_m - x_n\|^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Da ciò segue che $\{x'_n\}$ è una successione di Cauchy in M_1 e $\{x''_n\}$ è una successione di Cauchy in M_2 . Poiché M_1 e M_2 sono completi avremo che $x'_n \mapsto x' \in M_1$ e $x''_n \mapsto x'' \in M_2$ e quindi

$$\lim x_n = \lim x'_n + \lim x''_n = x' + x'' \in M_1 \oplus M_2$$

\square

Corollario 1.6.15 *Se M_1 e M_2 sono due sottospazi di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} con $M_1 \perp M_2$ allora $M_1 \oplus M_2$ è un sottospazio di \mathcal{H} .*

Dimostrazione. Se M_1 e M_2 sono sottospazi allora essi sono in particolare dei chiusi di uno spazio completo \mathcal{H} e quindi sono pure completi. Ma per il teorema precedente ciò implica che $M_1 \oplus M_2$ è un chiuso di detto spazio. \square

Capitolo 2

Esempi di Spazi con prodotto interno

2.1 Introduzione

In questo capitolo tratteremo diffusamente alcuni dei più notevoli esempi di spazio con prodotto interno. Gli spazi trattati hanno tutti la importante caratteristica di essere intensamente usati nelle applicazioni pratiche.

2.2 Esempi di spazi con prodotto interno

Esempio 2.2.1 Lo spazio lineare \mathbb{C}^n è uno spazio di Hilbert complesso e separabile relativamente al prodotto interno definito per ogni coppia di vettori appartenenti a \mathbb{C}^n

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad \underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

dalla legge:

$$\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i.$$

La norma indotta dal prodotto interno è in questo caso

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2}.$$

■

Esempio 2.2.2 Lo spazio lineare $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, a volte indicato con l_2 , costituito da tutte le successioni $\underline{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, indicate più semplicemente con $\underline{x} = (x_n)$, a valori in \mathbb{C} e di quadrato sommabile, ossia tali che $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ è una serie convergente, è uno spazio lineare complesso rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione esterna su \mathbb{K} definite nel seguente modo: Se $\alpha \in \mathbb{K}$,

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l_2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ allora

$$\begin{aligned}\underline{x} + \underline{y} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots) \\ \alpha \underline{x} &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots).\end{aligned}$$

Questo spazio lineare diventa uno spazio di Hilbert complesso e separabile rispetto al prodotto interno definito, per ogni coppia di vettori appartenenti a l_2 , dalla legge:

$$\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n.$$

La norma indotta da questo prodotto interno é espressa da

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2}.$$

■

La verifica che le definizioni ora date sono ben poste segue dal seguente Lemma.

Lemma 2.2.3 *Se $x, y \in \mathbb{K}$ sono due qualsiasi numeri complessi (o reali) allora valgono le diseguaglianze:*

$$(2.1) \quad |x| \cdot |y| \leq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$$

$$(2.2) \quad |x + y|^2 \leq 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

Dimostrazione. Dalla ovvia maggiorazione $0 \leq (|x| - |y|)^2$ segue che $0 \leq |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y|$, i.e., $2(|x| \cdot |y|) \leq |x|^2 + |y|^2$.

D'altra parte, da

$$\begin{aligned}|x + y|^2 &= (x + y) \cdot \overline{(x + y)} \\ &= x\bar{x} + y\bar{y} + x\bar{y} + y\bar{x} \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2\text{Re}(\bar{x} \cdot y) \\ &\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x \cdot y|\end{aligned}$$

Tenuto conto del risultato appena ottenuto possiamo porre la ulteriore maggiorazione $|x + y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + (|x|^2 + |y|^2)$, ovvero $|x + y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$.

□

La (2.2) implica immediatamente che la operazione di somma é ben posta. Per quanto riguarda la definizione di prodotto interno dalla (2.1) segue che

$$\sum_{n=1}^k \|\bar{x}_n y_n\| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^k \|x_n\|^2 + \sum_{n=1}^k \|y_n\|^2 \right)$$

da cui si ottiene che la serie di numeri reali non negativi

$$(2.3) \quad r_k = \sum_{n=1}^k \|\bar{x}_n y_n\|$$

è convergente, e quindi di Cauchy, in \mathbb{R}_+ . Considerata la successione di numeri complessi

$$(2.4) \quad \alpha_k = \sum_{n=1}^k \bar{x}_n y_n$$

avremo che per $h < k$

$$\begin{aligned} |\alpha_k - \alpha_h| &= |\bar{x}_{h+1} y_{h+1} + \dots + \bar{x}_k y_k| \\ &\leq |\bar{x}_{h+1} y_{h+1}| + \dots + |\bar{x}_k y_k| \\ &= \sum_{n=1}^k |\bar{x}_n y_n| - \sum_{n=1}^h |\bar{x}_n y_n| \\ &= r_k - r_h \end{aligned}$$

Dal fatto che la (2.3) è una successione di Cauchy in \mathbb{R}_+ e da questa maggiorazione segue che anche la (2.4) è di Cauchy in \mathbb{C} , ed essendo \mathbb{C} completo, che la (2.4) è convergente in \mathbb{C} : $\exists \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \bar{x}_n y_n$$

Esempio 2.2.4 Lo spazio $d_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

Indicato con $d_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ o, più brevemente, con d_2 l'insieme di tutte le successioni di numeri complessi $\underline{x} = (x_n)$ *definitivamente nulle*, ossia tali che gli elementi non nulli sono in numero finito, si verifica immediatamente che d_2 è una varietà lineare di l_2 , densa in questo spazio di Hilbert, che a sua volta si può considerare come uno spazio con prodotto interno $\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \sum \bar{x}_n y_n$. ■

Esempio 2.2.5 Lo spazio $s_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Con $s_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ o, più semplicemente, con s_2 intenderemo l'insieme di tutte le successioni di numeri complessi $\underline{x} = (x_n)$ a *rapida decrescita*, ossia tali che per un qualsiasi intero non negativo r le serie di numeri reali $\sum (n+1)^r \|x_n\|^2$ sono convergenti:

$$s_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \{ (x_n) : \sum (n+1)^r \|x_n\|^2 < +\infty \text{ per ogni } r \in \mathbb{N}_+ \}.$$

Lo spazio s_2 , munito delle usuali operazioni fra successioni, è una varietà lineare di l_2 , come si deduce dalle ovvie relazioni

$$\begin{aligned} \sum (n+1)^r \|c'_n + c''_n\|^2 &\leq 2 \left(\sum (n+1)^r \|c'_n\|^2 + \sum (n+1)^r \|c''_n\|^2 \right); \\ \sum (n+1)^r \|\alpha c_n\|^2 &= \|\alpha\|^2 \sum (n+1)^r \|c_n\|^2. \end{aligned}$$

Lo spazio s_2 è uno spazio con prodotto interno $\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \sum \bar{x}_n y_n$ contenente a sua volta lo spazio d_2 . Da quest'ultimo risultato segue che pure s_2 è una varietà lineare densa in l_2 . ■

Possiamo ora dare un esempio concreto di uno spazio di Hilbert non separabile modificando leggermente la definizione dello spazio di Hilbert $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Ricordiamo che una successione (x_n) in $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ può anche essere denotata con il simbolo di funzione $x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$. Fatta questa osservazione possiamo analizzare il seguente:

Esempio 2.2.6 Sia $l_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ soddisfacenti le due condizioni:

- i) la funzione φ assume il valore zero per tutti i punti \mathbb{R} ad eccezione di un insieme di punti al più numerabile;
- ii) la somma dei quadrati dei valori assoluti della funzione in questi punti é finita.

Entrambe queste due proprietà possono essere formalmente espresse in maniera più breve ponendo:

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} \|\varphi(x)\|^2 < +\infty.$$

In quanto segue indicheremo più semplicemente con $l_2(\mathbb{R})$ lo spazio $l_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Le usuali operazioni di somma di funzioni in $l_2(\mathbb{R})$ e di prodotto di uno scalare per una funzione in $l_2(\mathbb{R})$ danno ancora funzioni appartenenti a $l_2(\mathbb{R})$ e perciò $l_2(\mathbb{R})$ risulta essere uno spazio lineare complesso. Inoltre gli stessi ragionamenti fatti nel caso dell'esempio 2.2.2 conducono al risultato che la definizione

$$\langle \varphi | \psi \rangle := \sum_{x \in \mathbb{R}} \overline{\varphi(x)} \psi(x)$$

per ogni $\varphi \in l_2(\mathbb{R})$ e ogni $\psi \in l_2(\mathbb{R})$ é ben posta; in più essa definisce un prodotto interno su $l_2(\mathbb{R})$ rispetto al quale $l_2(\mathbb{R})$ diviene uno spazio di Hilbert. La norma indotta dal prodotto interno sarà:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\sum_{x \in \mathbb{R}} \|\varphi(x)\|^2}.$$

Consideriamo, per ogni $\nu \in \mathbb{R}$ fissato, la funzione

$$e_\nu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$

definita dalla legge

$$e_\nu(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x = \nu \\ 0 & \text{per } x \neq \nu \end{cases}$$

sarà allora $e_\nu \in l_2(\mathbb{R})$. Introdotta le sfere s_ν di centro e_ν e raggio $1/\sqrt{2}$ verifichiamo che per $\nu \neq \mu$ sarà $s_\nu \cap s_\mu = \emptyset$. Infatti se $\varphi \in s_\nu \cap s_\mu$ allora

$$\|e_\nu - e_\mu\| \leq \|e_\nu - \varphi\| + \|\varphi - e_\mu\| < 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = 2$$

mentre

$$\|e_\nu - e_\mu\| = \sqrt{\sum_{x \in \mathbb{R}} \|e_\nu(x) - e_\mu(x)\|^2} = \sqrt{2}$$

in contrasto coll'ipotesi ora assunta.

Sia ora A un sottoinsieme di $l_2(\mathbb{R})$ ovunque denso in $l_2(\mathbb{R})$. Allora ogni sfera s_ν conterrà almeno un elemento di A ed essendo queste sfere a due a due disgiunte vi saranno tanti elementi distinti in A almeno quante sono le sfere s_ν per $\nu \in \mathbb{R}$, ossia A conterrà almeno tanti punti quanti sono i punti di \mathbb{R} . Pertanto, ogni insieme denso in $l_2(\mathbb{R})$ ha almeno la cardinalità del continuo e perciò $l_2(\mathbb{R})$ non é separabile. ■

Osservazione 2.2.7 Se J è un insieme totalmente ordinato di indici, potremo considerare lo spazio di Hilbert $l_2(J, \mathbb{C})$ definito, in analogia col l'esempio 2.2.6, come lo spazio delle funzioni $\varphi : J \mapsto \mathbb{C}$, nulle su tutto J ad eccezione di al più una infinità numerabile di punti e a quadrato sommabile.

Abbiamo così visto un esempio di uno spazio con prodotto interno completo e non separabile. Daremo ora un esempio di uno spazio con prodotto interno separabile e non completo.

Esempio 2.2.8 Si consideri lo spazio lineare complesso $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, scritto più semplicemente $\mathcal{C}([a, b])$, delle funzioni definite sul compatto $[a, b]$ e a valori in \mathbb{C} . Se $\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ indicheremo con

$$u : [a, b] \mapsto \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

rispettivamente le funzioni parte reale e parte immaginaria di φ . Le funzioni u e v appartengono a $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ e perciò sono integrabili secondo Riemann. In questo caso risulta essere $\varphi = u + iv$ e si definisce

$$\int_a^b \varphi(x) dx := \left(\int_a^b u(x) dx \right) + i \left(\int_a^b v(x) dx \right)$$

Chiaramente questo integrale soddisfa le seguenti proprietà:

$$(2.5) \quad \int_a^b [\varphi(x) + \psi(x)] dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$$

$$(2.6) \quad \int_a^b \lambda \varphi(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx$$

$$(2.7) \quad \int_a^b \overline{\varphi(x)} dx = \overline{\left(\int_a^b \varphi(x) dx \right)}.$$

Inoltre se φ e $\psi \in \mathcal{C}([a, b])$ allora pure $\overline{\varphi}\psi$ e $\varphi\overline{\psi}$ sono elementi di $\mathcal{C}([a, b])$ e perciò integrabili secondo Riemann. Da tutto ciò segue che la seguente definizione è ben posta

$$\langle \varphi | \psi \rangle := \int_a^b \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$$

e che essa ha le proprietà di un prodotto interno. La norma indotta dal prodotto interno

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \|\varphi(x)\|^2 dx}$$

è la norma della *convergenza in media quadratica*. In $\mathcal{C}([a, b])$ la disuguaglianza di Schwarz assume la forma

$$\left\| \int_a^b \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx \right\| \leq \sqrt{\int_a^b \|\varphi(x)\|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \|\psi(x)\|^2 dx}.$$

Lo spazio $\mathcal{C}([a, b])$ non è completo: basterà considerare il caso di $\mathcal{C}([-1, 1])$ in cui la successione $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ definita dalla legge

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{per } -1 \leq x \leq -1/n \\ nx & \text{per } -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{per } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

é di Cauchy ma non é convergente in $\mathcal{C}([-1, 1])$. Anzi essa “converge” in media quadratica ad una funzione che non appartiene allo spazio $\mathcal{C}([-1, 1])$, precisamente alla funzione discontinua

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{per } x \in [-1, 0) \\ 1 & \text{per } x \in [0, 1] \end{cases}$$

La famiglia $\mathcal{P}([a, b])$ dei polinomi definiti su $[a, b]$ e a coefficienti complessi é densa in $\mathcal{C}([a, b])$ secondo la norma indotta dal prodotto interno, ossia secondo la convergenza in media quadratica:

$$\overline{\mathcal{P}([a, b])}^2 = \mathcal{C}([a, b]).$$

$\mathcal{C}([a, b])$ é separabile in quanto ogni elemento di $\mathcal{C}([a, b])$ é approssimabile bene quanto si vuole secondo la norma da polinomi complessi in $[a, b]$. Ma ogni polinomio complesso può essere approssimato in norma bene quanto si vuole da polinomi complessi i cui coefficienti hanno parte reale e parte immaginaria razionale. Pertanto, indicato con $\mathcal{P}_r([a, b])$ la famiglia dei polinomi di quest’ultimo tipo, avremo che ogni elemento di $\mathcal{C}([a, b])$ é approssimabile bene quanto si vuole tramite elementi di $\mathcal{P}_r([a, b])$ ossia

$$\overline{\mathcal{P}_r([a, b])}^2 = \mathcal{C}([a, b])$$

Poiché $\mathcal{P}_r([a, b])$ contiene una infinità numerabile di elementi, ne segue che $\mathcal{C}([a, b])$ é separabile. ■

Esempio 2.2.9 Se indichiamo con $\mathcal{E}(I)$ uno degli spazi lineari delle funzioni prova $\mathcal{D}(I)$ oppure $\mathcal{S}(I)$, non é difficile verificare, con considerazioni analoghe a quelle fatte nell’esempio 2.2.6, che $\mathcal{E}(I)$ é uno spazio con prodotto interno

$$\langle \varphi | \psi \rangle := \int_I \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx.$$

A questo prodotto interno é associata la norma

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_I \|\varphi(x)\|^2 dx}.$$

Ciascun $\mathcal{E}(I)$, in quanto spazio con prodotto interno, non é completo ma é separabile perché contiene la famiglia dei polinomi definiti su I a valori complessi. ■

Esempio 2.2.10 Considerato ora lo spazio lineare

$$L_2(I) = \{f : I \mapsto \mathbb{C} \mid \text{misurabili, } \int_I |f|^2 < \infty\}$$

(delle funzioni misurabili secondo Lebesgue su I e di quadrato sommabili), esso può essere munito del prodotto interno

$$\langle f | g \rangle := \int_I \bar{f}g$$

dal quale si ottiene la norma

$$\|f\| = \sqrt{\int_I \|f\|^2}.$$

Rispetto a questa norma $L_2(I)$ è completo e quindi è uno spazio di Hilbert. Ricordiamo che gli elementi di $L_2(I)$ non sono singole funzioni ma classi di equivalenza di funzioni mutuamente uguali q.d. (ossia, una classe di equivalenza è costituita da funzioni $f, g : I \mapsto \mathbb{C}$ misurabili e di quadrato sommabili tali che l'insieme dei punti di $I \setminus \{x \in I : f(x) \neq g(x)\}$ è contenuto in un insieme di misura nulla. Infine, se si caratterizza ciascuna classe di equivalenza di $L_2(I)$ tramite opportuni elementi rappresentativi, valgono le inclusioni

$$\mathcal{D}(I) \subseteq \mathcal{S}(I) \subseteq L_2(I)$$

con $\mathcal{D}(I)$ e $\mathcal{S}(I)$ entrambi densi in $L_2(I)$:

$$\overline{\mathcal{D}(I)} = \overline{\mathcal{S}(I)} = L_2(I)$$

■

Esempio 2.2.11 Prima di procedere nella presentazione del successivo esempio facciamo osservare che \mathbb{C} è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto interno, con corrispondente norma espressi dalle

$$\langle x|y \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{x}y \quad \text{e} \quad \|x\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\langle x|x \rangle_{\mathbb{C}}} = |x|.$$

Sotto queste condizioni, lo spazio di Hilbert

$$\mathbb{C}^n = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{C}\}$$

ha il prodotto interno che si scrive nella forma

$$(2.8) \quad \langle \underline{x}|\underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i|y_i \rangle_{\mathbb{C}}.$$

e quindi la norma indotta nella forma

$$(2.9) \quad \|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{\mathbb{C}}^2}$$

Considerata adesso una n-upla di spazi con prodotto interno, $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$, non necessariamente uguali fra di loro ma tutti sul medesimo corpo \mathbb{K} , si costruisca l'insieme

$$\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{S}_i := \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathcal{S}_i\}$$

Questo insieme diviene uno spazio lineare su \mathbb{K} attraverso le usuali operazioni componente per componente

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

che diviene uno spazio con prodotto interno rispetto a

$$(2.10) \quad \langle \underline{x}|\underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^n \langle x_i|y_i \rangle_{\mathcal{S}_i}.$$

la cui norma indotta è

$$(2.11) \quad \|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{\mathcal{S}_i}^2}$$

Lo spazio con prodotto interno così costruito

$$\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{S}_i$$

si chiama spazio *somma diretta finita* degli spazi \mathcal{S}_i ; nel caso in cui tali spazi siano tutti uguali fra di loro, $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}$, indicheremo la somma diretta finita n-volte di \mathcal{S} col simbolo

$$\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{S} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{S}^n.$$

Colle stesse tecniche usate per dimostrare la completezza di \mathbb{C}^n si può dimostrare che nel caso in cui tutti gli spazi in questione siano di Hilbert, $\mathcal{S}_i = \mathcal{H}_i$, allora anche la somma diretta finita

$$\sum_{i=1}^n \oplus \mathcal{H}_i$$

è uno spazio di Hilbert. Ovviamente

$$\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^n \oplus \mathbb{C}.$$

Il caso particolare dello spazio somma diretta finita n-volte dello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$

$$\sum_{i=1}^n \oplus L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$$

consiste nei vettori del tipo

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

con le funzioni $f_i : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{C}$ (per $i = 1, 2, \dots, n$) soddisfacenti la condizione:

$$(2.12) \quad f_i \in L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}).$$

Questo spazio è uno spazio lineare complesso rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per scalari complessi definite dalle formule:

$$\begin{aligned} (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})) + (g_1(\underline{x}), \dots, g_n(\underline{x})) &:= \\ = ((f_1) + (g_1))(\underline{x}), \dots, ((f_n) + (g_n))(\underline{x}) \\ \alpha(f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})) &:= ((\alpha f_1)(\underline{x}), \dots, (\alpha f_n)(\underline{x})). \end{aligned}$$

Mentre il prodotto interno è dato da

$$(2.13) \quad \langle \underline{f} | \underline{g} \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^k} \bar{f}_i g_i$$

con associata la norma indotta

$$(2.14) \quad \|\underline{f}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^k} \|f_i\|^2}.$$

Nel caso in cui $k = 3$, questi spazi di Hilbert vengono usati in Meccanica Quantistica per descrivere le particelle dotate di spin s . Precisamente:

- Il caso $n = 2$ descrive particelle di spin $s = 1/2$; in questo caso ogni \underline{f} possiede due componenti che vengono indicate con

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_{1/2}(\underline{x}), f_{-1/2}(\underline{x}))$$

- Il caso $n = 3$ descrive particelle di spin $s = 1$ e ogni \underline{f} consiste di tre componenti indicate con

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_0(\underline{x}), f_{-1}(\underline{x})).$$

- Il caso $n = 4$ descrive particelle di spin $s = 3/2$ e ogni \underline{f} consiste di quattro componenti indicate con

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_{3/2}(\underline{x}), f_{1/2}(\underline{x}), f_{-1/2}(\underline{x}), f_{-3/2}(\underline{x})).$$

- Il caso $n = 5$ descrive particelle di spin $s = 2$ e ogni \underline{f} consiste di cinque componenti

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_2(\underline{x}), f_1(\underline{x}), f_0(\underline{x}), f_{-1}(\underline{x}), f_{-2}(\underline{x}));$$

e così via. ■

Esempio 2.2.12 Vogliamo dare alcune interessanti generalizzazioni dello spazio di Hilbert $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. In primo luogo ricordiamo che, come abbiamo visto nel precedente esempio, \mathbb{C} è uno spazio di Hilbert il cui prodotto interno e la cui norma sono espresse rispettivamente da:

$$\langle x|y \rangle_{\mathbb{C}} = \bar{x}y \quad \text{e} \quad \|x\|_{\mathbb{C}} = \|x\|.$$

Pertanto potremo porre

$$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) := \left\{ \underline{x} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathbb{C}}^2 < +\infty \right\}$$

e indicare il prodotto interno di $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ sotto la forma

$$(2.15) \quad \langle \underline{x}|\underline{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n|y_n \rangle_{\mathbb{C}}$$

e la norma indotta sotto la forma

$$(2.16) \quad \|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\mathbb{C}}^2}.$$

Fatte queste premesse, si consideri uno spazio con prodotto interno qualsiasi S , il cui prodotto interno e la cui norma siano indicate rispettivamente con

$$\langle x|y \rangle_S \quad \text{e} \quad \|x\|_S = \sqrt{\langle x|x \rangle_S}.$$

Possiamo introdurre l'insieme

$$l_2(\mathbb{N}, S) := \left\{ \underline{x} : \mathbb{N} \mapsto S \mid \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_S^2 < +\infty \right\}$$

delle successioni a valori in S e a quadrato sommabili e, con le stesse tecniche usate nel caso dello spazio $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, si può verificare che esso è uno spazio lineare, rispetto alle ovvie operazioni, su cui si può definire il prodotto interno

$$(2.17) \quad \langle \underline{x}|\underline{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n|y_n \rangle_S$$

dal quale si ricava la norma

$$(2.18) \quad \|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_S^2}.$$

Inoltre se S è uno spazio di Hilbert ($S = \mathcal{H}$) la stessa dimostrazione usata nel caso di $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ permette di verificare che $l_2(\mathbb{N}, \mathcal{H})$ è completo, ossia è uno spazio di Hilbert.

Una ulteriore generalizzazione di questo procedimento che, per ciò che riguarda le dimostrazioni, non si discosta da quanto visto nel caso $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ è la seguente. Si consideri una successione $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ di spazi con prodotto interno e con corrispondente norma espressi rispettivamente da

$$\langle x|y \rangle_{S_n} \quad \text{e} \quad \|x\|_{S_n} = \sqrt{\langle x|x \rangle_{S_n}}.$$

Si definisce *somma diretta* degli spazi S_n , indicata con il simbolo $\sum^{\oplus} S_n$, l'insieme

$$\sum^{\oplus} S_n := \left\{ \{x_n : n \in \mathbb{N}, x_n \in S_n\} : \sum \|x_n\|_{S_n}^2 < +\infty \right\}$$

munito delle ovvie operazioni di somma e di prodotto per uno scalare

$$\begin{aligned} \{x_n\} + \{y_n\} &:= \{x_n + y_n\} \\ \lambda \{x_n\} &:= \{\lambda x_n\}. \end{aligned}$$

Rispetto a queste operazioni $\sum^{\oplus} S_n$ è uno spazio lineare che diviene uno spazio con prodotto interno

$$(\Sigma-1) \quad \langle \{x_n\} | \{y_n\} \rangle := \sum \langle x_n | y_n \rangle_{S_n}$$

da cui si ricava la norma

$$(\Sigma-2) \quad \|\{x_n\}\| = \sqrt{\sum \|x_n\|_{S_n}^2}.$$

Ovviamente se tutti gli spazi S_n sono di Hilbert ($S_n = \mathcal{H}_n$) la loro somma diretta $\sum^{\oplus} \mathcal{H}_n$ è pure uno spazio di Hilbert. Si osservi che $l_2(\mathbb{N}, S) = \sum^{\oplus} S_n$ con ogni $S_n = S$. ■

Esempio 2.2.13 In questo esempio vogliamo analizzare una interessante analogia. Prima però di introdurre questo esempio dobbiamo premettere alcune considerazioni. In questo esempio indicheremo con $[0, k]_{\mathbb{N}}$ la totalità dei numeri interi compresi fra 0 e k e con $[0, \infty]_{\mathbb{N}}$ l'insieme di tutti gli interi non negativi.

Il generico elemento dello spazio di Hilbert \mathbb{C}^{k+1} sarà perciò identificabile con una funzione

$$(a) \quad x : [0, k]_{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{C}, n \mapsto x(n);$$

il prodotto interno su \mathbb{C}^{k+1} sarà esprimibile come

$$(1-a) \quad \langle x|y \rangle = \sum_{n=0}^k \overline{x(n)} y(n)$$

la norma ottenuta da questo prodotto interno come

$$(2-a) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{n=0}^k \|x(n)\|^2}.$$

Nel caso dello spazio di Hilbert \mathbb{C}^{k+1} , la (1-a) o la (2-a) non pongono alcun problema di convergenza. Ciò non accade nel caso dello spazio di Hilbert l_2 i cui elementi possono essere considerati come funzioni

$$(b) \quad x : [0, \infty]_{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{C}, n \mapsto x(n)$$

tali da soddisfare le condizioni:

(i-b) per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono le somme $\sum_{n=0}^k \|x(n)\|^2$;

(ii-b) esiste $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \|x(n)\|^2 < +\infty$.

In questo caso si pone per definizione

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k |x(n)|^2 .$$

Sotto queste condizioni, sono ben poste la definizione di prodotto interno

$$(1-b) \quad \langle x|y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x(n)} y(n)$$

e la conseguente nozione di norma

$$(2-b) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \|x(n)\|^2} .$$

In un certo qual modo lo spazio $\mathcal{C}([0, b])$ può essere messo in analogia con \mathbb{C}^{k+1} nel senso che il generico elemento di tale spazio è una funzione continua

$$(a') \quad \varphi : [0, b] \mapsto \mathbb{C}, x \rightarrow \varphi(x) .$$

Il prodotto interno su $\mathcal{C}([0, b])$ è definito da

$$(1-a') \quad \langle \varphi|\psi \rangle := \int_0^b \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$$

cui è associata la norma indotta

$$(2-a') \quad \|\varphi\| = \sqrt{\int_0^b \|\varphi(x)\|^2 dx} .$$

Le analogie con le corrispondenti relazioni (a), (1-a) e (2-a) viste nel caso dello spazio \mathbb{C}^{k+1} sono evidenti. Si tratta di sostituire formalmente al parametro “discreto n il parametro “continuo x e al simbolo di \sum quello di $\int dx$.

Vediamo ora come si possa introdurre l’analogo di l_2 . A questo proposito ricordiamo che una funzione continua

$$(b') \quad \varphi : [0, \infty] \mapsto \mathbb{C}, x \rightarrow \varphi(x)$$

si dice *impropriamente a quadrato integrabile* secondo Riemann se soddisfa le condizioni:

(i-b') per ogni $b \in [0, \infty]$ esistono gli integrali (secondo Riemann) $\int_0^b \|\varphi(x)\|^2 dx$;

(ii-b') esiste $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \|\varphi(x)\|^2 dx$.

In questo caso si usa porre per definizione

$$\int_0^{\infty} \|\varphi(x)\|^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \|\varphi(x)\|^2 dx .$$

Indicato con $L_2\mathcal{C}([0, \infty])$ l’insieme delle funzioni continue a quadrato integrabile su $[0, \infty]$ si verifica facilmente che, rispetto alle usuali operazioni fra funzioni, $L_2\mathcal{C}([0, \infty])$ è uno spazio lineare complesso su cui è definibile il prodotto interno

$$(1-b') \quad \langle \varphi | \psi \rangle := \int_0^\infty \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$$

con associata la norma indotta

$$(2-b') \quad \|\varphi\| = \sqrt{\int_0^\infty \|\varphi(x)\|^2 dx}.$$

Abbiamo così visto che $L_2\mathcal{C}([0, \infty])$ possiede proprietà (b'), (2.2.13), (2.2.13), (1-b'), e (2-b'), analoghe alle corrispondenti proprietà (b), (2.2.13), (2.2.13), (1-b) e (2-b) di l_2 . Si può passare formalmente da un caso all'altro sostituendo i parametri "discreti n con quelli "continui x e le \sum con gli $\int dx$.

Bisogna però osservare che mentre \mathbb{C}^{k+1} e l_2 sono completi in norma, gli spazi $\mathcal{C}([0, b])$ e $L_2\mathcal{C}([0, \infty])$ non sono completi.

In analogia con $L_2\mathcal{C}([0, \infty])$ si può introdurre lo spazio $L_2\mathcal{C}([-\infty, 0])$ e definire

$$\int_{-\infty}^0 \|\varphi(x)\|^2 dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \|\varphi(x)\|^2 dx.$$

Lo spazio $L_2\mathcal{C}([-\infty, \infty])$ richiede qualche considerazione ulteriore. Diremo che $\varphi : [-\infty, \infty] \mapsto \mathbb{C}$ continua appartiene a $L_2\mathcal{C}([-\infty, \infty])$ o, più semplicemente, a $L_2\mathcal{C}(\mathbb{R})$, sse esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi|_{[-\infty, a]} \in L_2\mathcal{C}([-\infty, a]) \quad \text{e} \quad \varphi|_{[a, +\infty]} \in L_2\mathcal{C}([a, +\infty]).$$

In questo caso porremo

$$\int_{-\infty}^\infty \|\varphi(x)\|^2 dx = \int_{-\infty}^a \|\varphi(x)\|^2 dx + \int_a^\infty \|\varphi(x)\|^2 dx.$$

Non é difficile verificare che

$$\langle \varphi | \psi \rangle := \int_{-\infty}^\infty \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$$

definisce un prodotto interno su $L_2\mathcal{C}(\mathbb{R})$ da cui si ricava la norma

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \|\varphi(x)\|^2 dx}.$$

Ovviamente, pure $L_2\mathcal{C}([-\infty, 0])$ e $L_2\mathcal{C}(\mathbb{R})$ sono spazi con prodotto interno non completi in norma. ■

Capitolo 3

Sistemi ortonormali completi

3.1 Introduzione

In questo capitolo studieremo la possibilità di esprimere i vettori degli spazi con prodotto interno come combinazioni lineari infinite di opportune basi i cui vettori sono tutti di norma uno e a due a due ortogonali (o basi ortonormali).

In particolare, si dimostrerà che per gli spazi separabili esiste sempre una base ortonormale di questo tipo e che tutte le basi ortonormali hanno la medesima cardinalità, chiamata dimensione ortonormale dello spazio.

La nozione di ortogonalità è stata già introdotta nel capitolo

3.2 Sistemi ortonormali di vettori

In questo paragrafo introdurremo gli elementi teorici essenziali per giungere alla definizione di *base ortonormale* in spazi con prodotto interno.

Definizione 3.2.1 *Sia A un insieme totalmente ordinato di indici, finito o infinito, anche non numerabile. Un insieme $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ di elementi di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} si dirà sistema ortogonale sse $\langle u_\alpha | u_{\alpha'} \rangle = 0$ per $\alpha \neq \alpha'$. Un sistema ortogonale si dirà ortonormale sse $\|u_\alpha\| = 1$ per ogni $\alpha \in A$. Chiaramente $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ è un sistema ortonormale sse*

$$(3.1) \quad \langle u_\alpha | u_{\alpha'} \rangle = \delta_{\alpha, \alpha'} .$$

Esempio 3.2.2 Nello spazio di Hilbert l_2 l'insieme numerabile

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

é un sistema ortonormale. ■

Proposizione 3.2.3 In uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} valgono le seguenti proprietà:

- (i) un sistema ortogonale é una famiglia libera di vettori sse non contiene il vettore nullo;
- (ii) un sistema ortonormale é sempre una famiglia libera;
- (iii) se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ é un sistema ortogonale libero allora

$$\left\{ \frac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|} : \alpha \in A \right\}$$

é un sistema ortonormale.

Dimostrazione. (i) Se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ é una famiglia libera allora certamente il vettore nullo non può appartenere ad essa.

Viceversa, se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ é un sistema ortogonale non contenente il vettore nullo, considerata l'equazione nelle indeterminate λ_{α_i}

$$\sum_{\alpha_i \in I} \lambda_{\alpha_i} u_{\alpha_i} = \underline{0},$$

ove con I si é indicato un qualsiasi sottoinsieme finito di A , avremo che per ogni $\alpha_j \in I$ sar :

$$0 = \langle u_{\alpha_j} | \underline{0} \rangle = \left\langle u_{\alpha_j} \left| \sum_{\alpha_i \in I} \lambda_{\alpha_i} u_{\alpha_i} \right. \right\rangle = \sum_{\alpha_i \in I} \lambda_{\alpha_i} \langle u_{\alpha_j} | u_{\alpha_i} \rangle$$

da cui $0 = \lambda_{\alpha_j} \|u_{\alpha_j}\|^2$ per ogni $\alpha_j \in I$. Dal fatto che il vettore nullo non appartiene al sistema ortonormale segue che ogni $\|u_{\alpha_j}\| \neq 0$ e quindi $\lambda_{\alpha_j} = 0$ per ogni $\alpha_j \in I$.

Le (ii) e (iii) sono banali conseguenze della (i). □

Definizione 3.2.4 Sia $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un sistema ortonormale di vettori di \mathcal{S} e x un elemento di \mathcal{S} . Si chiamano coefficienti di Fourier di x rispetto al sistema ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ i numeri complessi $\langle u_\alpha | x \rangle$, per ogni $\alpha \in A$.

Teorema 3.2.5 In uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} , se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ é un sistema ortonormale qualsiasi, valgono le proprietà:

(i) per ogni $x \in \mathcal{S}$ si ha che $\langle u_\alpha | x \rangle = 0$ salvo al più per una infinità numerabile di indici, dipendente in generale da x .

$$(ii) \sum_{\alpha \in A} |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in \mathcal{S}. \quad (\text{Diseguaglianza di Bessel})$$

Dimostrazione. Verifichiamo in primo luogo che se $\{u_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ é un sistema ortonormale finito allora

$$\sum_{i=1}^n |\langle u_i | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{S}.$$

Da

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \sum_{i=1}^n \langle u_i | x \rangle u_i\|^2 = \\ &= \left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle u_i | x \rangle u_i \left| x - \sum_{j=1}^n \langle u_j | x \rangle u_j \right. \right\rangle = \\ &= \langle x | x \rangle - \sum_{j=1}^n \langle u_j | x \rangle \langle x | u_j \rangle - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \overline{\langle u_i | x \rangle} \langle u_i | x \rangle - \sum_{i,j} \overline{\langle u_i | x \rangle} \langle u_j | x \rangle \langle u_i | u_j \rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle u_i | x \rangle|^2 \end{aligned}$$

segue la relazione cercata.

Fissato un intero positivo n , siano

$$F = \{ |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 : |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 \neq 0 \}$$

$$F_n = \{ |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 : 1/n \leq |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 \}$$

Chiaramente

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

e verifichiamo che F_n possiede al più $n\|x\|^2$ elementi. Infatti, se

$\{ |\langle u_{\alpha_j} | x \rangle|^2 : j = 1, 2, \dots, k \}$ é un qualsiasi insieme finito di elementi di F_n , avremo che

$$1/n \leq |\langle u_{\alpha_j} | x \rangle|^2$$

da cui segue

$$\frac{k}{n} \leq \sum_{j=1}^k |\langle u_{\alpha_j} | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

e perciò $k \leq n\|x\|^2$. Ossia ogni sottoinsieme finito estratto da F_n non può contenere più di $n\|x\|^2$ elementi e perciò F_n non può contenere né infiniti elementi (altrimenti sarebbe possibile estrarne più di $n\|x\|^2$) né un numero di elementi finito e maggiore di $n\|x\|^2$. Da ciò segue che F è al più infinito numerabile.

La (ii) risulta essere una conseguenza immediata di quanto ora dimostrato e della disuguaglianza di Bessel per un numero finito di elementi. \square

Esempio 3.2.6 Per quanto visto nel teorema precedente, preso un fissato $x \in \mathcal{S}$, l'insieme di indici

$$A(x) := \{\alpha \in A : \langle u_\alpha | x \rangle \neq 0\}$$

è al più infinito numerabile e dipende dalla scelta di x . Per esempio, se consideriamo lo spazio di Hilbert non separabile $l_2(\mathbb{R})$ è facile verificare che la famiglia $\{e_\nu : \nu \in \mathbb{R}\}$, ove $e_\nu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ è definito dalla legge

$$e_\nu(x) := \begin{cases} 1, & x = \nu \\ 0, & x \neq \nu \end{cases}$$

è un sistema ortonormale.

Preso $\varphi \in l_2(\mathbb{R})$, sia $\mathbb{R}(\varphi) := \{\nu \in \mathbb{R} : \varphi(\nu) \neq 0\}$. Per come è stato definito $l_2(\mathbb{R})$ sappiamo che $\mathbb{R}(\varphi)$ è al più infinito numerabile e tale che

$$\sum_{\nu \in \mathbb{R}(\varphi)} |\varphi(\nu)|^2 < +\infty.$$

Se consideriamo i coefficienti di Fourier $\{\langle e_\nu | \varphi \rangle : \nu \in \mathbb{R}\}$ di φ rispetto al sistema ortogonale $\{e_\nu : \nu \in \mathbb{R}\}$ si ottiene che

$$\langle e_\nu | \varphi \rangle = \sum e_\nu(x) \varphi(x) = \varphi(\nu)$$

e quindi

$$\mathbb{R}(\varphi) = \{\nu \in \mathbb{R} : \varphi(\nu) \neq 0\} = \{\nu \in \mathbb{R} : \langle e_\nu | \varphi \rangle \neq 0\}.$$

■

Proposizione 3.2.7 *Se \mathcal{S} è separabile tutti i sistemi ortonormali di tale spazio sono al più infinito numerabile.*

Dimostrazione. Se \mathcal{S} è separabile esiste un suo sottoinsieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ al più infinito numerabile e denso in \mathcal{S} . Sia ora $\{u_\alpha\}$ un sistema ortonormale in \mathcal{S} e consideriamo le sfere $s_{1/2}(u_\alpha)$ di centro u_α e raggio $1/2$. Queste sfere sono disgiunte per $\alpha_1 \neq \alpha_2$ in quanto

$$\|u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2}\| = \sqrt{\langle u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2} | u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2} \rangle} = \sqrt{2}$$

Siccome i vari u_α sono elementi di \mathcal{S} e $\{x_n\}$ è denso in \mathcal{S} , ogni sfera $s_{1/2}(u_\alpha)$ contiene almeno un elemento di $\{x_n\}$ e due sfere di centro diverso, $u_{\alpha_1} \neq u_{\alpha_2}$, non hanno punti in comune. Da ciò segue che l'insieme di queste sfere, e perciò l'insieme $\{u_\alpha\}$, contiene al più una infinità numerabile di elementi. \square

3.3 Sistemi ortonormali completi

Considerato lo spazio di Hilbert separabile \mathbb{C}^n sia $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un suo sistema ortonormale. Dalla (ii), proposizione 3.2.3, segue che $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una famiglia libera costituita da n vettori e perciò essa è una base lineare. Preso, allora, un qualsiasi $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ avremo che

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$$

dove i coefficienti γ_i sono univocamente determinati. Dalla relazione precedente segue che per ogni $j = 1, 2, \dots, n$

$$\langle e_j | \underline{x} \rangle = \gamma_j$$

e perciò \underline{x} si esprime univocamente rispetto alla base $\{e_i\}$ secondo la combinazione lineare

$$(3.2) \quad \underline{x} = \sum_{i=1}^n \langle e_i | \underline{x} \rangle e_i$$

coinvolgente i coefficienti di Fourier $\langle e_i | \underline{x} \rangle$ del vettore \underline{x} rispetto al sistema ortonormale $\{e_i\}$.

Se avessimo scelto in \mathbb{C}^n un sistema ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ costituito da un numero di elementi k strettamente minore di n , avremmo potuto calcolare comunque i coefficienti di Fourier $\langle e_i | \underline{x} \rangle$ per ogni vettore $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ e individuare il vettore

$$\hat{\underline{x}} = \sum_{i=1}^k \langle e_i | \underline{x} \rangle e_i$$

il quale, in generale, è diverso da \underline{x} .

Esempio 3.3.1 In \mathbb{C}^3 , scelto il sistema ortonormale $\{e_1, e_2\}$ con $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 0, 1)$, preso il vettore $\underline{x} = (i, \pi, -3i)$ sarà

$$\langle e_1 | \underline{x} \rangle = i \quad \langle e_2 | \underline{x} \rangle = -3i$$

e perciò

$$\hat{\underline{x}} = \langle e_1 | \underline{x} \rangle e_1 + \langle e_2 | \underline{x} \rangle e_2 = (i, 0, -3i)$$

ottenendo in questo caso un vettore $\hat{\underline{x}} \neq \underline{x}$.

In ogni caso, il vettore $(\underline{x} - \hat{\underline{x}})$ è ortogonale a e_1 e e_2 e quindi alla varietà lineare (e perciò al sottospazio) generato da $\{e_1, e_2\}$. ■

Sia ora \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno e $\{u_\alpha\}$ un suo sistema ortonormale. Fissato un qualsiasi vettore $x \in \mathcal{S}$ potremo considerare la corrispondente successione dei coefficienti di Fourier $\{\langle u_\alpha | x \rangle\}$ che per quanto visto nel teorema 2.1 sono tutti nulli ad eccezione di un insieme al più numerabile di elementi. Nel seguito la scrittura

$$\sum_{\alpha} \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

significherà che i coefficienti $\langle u_\alpha | x \rangle$ sono nulli ad eccezione al più di una infinità numerabile di elementi e che si prenderà in esame la corrispondente serie in \mathcal{S} , che potrà essere convergente oppure no.

Viene allora naturale chiedersi se la serie

$$(3.3) \quad \sum_{\alpha} \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}$$

analoga alla (3.2), é convergente in \mathcal{S} secondo la norma e, nel caso di risposta affermativa, indicato con

$$\hat{x} = \sum_{\alpha} \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}$$

il vettore limite della serie, verificare sotto quali condizioni é assicurato che $x = \hat{x}$, ossia che

$$x = \sum_{\alpha} \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}.$$

In generale, nulla ci assicura che la serie (3.3) sia convergente in \mathcal{S} . In questo modulo dimostreremo però che

- (A) Se \mathcal{S} é uno spazio separabile esiste sempre almeno un sistema ortonormale $\{u_n\}$ tale che per ogni $x \in \mathcal{S}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_n$$

sia convergente ed in più si abbia

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_n.$$

- (B) Tutti i sistemi ortogonali soddisfacenti la (A) hanno la medesima cardinalità.

Prima di raggiungere questi obiettivi premettiamo alcuni risultati. In primo luogo, indicheremo con

$$(3.4) \quad \vee\{u_{\alpha}\} = \overline{Sp(\{u_{\alpha}\})}$$

la chiusura della varietà lineare generata da $\{u_{\alpha}\}$. Ricordiamo che $\vee\{u_{\alpha}\}$ é un sottospazio di \mathcal{S} .

Proposizione 3.3.2 *Sia $\{u_n\}$ un sistema ortonormale in \mathcal{S} al più infinito numerabile e $\{\alpha_n\}$ una corrispondente successione di numeri complessi. Costruite le somme parziali*

$$s_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n$$

per ogni fissato vettore x dello spazio \mathcal{S} avremo che:

- (i) $\|x - s_k\|$ assume il suo valore minimo al variare della successione $\{\alpha_n\}$ sse $\alpha_n = \langle u_n | x \rangle$ per $n = 1, 2, \dots, k$. In questo caso si ottiene

$$(3.5) \quad \left\| x - \sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle u_n | x \rangle|^2;$$

(ii) l'elemento $(x - s_k) \perp \vee \{u_1, \dots, u_k\}$ sse $\alpha_n = \langle u_n | x \rangle$ per $n = 1, 2, \dots, k$.

Dimostrazione. (i) Tramite facili calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} \|x - s_k\|^2 &= \left\langle x - \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n \left| x - \sum_{m=1}^k \alpha_m u_m \right. \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k \alpha_n \langle x | u_n \rangle - \sum_{n=1}^k \bar{\alpha}_n \langle u_n | x \rangle + \sum_{n=1}^k \bar{\alpha}_n \alpha_n. \end{aligned}$$

Ora, considerato che

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \langle u_n | x \rangle|^2 &= (\alpha_n - \langle u_n | x \rangle) (\bar{\alpha}_n - \overline{\langle u_n | x \rangle}) = \\ &= |\alpha_n|^2 - \bar{\alpha}_n \langle u_n | x \rangle - \alpha_n \langle x | u_n \rangle + |\langle u_n | x \rangle|^2 \end{aligned}$$

avremo che

$$\|x - s_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle u_n | x \rangle|^2 + \sum_{n=1}^k |\alpha_n - \langle u_n | x \rangle|^2.$$

Da questo risultato, osservando che il primo e il secondo termine del secondo membro non dipendono dalla scelta di $\{\alpha_n\}$ e che il terzo termine dà sempre un contributo positivo alla somma, otteniamo che al variare di $\{\alpha_n\}$ la quantità $\|x - s_k\|$ assume il valore minimo sse

$$\alpha_n = \langle u_n | x \rangle \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, k.$$

(ii) D'altra parte, indicato con y il generico elemento di $\vee \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ se $0 = \langle x - s_k | y \rangle$ per ogni $y \in \vee \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ avremo che in particolare $0 = \langle x - s_k | u_j \rangle$ per $j = 1, 2, \dots, k$. Da ciò segue che

$$0 = \left\langle x - \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n \left| u_j \right. \right\rangle = \langle x | u_j \rangle - \sum_{n=1}^k \bar{\alpha}_n \langle u_n | u_j \rangle = \langle x | u_j \rangle - \bar{\alpha}_j$$

e quindi $\alpha_j = \langle u_j | x \rangle$ per $j = 1, 2, \dots, k$.

Viceversa, se $\alpha_n = \langle u_n | x \rangle$ per $n = 1, 2, \dots, k$ allora indicato il generico elemento di $Sp\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ con

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^k \beta_j u_j$$

avremo che

$$\begin{aligned} \left\langle x - \sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n \left| \hat{y} \right. \right\rangle &= \left\langle x - \sum_n \langle u_n | x \rangle u_n \left| \sum_j \beta_j u_j \right. \right\rangle = \\ &= \sum_j \beta_j \langle x | u_j \rangle - \sum_{nj} \overline{\langle u_n | x \rangle} \beta_j \langle u_n | u_j \rangle = \\ &= \sum_j \beta_j \langle x | u_j \rangle - \sum_j \beta_j \langle x | u_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto che l'ipotesi

$$\alpha_n = \langle u_n | x \rangle \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, k$$

implica che

$$(x - s_k) \perp Sp\{u_1, u_2, \dots, u_k\}.$$

Considerato ora $y \in \vee\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, avremo che esiste una successione

$$\{\hat{y}_j\} \subseteq Sp\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$$

tale che $y = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{y}_j$. Pertanto

$$\langle x - s_k | y \rangle = \langle x - s_k | \lim \hat{y}_j \rangle = \lim \langle x - s_k | \hat{y}_j \rangle = 0$$

per ogni $y \in \vee\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. □

Osservazione 3.3.3 Se il sistema ortonormale che interviene sulla precedente proposizione 3.3.2 è infinito numerabile, potremo costruire la successione delle somme parziali

$$s_1, s_2, \dots, s_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n u_n, \dots$$

Se invece il sistema ortonormale in questione è finito, $\{u_1, u_2, \dots, u_h\}$, considereremo ancora la successione delle somme parziali

$$s_1, s_2, \dots, s_h, s_{h+1}, \dots, s_k, \dots$$

ove si assume che

$$s_j = \sum_{n=1}^j \alpha_n u_n \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, h$$

$$s_h = s_{h+1} = \dots = s_k = 0 \quad \text{per } k \geq h.$$

Teorema 3.3.4 Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno e $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un sistema ortonormale, allora le seguenti proposizioni sono fra loro equivalenti:

(i) $\vee\{u_\alpha\} = \mathcal{S}$ (completo)

(ii) per ogni $x \in \mathcal{S}$ la serie $\sum_\alpha \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$ è convergente in \mathcal{S} ed è

$$x = \sum_\alpha \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

(basico)

(iii) per ogni coppia x, y di elementi di \mathcal{S} si ha

$$\langle x | y \rangle = \sum_\alpha \langle x | u_\alpha \rangle \langle u_\alpha | y \rangle$$

(uguaglianza di Parseval)

(iv) per ogni $x \in \mathcal{S}$ vale l'uguaglianza (di Parseval)

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle u_{\alpha} | x \rangle|^2$$

(chiuso)

Dimostrazione. Daremo la dimostrazione nel caso di uno spazio separabile, con lievi modifiche essa può essere adattata al caso generale

(i) \Rightarrow (ii). Supponiamo sia vera la (i), allora, fissato $x \in \mathcal{S}$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un elemento

$$\sum_{n=1}^{k_0} \alpha_n u_n \in Sp\{u_n\}$$

tale che

$$\|x - \sum_{n=1}^{k_0} \alpha_n u_n\| < \epsilon.$$

Ma allora dalla (i) proposizione 3.3.2 avremo che a maggior ragione dovrà essere

$$\|x - \sum_{n=1}^{k_0} \langle u_n | x \rangle u_n\| < \epsilon.$$

Sia allora $k \geq k_0$, dalla (3.5) avremo che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^k |\langle u_n | x \rangle|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k_0} |\langle u_n | x \rangle|^2 - \sum_{n=k_0+1}^k |\langle u_n | x \rangle|^2 = \\ &= \|x - \sum_{n=1}^{k_0} \langle u_n | x \rangle u_n\|^2 - \sum_{n=k_0+1}^k |\langle u_n | x \rangle|^2 \\ &< \epsilon^2 - \sum_{n=k_0+1}^k |\langle u_n | x \rangle|^2 \end{aligned}$$

e, perciò, per ogni $\epsilon > 0$ esiste k_0 tale che ogni $k > k_0$ risulta essere

$$\|x - \sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n\| < \epsilon$$

ossia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_n = x.$$

(ii) \Rightarrow (iii). Se é vera la (ii), posto

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_n \quad \text{e} \quad y = \sum_{m=1}^{\infty} \langle u_m | y \rangle u_m$$

avremo che

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_n \mid \sum_{m=1}^{\infty} \langle u_m | y \rangle u_m \right\rangle = \\ &= \sum_{n,m} \overline{\langle u_n | x \rangle} \langle u_m | y \rangle \langle u_n | u_m \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x | u_n \rangle \langle u_n | y \rangle . \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (iv). La (iv) é una banale conseguenza della (iii) qualora si ponga in quest'ultima $y = x$.

(iv) \Rightarrow (i). Supposto che la (iv) sia vera, dalla 1.6.4 proposizione (i) che

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n \right)$$

per ogni $x \in \mathcal{S}$ e perciò, essendo

$$\sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n \in Sp\{u_n\}$$

sarà $\mathcal{S} = \vee\{u_n\}$.

□

Definizione 3.3.5 Diremo che un sistema ortonormale é completo (SONC) sse soddisfa ad una, e quindi a tutte, le condizioni del teorema precedente.

Se $\{u_\alpha\}$ é un SONC, per la (ii), teorema 3.3.4, ogni elemento $x \in \mathcal{S}$ si potrà esprimere come combinazione lineare infinita

$$(3.6) \quad x = \sum_{\alpha} \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

chiamata *sviluppo in serie di Fourier* di x rispetto al SONC $\{u_\alpha\}$. Per questo motivo, i SONC vengono anche chiamati *basi ortonormali*.

Esempio 3.3.6 In \mathbb{K}^n il sistema ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$, ove

$$e_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kk}, \dots, \delta_{kn}) = (\delta_{kj} : j = 1, 2, \dots, n)$$

é completo in quanto ogni elemento $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ é esprimibile nel seguente modo

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^n \langle e_k | \underline{x} \rangle e_k .$$

Pertanto, la base canonica di \mathbb{K}^n é un SONC, ossia é una base ortonormale.

Analogamente, in l_2 il sistema ortonormale $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, ove

$$e_n = (\delta_{n1}, \delta_{n2}, \dots, \delta_{nn}, \dots) = (\delta_{nj} : j \in \mathbb{N})$$

é completo. Pertanto l_2 ammette una base ortonormale infinita numerabile che, per analogia coll'esempio ora visto, viene chiamata base ortonormale *canonica* di l_2 .

Infine, in $l_2(\mathbb{R})$ il sistema ortonormale $\{e_\nu : \nu \in \mathbb{R}\}$ con

$$e_\nu(x) = (\delta_{\nu,x} : x \in \mathbb{R})$$

é un SONC e quindi $l_2(\mathbb{R})$ ammette la base ortonormale *canonica* $\{e_\nu : \nu \in \mathbb{R}\}$ che ha la cardinalità del continuo. ■

Osservazione 3.3.7 Si osservi che se $\{u_\alpha\}$ é un sonc di \mathcal{S} , allora la (i), teorema 3.3.4, scritta nel seguente modo

$$\overline{Sp(\{u_\alpha\})} = \mathcal{S},$$

esprime il fatto che la varietà lineare $Sp(\{u_\alpha\})$, costituita da tutte le combinazioni lineari finite a coefficienti complessi della famiglia $\{u_\alpha\}$, é densa in \mathcal{S} .

Verificheremo ora che in effetti vale un risultato analogo sotto condizioni meno restrittive.

Per semplicità di linguaggio, d'ora in avanti, col termine *numero complesso razionale* intenderemo un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ la cui parte reale e parte immaginaria sono numeri razionali; ossia $z = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}$, con $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Ovviamente, l'insieme dei numeri complessi razionali é identificabile con \mathbb{Q}^2 ed é, quindi, un insieme infinito numerabile denso in \mathbb{C} .

Corollario 3.3.8 Sia $\{u_\alpha\}$ un SONC di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} . Indicata con $Sp^r(\{u_\alpha\})$ la varietà lineare di tutte le combinazioni lineari finite con coefficienti complessi razionali degli elementi del SONC, allora si ha che $Sp^r(\{u_\alpha\})$ é densa in \mathcal{S} .

Dimostrazione. Dalla (i) del teorema 3.3.4 abbiamo che se $\{u_\alpha\}$ é un sonc allora per un qualsiasi $x \in \mathcal{S}$ fissato vale la proprietà che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una combinazione lineare finita $y_\epsilon = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \in Sp(\{u_\alpha\})$ tale che $\|x - y_\epsilon\| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Inoltre, per $1 \leq k \leq n$ scegliamo un numero complesso razionale α_k^r tale che $|\alpha_k - \alpha_k^r| < \frac{\epsilon}{2n}$. Costruito il vettore $y_\epsilon^r = \sum_{k=1}^n \alpha_k^r u_k \in Sp^r(\{u_\alpha\})$, avremo che

$$\begin{aligned} \|x - y_\epsilon^r\| &\leq \|x - y_\epsilon\| + \|y_\epsilon - y_\epsilon^r\| \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon + \sum_{k=1}^n |\alpha_k - \alpha_k^r| < \frac{1}{2}\epsilon + n \frac{\epsilon}{2n} = \epsilon \end{aligned}$$

Operando le scelte $\epsilon = \frac{1}{n}$ possiamo concludere che per ogni vettore $x \in \mathcal{S}$, esiste una successione $\{y_n^r\} \subseteq Sp^r(\{u_\alpha\})$ tale che $\lim \|x - y_n^r\| = 0$, ovvero che $\overline{Sp^r(\{u_\alpha\})} = \mathcal{S}$. □

Proposizione 3.3.9 *Se $\{u_\alpha\}$ è un SONC in \mathcal{S} , valgono le ulteriori proprietà fra loro equivalenti:*

(i) $\{u_\alpha\}$ non è sottoinsieme proprio di alcun altro sistema ortonormale di \mathcal{S} (massimale)

(ii) $\langle u_\alpha | x \rangle = 0$ per ogni α implica $x = 0$. (totale)

Dimostrazione. Per il teorema 3.3.4, se $\{u_\alpha\}$ è un SONC, per esso varrà l'uguaglianza di Parseval (iv). Supposto ora che $\{u_\alpha\}$ non sia massimale, esisterà un elemento $v \in \mathcal{S}$ tale che $\|v\| = 1$ e $\langle u_\alpha | v \rangle = 0$ per ogni α . Ma per la (iv) si ha che $\|v\|^2 = \sum |\langle u_\alpha | v \rangle|^2$ e ciò implicherebbe $\|v\| = 0$ contro l'assunzione $\|v\| = 1$.

Verifichiamo ora che la (i) implica la (ii). Sia $\langle u_\alpha | x \rangle = 0$ per ogni α ; se $x \neq 0$ possiamo porre $\|x\| = 1$ ed allora $\{u_\alpha\} \cup \{x\}$ è un sistema ortonormale contro l'ipotesi (i) che $\{u_\alpha\}$ sia massimale. Quindi non può che essere $x = \underline{0}$.
□

Osservazione 3.3.10 La precedente proposizione dimostra che ogni SONC è un sistema ortonormale massimale. Esistono spazi con prodotto interno che ammettono sistemi ortonormali massimali che non sono completi, come nel seguente esempio.

Esempio 3.3.11 *Sistema ortonormale massimale che non è una base ortonormale.* (da S. P. Gudder, Inner product spaces, Amer. Math. Monthly, **81** (1974) 29-36)

Sia H uno spazio con prodotto interno separabile con base ortonormale $\{e_1, e_2, \dots\}$, considerato il vettore di H ,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$$

sia

$$\mathcal{S} = Sp\{f, e_2, e_3, \dots\}.$$

Allora è facile verificare che $\beta = \{e_2, e_3, \dots\}$ è un sistema ortonormale massimale in \mathcal{S} ma β non è una base ortonormale poiché f non è della forma

$$f = \sum_2^{\infty} c_n e_n.$$

■

Da una semplice applicazione del lemma di Zorn si ottiene che:

Proposizione 3.3.12 *In ogni spazio con prodotto interno esiste sempre un sistema ortonormale massimale.*

Possiamo quindi enunciare e dimostrare il seguente risultato

Proposizione 3.3.13 *Tutti i sistemi ortonormali massimali in uno spazio con prodotto interno hanno la medesima cardinalità.*

Dimostrazione. Siano α e β due sistemi ortonormali massimali con cardinalità A e B rispettivamente. Se A oppure B è finita lo spazio è finito dimensionale

e quindi $A = B$ essendo α e β due basi lineari. Supponiamo allora che α e β siano entrambe infinite. Per $u \in \alpha$, sia

$$\beta(u) = \{v_\beta \in \beta : \langle u|v_\beta \rangle \neq 0\}.$$

Per il teorema 3.2.5, $\beta(u)$ é al piú infinito numerabile. Poiché α é massimale,

$$\beta \subseteq \cup \{\beta(u_\alpha) : u_\alpha \in \alpha\}$$

e quindi

$$B \leq (A \cdot \aleph_0) = A.$$

Per simmetria si ottiene la conclusione cercata. \square

Definizione 3.3.14 *Per dimensione ortogonale di uno spazio con prodotto interno intenderemo la cardinalità comune a tutti i suoi sistemi ortonormali massimali.*

Osservazione 3.3.15 Come vedremo nel prossimo esempio, esistono spazi con prodotto interno che *non* hanno basi ortonormali. Per questi spazi si può comunque parlare di dimensione secondo quanto previsto dalla precedente definizione.

D'altra parte sappiamo che ogni base ortonormale é un sistema ortonormale massimale e quindi se uno spazio con prodotto interno ammette una base ortonormale la dimensione dello spazio coincide con la cardinalità di questa base ortonormale.

Esempio 3.3.16 *Spazio con prodotto interno che non ammette basi ortonormali.* (da S. P. Gudder, Inner product spaces, Amer. Math. Monthly, **81** (1974) 29-36).

Sia $H = l_2([0, 1])$ lo spazio di Hilbert delle successioni di quadrato sommabile definite sul compatto $[0, 1]$ e indichiamo con

$$\mathbf{Z}([0, 1]) = \{z_1, z_2, \dots, z_k, \dots\}$$

l'insieme totalmente ordinato rispetto ad un ordine prefissato dei razionali in $[0, 1]$ e con $\mathbb{Q}([0, 1])$ l'insieme degli irrazionali in $[0, 1]$. Considerata la successione dei vettori di l_2 :

$$\beta = \{y_{z_1}, y_{z_2}, \dots, y_{z_k}, \dots\}$$

con $y_{z_k}(n) = \delta_{k,n}$, essi sono linearmente indipendenti e quindi possono essere estesi ad una base lineare di Hamel per l_2 :

$$\beta \cup \beta_1 = \{y_{z_1}, y_{z_2}, \dots\} \cup \{y_\lambda : \lambda \in \mathbb{Q}\}.$$

Fissato $\alpha \in [0, 1]$ definiamo il vettore f_α di H nel seguente modo:

se $\alpha \in \mathbf{Z}([0, 1])$, allora $f_\alpha(x) = \{\delta_{\alpha,x}\}$ se $\alpha \in \mathbb{Q}([0, 1])$, allora

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x = \alpha \\ y_\alpha(x) & x = z_n \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

Sia $G = S_p\{f_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ la varietà lineare generata da questa famiglia di vettori, si avrà allora che

1. $\overline{G} = H$ é una varietà lineare densa nello spazio di Hilbert H .
2. $\{f_\alpha : \alpha \in \mathbf{Z}\}$ é un sistema ortonormale massimale in G .

In questo modo abbiamo ottenuto che

- (a) $\dim G < \dim H$.

Infatti, la $\dim G$, per la (2), é infinito numerabile mentre la dimensione di H é c (cardinalità del continuo), in quanto basterà considerare il SONC canonico $\{e_\nu : \nu \in [0, 1]\}$.

Dalla (a) segue la seguente proprietà:

- (b) G non ha alcuna base ortonormale β_0 .

Infatti, poiché $\overline{G} = H$, se fosse β_0 una base ortonormale per G sarebbe pure una base ortonormale per H e quindi $\dim G = \dim H$ contro la (a).

- (c) Il sistema ortonormale massimale $\{f_\alpha : \alpha \in \mathbf{Z}\}$ non é una base ortonormale. ■

3.4 Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Mentre in ogni spazio con prodotto interno esiste sempre almeno un sistema ortonormale massimale, l'esempio 3.3.16, sezione 3.3, mostra il caso di uno spazio con prodotto interno in cui non esiste alcuna base ortonormale. Risulta allora importante individuare una classe sufficientemente ampia di spazi con prodotto interno per la quale sia assicurata l'esistenza di almeno una base ortonormale. Come andremo a dimostrare ora questa classe é quella degli spazi con prodotto interno *separabili*.

Proposizione 3.4.1 *Se $\{u_n\}$ é un SONC allora pure $\{e^{i\vartheta_n} u_n\}$, ove $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ sono degli scalari reali arbitrari, é un SONC.*

Dimostrazione. Se $\{u_n\}$ é un SONC allora

$$\langle e^{i\vartheta_n} u_n | e^{i\vartheta_m} u_m \rangle = e^{i(\vartheta_m - \vartheta_n)} \langle u_n | u_m \rangle = \delta_{n,m}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} x &= \sum \langle u_n | x \rangle u_n = \sum e^{i(\vartheta_n - \vartheta_m)} \langle u_n | x \rangle u_n = \\ &= \sum \langle e^{i\vartheta_n} u_n | x \rangle e^{i\vartheta_n} u_n. \end{aligned}$$

Quindi pure $\{e^{i\vartheta_n} u_n\}$ é un SONC. □

Teorema 3.4.2 (Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt).

Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno, non necessariamente separabile, e $\{x_n\}$ una famiglia libera di vettori di \mathcal{S} , al più infinita numerabile. Allora é possibile costruire in \mathcal{S} una famiglia di vettori $\{u_n\}$ tale che:

- (i) $\{u_n\}$ é un sistema ortonormale

(ii) ciascun u_k é combinazione lineare dei primi k elementi di $\{x_n\}$:

$$u_k = \sum_{j=1}^k \alpha_{kj} x_j \quad \text{con} \quad \alpha_{kk} \neq 0;$$

(iii) ciascun x_k é combinazione lineare dei primi k elementi di $\{u_n\}$:

$$x_k = \sum_{i=1}^k \beta_{ki} u_i \quad \text{con} \quad \beta_{kk} \neq 0;$$

(iv) ogni altra famiglia di vettori $\{\hat{u}_n\}$ avente la medesima cardinalità di $\{u_n\}$ e soddisfacente le precedenti condizioni (i), (ii) e (iii) si ottiene dalla famiglia $\{u_n\}$ moltiplicando i suoi elementi per fattori complessi di modulo unitario, chiamati anche fattori di fase. In formule

$$\hat{u}_n = e^{i\vartheta_n} u_n \quad \text{per ogni } n;$$

(v) i sottospazi $\vee\{x_n\}$ e $\vee\{e^{i\vartheta_n} u_n\}$ generati dalle due famiglie $\{x_n\}$ e $\{e^{i\vartheta_n} u_n\}$ sono coincidenti.

Dimostrazione. Cerchiamo l'elemento u_1 che soddisfi le condizioni (i), (ii) e (iii). Dovrà essere

$$\|u_1\| = 1, \quad u_1 = \alpha_{11} x_1, \quad x_1 = \beta_{11} u_1.$$

Perciò

$$\alpha_{11} = 1/\beta_{11} \quad \text{e} \quad 1 = \langle u_1 | u_1 \rangle = |\alpha_{11}|^2 \langle x_1 | x_1 \rangle$$

da cui segue che α_{11} deve soddisfare la equazione:

$$|\alpha_{11}| = \frac{1}{\|x_1\|}.$$

Se prendiamo $\alpha_{11} = 1/\|x_1\|$ é chiaro che questa scelta é determinata unicamente dalla relazione precedente se si prescinde da fattori moltiplicativi di modulo uno. Pertanto, l'elemento cercato é

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

Procediamo ora per induzione supponendo di aver costruito tutti gli elementi $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ in modo da verificare le condizioni (i), (ii) e (iii). Consideriamo il sistema avente come incognite il vettore $h_k \in \mathcal{S}$ e i $(k-1)$ scalari β_{kj} , per $j = 1, 2, \dots, k-1$:

$$\begin{cases} x_k = \beta_{k1} u_1 + \beta_{k2} u_2 + \dots + \beta_{k,k-1} u_{k-1} + h_k & (1) \\ \langle u_j | h_k \rangle = 0 \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, k-1 & (2) \end{cases}$$

Gli scalari β_{kj} , eventualmente tutti nulli, sono univocamente determinati dalla (1) e dalla (2) in quanto

$$0 = \langle u_j | h_k \rangle = \left\langle u_j \left| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{ki} u_i \right. \right\rangle = \langle u_j | x_k \rangle - \beta_{kj}$$

e perciò dovrà essere

$$(3) \quad \beta_{kj} = \langle u_j | x_k \rangle, \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, k-1$$

Se tutti gli scalari β_{kj} sono nulli, allora $h_k = x_k \neq \underline{0}$ in quanto $\{x_n\}$ é una famiglia libera. Se almeno uno dei $\beta_{kj} \neq 0$ allora deve essere $h_k \neq \underline{0}$ in quanto, altrimenti, per la (ii) risulterebbe che x_k é una combinazione lineare dei precedenti vettori $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ contro l'ipotesi che $\{x_n\}$ é una famiglia libera.

In ogni caso $h_k \neq \underline{0}$ e perciò $\|h_k\| \neq 0$ e sar  lecito porre

$$(4) \quad u_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}.$$

Ovviamente $\|u_k\| = 1$ e dalla (2) si ha che $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k\}$ é un sistema ortonormale. Inoltre dalla (1) ricaviamo che

$$(5) \quad u_k = \frac{1}{\|h_k\|} (x_k - \beta_{k,1}u_1 - \beta_{k,2}u_2 - \dots - \beta_{k,k-1}u_{k-1})$$

$$(6) \quad x_k = \beta_{k,1}u_1 + \beta_{k,2}u_2 + \dots + \beta_{k,k-1}u_{k-1} + \|h_k\|u_k.$$

Dall'ipotesi che $\{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\}$ soddisfano la (ii) segue, dalla (5), che pure u_k soddisfa la (ii) con

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{\|h_k\|} \neq 0.$$

D'altra parte, la (6) permette di affermare che la (iii) é soddisfatta per x_k con

$$\beta_{kk} = \|h_k\| \neq 0.$$

In questo modo, tenendo presente le (1), (3) e (4), siamo in grado di costruire induttivamente la famiglia ortonormale $\{u_n\}$ partendo dalla famiglia libera $\{x_n\}$ per mezzo del seguente procedimento:

$$\begin{array}{ll} h_1 = x_1 & u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{h_1}{\|h_1\|} \\ h_2 = x_2 - \langle u_1 | x_2 \rangle u_1 & u_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} \\ \vdots & \vdots \\ h_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle u_j | x_k \rangle u_j & u_k = \frac{h_k}{\|h_k\|} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

La famiglia $\{u_n\}$ cos  ottenuta soddisfa le condizioni (i), (ii) e (iii). Inoltre, dalle (ii) e (iii) segue che $\text{Sp}\{x_n\} = \text{Sp}\{u_n\}$ da cui otteniamo che $\vee\{x_n\} = \vee\{u_n\}$.

Si può osservare che ad ogni stadio di questo procedimento costruttivo l'unica ambiguità sta nel fatto che la scelta di h_k è determinata a meno di un fattore moltiplicativo di norma uno. Infatti, se al posto di $\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$ avessimo preso il vettore

$$\hat{u}_j = e^{i\theta_j} u_j \quad \text{per } j = 1, 2, \dots, k$$

avremmo avuto il corrispondente vettore

$$\hat{h}_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \hat{u}_j | x \rangle \hat{u}_j = h_k$$

ossia, il procedimento costruttivo non ne avrebbe risentito e, dalla proposizione 1, ne avremmo ricavato che $\{\hat{u}_n\}$ è ancora un sistema ortonormale il quale soddisfa ovviamente le condizioni (i),(ii),(iii) e (iv).

Supponiamo infine che $\{\hat{u}_n\}$ sia un altro sistema ortonormale avente la medesima cardinalità di $\{u_n\}$ e soddisfacente a sua volta le condizioni (i)-(iii). Se $\{\hat{u}_n\}$ soddisfa la (ii), ogni \hat{u}_n è combinazione lineare di $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, mentre per la (iii), ora dimostrata, ogni x_i , ($i = 1, 2, \dots, k$), è combinazione lineare di $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ concludendo che

$$(7) \quad \hat{u}_k = \sum_{l=1}^k \alpha_{kl} u_l.$$

Siccome $\{u_n\}$ soddisfa la (ii) avremo che ogni u_l è combinazione lineare di $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ mentre dal fatto che per ipotesi $\{\hat{u}_n\}$ soddisfa la (iii) segue che ogni x_j , ($j = 1, 2, \dots, l$), è combinazione lineare di $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_j\}$ concludendo che

$$(8) \quad u_l = \sum_{j=1}^l \beta_{lj} \hat{u}_j \quad (l = 1, 2, \dots, k).$$

Dalla (7) segue che

$$(9) \quad \langle \hat{u}_k | u_h \rangle = \sum_{l=1}^k \alpha_{kl} \langle u_l | u_h \rangle = \alpha_{kh} \quad (h = 1, 2, \dots, k)$$

mentre dalla (8) abbiamo

$$(10) \quad \begin{aligned} \langle \hat{u}_k | \hat{u}_h \rangle &= \left\langle \hat{u}_k \left| \sum_{j=1}^h \beta_{hj} \hat{u}_j \right. \right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^h \beta_{kj} \langle \hat{u}_k | \hat{u}_j \rangle = 0 \quad \text{per } h = 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

Dalle (9) e (10) segue $\alpha_{kh} = 0$ per $h = 1, 2, \dots, k-1$ e, quindi, sotto queste condizioni la (7) si riconduce a

$$(11) \quad \hat{u} = \alpha_{kk} u_k \quad \text{qualunque sia } k.$$

Rimane da verificare che $\alpha_{kk} \neq 0$. In effetti, essendo per la (i) $\|\hat{u}_k\| = \|u_k\|$, per qualunque k , dalla precedente relazione (11) otteniamo $|\alpha_{kk}| = 1$.

Infine, se $\hat{u}_n = e^{i\vartheta_n} u_n$ allora ogni elemento $\sum \alpha_n \hat{u}_n \in \text{Sp}(\{\hat{u}_n\})$ sarà anche un elemento $\sum \alpha_n \hat{u}_n = \sum (\alpha_n e^{i\vartheta_n}) u_n \in \text{Sp}(\{u_n\})$; viceversa, ogni elemento $\sum \beta_n u_n \in \text{Sp}(\{u_n\})$ sarà anche un elemento $\sum (\beta_n e^{-i\vartheta_n}) \hat{u}_n \in \text{Sp}(\{\hat{u}_n\})$. Da $\text{Sp}(\{u_n\}) = \text{Sp}(\{\hat{u}_n\}) = \text{Sp}(\{x_n\})$ segue la (v). \square

Esercizio 3.4.3 Nello spazio \mathbb{C}^3 si applichi il procedimento di Gram-Schmidt alla terna di vettori

$$\underline{x}_1 = (1, 1, 0) \quad \underline{x}_2 = (2, -1, 0) \quad \underline{x}_3 = (0, 1, 1).$$

Teorema 3.4.4 Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno, allora:

- (i) \mathcal{S} é separabile sse esiste in \mathcal{S} un SONC finito o infinito numerabile.
- (ii) \mathcal{S} ha dimensione lineare finita sse esiste in \mathcal{S} un SONC finito.

Dimostrazione. (i) Se \mathcal{S} é separabile, esiste in \mathcal{S} un sottoinsieme $\{x_n\}$ denso in \mathcal{S} e al più infinito numerabile. Da $\{x_n\}$ si estrae un sottoinsieme $\{x_{n_k}\}$ costituente una famiglia libera esaminando successivamente gli elementi $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ e selezionando ad ogni stadio quelli che sono linearmente indipendenti da quelli selezionati negli stadi precedenti. Chiaramente ogni vettore x_n é combinazione lineare finita di alcuni vettori della famiglia estratta $\{x_{n_k}\}$, perciò

$$\text{Sp}\{x_n\} = \text{Sp}\{x_{n_k}\}$$

da cui segue che anche

$$\vee\{x_{n_k}\} = \vee\{x_n\}$$

ma quest'ultimo é uguale a \mathcal{S} , essendo $\{x_n\}$ denso in \mathcal{S} . Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla famiglia libera $\{x_{n_k}\}$ si ottiene un sistema ortonormale finito o infinito numerabile x tale che

$$\text{Sp}\{u_{n_k}\} = \text{Sp}\{x_{n_k}\}$$

e quindi tale che

$$\vee\{u_{n_k}\} = \vee\{x_{n_k}\} = \mathcal{S}.$$

Allora dalla (i) teorema 3.3.4 sezione 3.3 segue che $\{u_{n_k}\}$ é un sistema ortonormale completo finito o infinito numerabile.

Viceversa, sia $\{u_n\}$ un SONC in \mathcal{S} finito o infinito numerabile. Sappiamo che l'insieme $\text{Sp}^r(\{u_n\})$ di tutte le combinazioni lineari fatte con elementi di $\{u_n\}$ tramite coefficienti complessi a parte reale e a parte immaginaria razionale é denso in \mathcal{S} ed é infinito numerabile e quindi \mathcal{S} é separabile.

(ii) Se \mathcal{S} ha dimensione lineare finita, diciamo n , un SONC in \mathcal{S} , essendo una famiglia libera, non può contenere più di n elementi.

Viceversa se $\{u_j\}$ é un SONC in \mathcal{S} finito, questo SONC é tale che $\text{Sp}\{u_j\} = \mathcal{S}$ ed é in più una famiglia libera, quindi $\{u_j\}$ é una base lineare per \mathcal{S} contenente un numero finito di elementi. \square

Osservazione 3.4.5 La dimostrazione ora fatta dell'esistenza di almeno un SONC per ogni spazio con prodotto interno separabile si ottiene per mezzo di un procedimento costruttivo basato sul procedimento di Gram-Schmidt. Precedentemente abbiamo dato esempi di spazi con prodotto interno *non separabili* per i quali non esistono SONC.

Nel caso degli spazi di Hilbert, anche non separabili, si può dimostrare, utilizzando l'assioma della scelta ma senza dare un procedimento costruttivo, l'esistenza di almeno un SONC. Perciò soltanto nel caso di spazi con prodotto interno *non separabili* e *non completi*, non si è in grado di assicurare l'esistenza di almeno un SONC.

Il viceversa del punto (ii) del precedente teorema può assumere la seguente forma:

Corollario 3.4.6 *In uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} di dimensione finita ogni SONC è una base lineare di \mathcal{S} .*

Vediamo ora il seguente

Corollario 3.4.7 *In uno spazio con prodotto interno separabile \mathcal{S} tutti i SONC hanno la stessa cardinalità. Precisamente si ha che:*

(i) *Se \mathcal{S} ha dimensione lineare finita n , tutti i SONC hanno n elementi e sono basi lineari di \mathcal{S} .*

(ii) *Se \mathcal{S} ha dimensione lineare infinita, tutti i SONC sono infinito numerabile.*

Dimostrazione. Se \mathcal{S} ha dimensione lineare finita la tesi segue dal fatto che tutti i SONC sono delle basi. Se \mathcal{S} ha dimensione lineare non finita, la (ii) del teorema 3.4.4 assicura che ogni SONC in \mathcal{S} è infinito perché se ve ne fosse uno finito, \mathcal{S} avrebbe dimensione lineare finita. D'altra parte la proposizione 3.2.7 pag. 42 assicura che in questo caso i SONC in \mathcal{S} sono infinito numerabile. \square

Osservazione 3.4.8 La cardinalità comune a tutti i SONC di uno spazio con prodotto interno separabile è la *dimensione ortogonale* dello spazio secondo quanto visto nella definizione 3.3.14 sezione 3.3.

In uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} separabile non bisogna confondere il concetto di dimensione come cardinalità comune a tutte le basi lineari di \mathcal{S} (dimensione "lineare") con quello di dimensione come cardinalità comune di tutti i SONC di \mathcal{S} (dimensione "ortogonale"). Come abbiamo visto, se la dimensione ortogonale di \mathcal{S} è finita anche quella lineare è finita e uguale alla prima; in questo caso quindi non c'è distinzione tra dimensione lineare e dimensione ortogonale.

Esempio 3.4.9 Nello spazio con prodotto interno l_2 la base canonica $\{e_n\}$ è una base ortonormale che non è una base lineare.

Nello spazio con prodotto interno d_2 la base canonica è sia una base lineare che una base ortonormale. Pertanto $d_2(\mathbb{C})$ ha dimensione lineare coincidente alla dimensione ortogonale, essendo entrambe \aleph_0 . \blacksquare

Capitolo 4

SONC in spazi di Hilbert

4.1 Sonc in spazi di Hilbert

Le considerazioni svolte sino ad ora e relative ai sistemi ortonormali completi riguardano spazi con prodotto interno, sia che essi siano completi sia che non lo siano. Vogliamo adesso analizzare le analoghe proprietà riguardanti gli spazi di Hilbert, separabili o non. Ricordiamo che da quanto visto nell'osservazione 3.4.5 a pag. 56, gli spazi che presentano un comportamento anomalo per ciò che riguarda i SONC sono quelli non completi e non separabili in quanto, per essi, potrebbero non esistere SONC.

Teorema 4.1.1 Fisher-Riesz Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un suo sistema ortonormale infinito numerabile e $\{\alpha_n\}$ una generica successione di numeri complessi, allora:

la serie $\sum \alpha_n u_n$ è convergente in \mathcal{H} sse la serie $\sum |\alpha_n|^2$ è convergente in \mathbb{R} .

Nel caso la serie precedente sia convergente, indicata con \hat{x} la somma della serie, ossia $\hat{x} = \sum \alpha_n u_n$, si ha che

$$\alpha_n = \langle u_n | x \rangle \quad e \quad \|\hat{x}\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$$

Dimostrazione. Posto

$$s_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in \mathcal{H} \quad e \quad \delta_n = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$$

avremo che

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n \alpha_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |\alpha_i|^2 = |\delta_n - \delta_m|$$

per ogni m e ogni $n > m$. Pertanto la successione $\{s_n\}$ è di Cauchy sse è di Cauchy la successione $\{\delta_n\}$. Tenendo conto della completezza di \mathcal{H} e di \mathbb{R} la prima parte dell'asserto è dimostrata.

Posto $\hat{x} = \sum \alpha_n u_n$ avremo che

$$\langle u_n | \hat{x} \rangle = \left\langle u_n \left| \sum_n \alpha_n u_n \right. \right\rangle = \sum_n \alpha_n \langle u_n | u_n \rangle = \alpha_n$$

Infine da

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - \sum_{i=1}^n \langle u_i | x \rangle u_i\|^2 &= \left\langle \hat{x} - \sum_{i=1}^n \langle u_i | x \rangle u_i \left| \hat{x} - \sum_{j=1}^n \langle u_j | x \rangle u_j \right. \right\rangle = \\ &= \|\hat{x}\|^2 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

segue che $\|\hat{x}\| = \sum |\alpha_n|^2$. \square

Corollario 4.1.2 *Se \mathcal{H} é uno spazio di Hilbert separabile e $\{u_n\}$ un SONC allora*

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n : \alpha_k \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty \right\}$$

Dimostrazione. Per il teorema precedente, se $\{\alpha_n\}$ é una successione di numeri complessi tale che $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ allora la serie $\sum \alpha_n u_n \in \mathcal{H}$. Viceversa, se $x \in \mathcal{H}$ allora $x = \sum \langle u_n | x \rangle u_n$ con $\sum |\alpha_n|^2 = \|x\|$. \square

Corollario 4.1.3 *Sia $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ; qualunque sia l'elemento x di \mathcal{H} valgono le proprietà:*

(i) *la serie $\sum_{\alpha} \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$ é convergente in \mathcal{H} .*

(ii) *indicato con $\hat{x} = \sum_{\alpha} \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$ la somma della serie, si ha che*

$$(x - \hat{x}) \in (\vee \{u_\alpha\})^\perp \quad e \quad \langle u_\alpha | x \rangle = \langle u_\alpha | \hat{x} \rangle, \quad \forall \alpha$$

Dimostrazione. Fissato un generico $x \in \mathcal{H}$, consideriamo i suoi coefficienti di Fourier $\langle u_\alpha | x \rangle$ e costruiamo l'espressione

$$\sum_{\alpha} \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

Per la (i) teorema 3.2.5 sezione 3.2 l'espressione precedente o é una somma finita o é una serie. Nel primo caso non c'è alcun problema di convergenza in \mathcal{H} , mentre nel secondo caso la disuguaglianza di Bessel, (ii) teorema 3.2.5 sezione 3.2, assicura che

$$\sum_{\alpha} |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$

e quindi il teorema 4.1.1 ci permette di affermare che

$$\sum_{\alpha} \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

é convergente in \mathcal{H} . In ogni caso, qualunque sia l'elemento $x \in \mathcal{H}$, l'espressione

$$\sum_{\alpha} \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}$$

individua un elemento $\hat{x} \in \mathcal{H}$, tale che

$$\langle u_{\alpha} | \hat{x} \rangle = \langle u_{\alpha} | x \rangle$$

secondo i risultati del teorema di Fisher-Riesz.

Verifichiamo ora che $(x - \hat{x}) \in (\vee\{u_{\alpha}\})^{\perp}$. In primo luogo si osservi che

$$\langle u_{\alpha} | x - \hat{x} \rangle = \langle u_{\alpha} | x \rangle - \langle u_{\alpha} | \hat{x} \rangle = 0$$

per ogni $\alpha \in A$. Da questo risultato segue che $x - \hat{x}$ é ortogonale ad ogni combinazione lineare di elementi appartenenti a $Sp\{u_{\alpha}\}$, ossia a ogni $x_n \in Sp\{u_{\alpha}\}$. Infine sappiamo che $\hat{x} \in \overline{Sp\{u_{\alpha}\}}$ sse esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi appartenenti a $Sp\{u_{\alpha}\}$ convergente a \hat{x} , ossia tale che $\lim x_n = \hat{x}$. Ma per quanto abbiamo appena visto $\langle x_n | x - \hat{x} \rangle = 0$ e perciò $\lim \langle x_n | x - \hat{x} \rangle = 0$, ma da questa segue che

$$\langle \lim x_n | x - \hat{x} \rangle = 0$$

ossia che $\langle \hat{x} | x - \hat{x} \rangle = 0$, per ogni $\hat{x} \in \vee(\{u_{\alpha}\})$. □

Corollario 4.1.4 *Abbiamo pertanto ottenuto un risultato che differenzia gli spazi completi da quelli che non possiedono questa proprietà. Ossia*

negli spazi di Hilbert, se $\{u_{\alpha} : \alpha \in A\}$ é un sistema ortonormale, per ogni $x \in \mathcal{H}$ lo sviluppo in serie di Fourier $\sum \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}$ di x rispetto al SON é ben posto ed é convergente in \mathcal{H} .

Come si é già osservato, ciò non é vero in generale in spazi non completi. Sempre nel caso degli spazi non completi abbiamo visto che le quattro proprietà del teorema 3.3.4 sezione 3.3 sono fra loro equivalenti e vengono assunte come proprietà che definiscono i SONC. Da queste proprietà si deducono quindi la (i) della proposizione 3.3.9 pag. 50), la quale, a sua volta, é equivalente alla (ii) della proposizione 3.3.9 pag. 50).

Verifichiamo ora che nel caso degli spazi di Hilbert dalla (ii) della proposizione 3.3.9 pag. 50), ossia dalla condizione

$$(4.1) \quad \langle u_{\alpha} | x \rangle = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in A \quad \text{implica} \quad x = \underline{0}$$

si deduce che $\{u_{\alpha} : \alpha \in A\}$ é un SONC.

Infatti, poiché \mathcal{H} é completo avremo che $\sum \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}$ é convergente in \mathcal{H} , valendo inoltre (vedi (ii) corollario 4.1.3) che

$$\left\langle u_{\alpha} \left| x - \sum \langle u_j | x \rangle u_j \right. \right\rangle = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in A$$

Ma dalla (4.1) segue che $x - \sum \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha} = \underline{0}$ e cioè che

$$x = \sum \langle u_{\alpha} | x \rangle u_{\alpha}$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema:

Teorema 4.1.5 Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un sistema ortonormale in \mathcal{H} . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ non è un sottoinsieme proprio di alcun altro sistema ortonormale in \mathcal{H} .

(ii) $\langle u_\alpha | x \rangle = 0$, per ogni $\alpha \in A$ implica $x = 0$.

(iii) $\vee \{u_\alpha\} = \mathcal{H}$

(iv) per ogni $x \in \mathcal{H}$ si ha che $x = \sum \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$

(v) Per ogni coppia x, y di elementi di \mathcal{H} si ha

$$\langle x | y \rangle = \sum \langle x | u_\alpha \rangle \langle u_\alpha | y \rangle$$

(vi) per ogni $x \in \mathcal{H}$ si ha

$$\|x\|^2 = \sum |\langle u_\alpha | x \rangle|^2$$

Osservazione 4.1.6 Si dovrebbe osservare che la dimostrazione dell'equivalenza delle proposizioni (iii), (iv), (v) e (vi) è stata fatta nel teorema 3.3.4 sezione 3.3 sotto la condizione di separabilità dello spazio. Questa condizione in effetti non è essenziale e l'equivalenza delle precedenti proposizioni si può dimostrare senza la condizione restrittiva di separabilità.

Tramite l'assioma della scelta si dimostra che in ogni spazio di Hilbert esiste almeno un SONC. Inoltre, anche per gli spazi di Hilbert, indipendentemente dalla separabilità, si può dimostrare che tutti i SONC hanno la medesima cardinalità potendo quindi dire che

la cardinalità comune a tutti i SONC di uno spazio di Hilbert si chiama dimensione *ortogonale* dello spazio.

Potremo perciò suddividere la classe degli spazi di Hilbert in tre sottoclassi:

- (1) La sottoclasse degli spazi di Hilbert di dimensione *finita*: tutti gli spazi di questa classe sono separabili e hanno dimensione lineare coincidente con quella ortogonale.
- (2) La sottoclasse degli spazi di Hilbert di dimensione *infinito numerabile*: tutti gli spazi di questa sottoclasse sono separabili.
- (3) La sottoclasse degli spazi di Hilbert di dimensione *superiore alla infinità numerabile*: tutti gli spazi di questa sottoclasse sono non separabili.

4.2 Sonc in coppie spazio pre Hilbert-spazio di Hilbert

In questo paragrafo dimostreremo un risultato che sarà particolarmente utile nel seguito.

Sia $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ una coppia costituita da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e da una varietà lineare \mathcal{S} di \mathcal{H} densa in \mathcal{H} e il cui prodotto interno é la restrizione del prodotto interno definito in \mathcal{H} .

Sotto queste condizioni, ovviamente, se $\{u_\alpha\}$ é un SONC in \mathcal{H} i cui elementi sono tutti vettori di \mathcal{S} allora $\{u_\alpha\}$ é un SONC per lo spazio \mathcal{S} . Viceversa dimostreremo ora che

Teorema 4.2.1 *Ogni SONC in \mathcal{S} é anche SONC in \mathcal{H} .*

Dimostrazione. Infatti, supposto che $\{u_\alpha\}$ sia un SONC in \mathcal{S} , scelto un qualsiasi vettore $x \in \mathcal{H}$ per la (i) corollario 4.1.3 possiamo costruire il vettore di \mathcal{H} ,

$$\hat{x} = \sum \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

Consideriamo il vettore $x - \hat{x}$ dalla (ii) del corollario 4.1.3, sappiamo che

$$(4.2) \quad (x - \hat{x}) \in \overline{\text{Sp}(\{u_\alpha\})}$$

Ovviamente $\text{Sp}(\{u_\alpha\}) \subseteq \mathcal{S}$ e preso un generico vettore $y \in \mathcal{S}$, essendo $\{u_\alpha\}$ un SONC di \mathcal{S} , avremo che

$$y = \sum \langle u_\alpha | y \rangle u_\alpha$$

da cui segue che

$$y \in \overline{\text{Sp}(\{u_\alpha\})}$$

in quanto esiste la successione delle somme parziali

$$\left\{ s_k = \sum_1^k \langle u_\alpha | y \rangle u_\alpha : k \in \mathbb{N} \right\}$$

contenuta in $\text{Sp}(\{u_\alpha\})$ e convergente a y .

Pertanto abbiamo dimostrato che $\mathcal{S} \subseteq \overline{\text{Sp}(\{u_\alpha\})}$ e quindi sarà

$$\overline{\mathcal{S}} = \overline{\text{Sp}(\{u_\alpha\})} = \mathcal{H}$$

Grazie a questo risultato abbiamo che $(x - \hat{x}) \in \mathcal{H}^\perp$ e ciò implica che

$$x = \hat{x} = \sum \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$$

ovvero la tesi. □

4.3 Sonc nello spazio di Hilbert \mathbb{R}^2

Nel caso dello spazio di Hilbert reale \mathbb{R}^2 si possono caratterizzare tutti i sonc in due classi, secondo quanto dimostrato nella seguente proposizione.

Proposizione 4.3.1 *Ogni base ortonormale in \mathbb{R}^2 può essere scritta in una delle seguenti due forme alternative per un qualche angolo φ :*

$$\begin{aligned} & \{ (\cos \varphi, \sin \varphi), (-\sin \varphi, \cos \varphi) \} \\ & \{ (\cos \varphi, \sin \varphi), (\sin \varphi, -\cos \varphi) \} \end{aligned}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\{u, v\}$ sia un qualsiasi SONC in \mathbb{R}^2 . Posto $u = (\alpha, \beta)$ avremo che

$$1 = \|u\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

da cui si ottiene che

$$|\alpha| \leq 1 \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pertanto, esisterà un unico angolo $\vartheta \in [0, \pi]$ tale che $\alpha = \cos \vartheta$ e ciò implica che

$$\beta^2 = 1 - \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta$$

da cui segue $\beta = \pm \sin \vartheta$. Poiché

$$\begin{aligned} \pm \sin \vartheta &= \sin(\pm \vartheta) \\ \cos \vartheta &= \cos(\pm \vartheta) \end{aligned}$$

esisterà un angolo φ tale che $\alpha = \cos \varphi$, $\beta = \sin \varphi$ e quindi

$$u = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

Analogamente, procedendo per v , esisterà un angolo ψ tale che

$$v = (\cos \psi, \sin \psi)$$

Ora, da

$$0 = \langle u, v \rangle = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = \cos(\psi - \varphi)$$

seguirà che

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi = \left(\frac{2k+1}{2} \right) \pi$$

da cui

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos \left(\varphi + \frac{2k+1}{2} \pi \right) = \pm (-\sin \varphi) \\ \sin \psi &= \sin \left(\varphi + \frac{2k+1}{2} \pi \right) = \pm (\cos \varphi) \end{aligned}$$

□

4.4 Integrale diretto di spazi di Hilbert

In analogia con quanto visto nell'esempio 2.2.11 sezione 2.2 pag. 33, in questa sezione daremo alcune importanti generalizzazioni dello spazio di Hilbert $L_2(I, \mathbb{C})$. In primo luogo facciamo osservare che una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ è un vettore dello spazio $L_2(I, \mathbb{C})$ sse sono soddisfatte le condizioni:

(i) per ogni numero $\alpha \in \mathbb{C}$ la funzione

$$I \mapsto \mathbb{C}, x \rightarrow \langle f(x) | \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

è misurabile secondo Lebesgue.

(ii) $\int_I \|f(x)\|_{\mathbb{C}}^2 dx < +\infty$.

Di queste due condizioni la (i) può sembrare curiosa, però essa è equivalente a richiedere che la f sia una funzione misurabile. Infatti, se f è misurabile anche

$$\alpha \bar{f} : I \mapsto \mathbb{C}, x \mapsto (\alpha \bar{f})(x) = \overline{\alpha f(x)} = \langle f(x) | \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e se $\alpha \bar{f}$ è misurabile per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, preso in particolare $\alpha = 1$ avremo che anche f è misurabile.

L'usuale prodotto interno su $L_2(I, \mathbb{C})$ e la corrispondente norma si possono anche scrivere nella forma:

$$(4.3) \quad \langle f | g \rangle = \int_I \langle f(x) | g(x) \rangle_{\mathbb{C}} dx$$

$$(4.4) \quad \|f\| = \sqrt{\int_I \|f(x)\|_{\mathbb{C}}^2 dx}$$

Considerato ora uno spazio di Hilbert qualsiasi \mathcal{H} possiamo introdurre l'insieme $L_2(I, \mathcal{H})$ costituito da tutte le funzioni a valori vettoriali $f : I \mapsto \mathcal{H}$ soddisfacenti le condizioni:

(i-a) per ogni vettore $h \in \mathcal{H}$ la funzione

$$I \mapsto \mathbb{C}, x \rightarrow \langle f(x) | h \rangle_{\mathcal{H}}$$

è misurabile. In questo caso diremo che la funzione a valori vettoriali f è *misurabile*.

(ii-a)

$$\int_I \|f(x)\|_{\mathcal{H}}^2 dx < +\infty$$

Le operazioni di somma di vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare sono definite su $L_2(I, \mathcal{H})$ attraverso le formule:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

Facciamo osservare che se f e g sono due funzioni a valori vettoriali e $\{e_n\}$ è un sonc fissato in \mathcal{H} , dalla uguaglianza

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_n \langle f(x) | e_n \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_n | g(x) \rangle_{\mathcal{H}}$$

segue che pure la funzione $I \mapsto \mathbb{C}, x \rightarrow \langle f(x)|g(x) \rangle_{\mathcal{H}}$ é misurabile. Inoltre dalla diseguaglianza

$$2|\langle f(x)|g(x) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f(x)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g(x)\|_{\mathcal{H}}^2$$

e dalla (ii-a) segue che l'integrale della precedente funzione misurabile

$$\int_I \langle f(x)|g(x) \rangle_{\mathcal{H}} dx$$

esiste finito. In conclusione ha senso introdurre su $L_2(I, \mathcal{H})$ il prodotto interno

$$(1-a) \quad \langle f|g \rangle = \int_I \langle f(x)|g(x) \rangle_{\mathcal{H}} dx$$

da cui si induce la norma

$$(2-a) \quad \|f\| = \sqrt{\int_I \|f(x)\|_{\mathcal{H}}^2 dx}$$

La verifica che la (1-a) definisce un prodotto interno per $L_2(I, \mathcal{H})$ é immediata. In particolare, la completezza di $L_2(I, \mathcal{H})$ si dimostra con argomenti analoghi a quelli usati per dimostrare la completezza di $L_2(I, \mathbb{C})$.

Lo spazio di Hilbert ora introdotto é quindi l'insieme

$$L_2(I, \mathcal{H}) = \{f : I \mapsto \mathcal{H} \mid \text{valgono (i-a), (ii-a)}\}$$

4.4.1 Esempio: Caso particolare $I = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$

In questo caso avremo lo spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^n)$ costituito da tutte le funzioni

$$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{C}^n, \underline{x} \rightarrow f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}))$$

con $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{C}$ per $i = 1, 2, \dots, n$ soddisfacenti le condizioni:

(i-a) per ogni vettore $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ la funzione $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ definita da

$$\underline{x} \rightarrow \langle f(\underline{x})|\underline{h} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^n \overline{f_i(\underline{x})} h_i$$

é misurabile.

(ii-a) $\int_{\mathbb{R}^3} \|f(x)\|_{\mathbb{C}^n}^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} |f_i(x)|^2 dx < +\infty$

Risulta immediato verificare che le condizioni (i-a) e (ii-a) sono equivalenti all'unica condizione

(a) $f_i \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$

Il prodotto interno in $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^n)$ é definito da

$$(1) \quad \langle f|g \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f_i} g_i$$

con associata la norma

$$(2) \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^3} |f_i|^2}$$

Osservazione 4.4.1 Dal confronto delle (a), (1) e (2) del presente esempio di costruzione dello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^n)$ colle (a), (1) e (2) dell'esempio 2.2.11 sezione 2.2 relativo allo spazio di Hilbert $\sum^{n \oplus} L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$, ti accorgerai che abbiamo a che fare collo stesso spazio di Hilbert in entrambi i casi:

$$\sum^{n \oplus} L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}) = L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^n)$$

Capitolo 5

SONC in spazi funzionali

5.1 Sistemi ortonormali completi polinomiali in $L_2[a, b]$

In quel che segue, tranne esplicita menzione, $[a, b]$ denoterà un intervallo compatto in \mathbb{R} .

Proposizione 5.1.1 *La famiglia*

$$\{x_n(t) := t^n : t \in [a, b], n = 0, 1, \dots\}$$

è una famiglia libera di vettori in $L_2[a, b]$.

Dimostrazione. Consideriamo $\sum_{j=0}^n \lambda_j x_j = \underline{0}$, ove $\underline{0}$ è il vettore nullo di $L_2[a, b]$.

Allora dovrà essere

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j t^j = 0, \quad \text{q.o. in } [a, b],$$

ovvero, scritto per esteso,

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n = 0, \quad \text{q.o. in } [a, b]$$

Ma questi è un polinomio in t di grado n il quale, nel caso in cui non sia q.o. nullo, ammette *al più* n valori in $[a, b]$ che lo annullano. Pertanto la relazione $\sum \lambda_j t^j = 0$, q.o. in $[a, b]$, è vera sse

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Dal teorema 3.4.2 sappiamo che il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (G.S.) permette di costruire, a partire dalla famiglia libera $\{t^n\} \subseteq L_2[a, b]$ una famiglia di vettori

$$\{\bar{P}_n(t) : t \in [a, b], n = 0, 1, 2, \dots\} \subseteq L_2[a, b]$$

tale che:

- (i) $\{\bar{P}_n\}$ è un son;

$$(ii) \bar{P}_n(t) = \sum_{j=0}^n \alpha_{nj} t^j, \quad \text{con } \alpha_{nn} \neq 0$$

$$(iii) t^n = \sum_{i=0}^n \beta_{ni} \bar{P}_i(t), \quad \text{con } \beta_{nn} \neq 0$$

e tale famiglia $\{\bar{P}_n(t)\}$ é determinata da queste tre proprietà in maniera univoca, a meno di fattori di fase di modulo 1. Si osservi che dalla (ii) segue che $\bar{P}_n(t)$ é un polinomio di grado n . \square

Teorema 5.1.2 *Il son polinomiale in $L_2[a, b]$ (unico a meno di fattori di fase) $\{\bar{P}_n(t)\}$ ottenuto tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt a partire dalla famiglia libera $\{x_n(t) := t^n\}$ é completo.*

Dimostrazione. Poiché $[a, b]$ é compatto, sappiamo che

$$\overline{\mathcal{C}[a, b]}^{(2)} = L_2[a, b] \quad (1)$$

Inoltre, dal teorema di approssimazione di Weierstrass si ricava che:

$$\forall f \in \mathcal{C}[a, b], \quad \exists \{p_k\} \subseteq P[a, b] \quad \text{t.c.} \quad \lim \|p_n - f\|_\infty = 0 \quad (2)$$

Sappiamo pure che su $\mathcal{C}[a, b]$, la convergenza uniforme implica la convergenza in media quadratica, e dunque da (2) otteniamo:

$$\forall f \in \mathcal{C}[a, b], \quad \exists \{p_k\} \subseteq \mathcal{P}[a, b] \quad \text{t.c.} \quad \lim \|p_n - f\|_2 = 0 \quad (3)$$

e questa equivale a dire che:

$$\mathcal{C}[a, b] \subseteq \overline{\mathcal{P}[a, b]}^{(2)} \quad (4)$$

la quale, unita alla (1), ci dà:

$$\overline{\mathcal{P}[a, b]}^{(2)} = L_2[a, b] \quad (5)$$

Tenendo allora presente che $Sp\{t^n\} = \mathcal{P}[a, b]$, e ricordando che i $\bar{P}_n(t)$ ottenuti con il procedimento di ortonormalizzazione di G.S. soddisfano a:

$$\vee\{t^n\} = \vee\{\bar{P}_n(t)\}$$

dalla (5) ricaviamo immediatamente

$$\vee\{\bar{P}_n(t)\} = L_2[a, b]$$

che é equivalente a dire che il son $\{\bar{P}_n(t)\}$ é in effetti un sonc. \square

Esempio 5.1.3 In $L_2[-1, 1]$ i primi tre elementi ottenuti direttamente usando il procedimento di ortonormalizzazione di G.S. a partire dalla famiglia libera $\{x_n(t) = t^n\}$ sono i seguenti

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \bar{P}_1(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ \bar{P}_2(t) &= \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

■

5.2 Polinomi di Legendre

I *polinomi di Legendre* sono i polinomi che costituiscono il sonc analizzato nel paragrafo precedente, nel caso particolare in cui l'intervallo compatto in esame é $[-1, 1]$.

Proposizione 5.2.1 *In $L_2[-1, 1]$ il sonc polinomiale ottenuto secondo il procedimento del teorema precedente é espresso, a meno di fattori di fase unitari, dalla formula:*

$$(5.1) \quad \bar{P}_n(t) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

La relazione

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

si chiama formula di Rodrigues e si può porre sotto la forma alternativa:

$$(5.2) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{m \geq p}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \frac{2m!}{(2m-n)!} t^{2m-n}$$

ove

$$p = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Il polinomio (5.2), che é un polinomio di grado n , é chiamato polinomio di Legendre.

Dimostrazione. Il son del procedimento di ortonormalizzazione di G.S. é determinato univocamente, a meno di fattori di fase arbitrari, dalle condizioni (i)-(iii). Pertanto, se le funzioni (5.1) soddisfano queste tre condizioni esse, a meno di fattori di fase unitari, costituiscono il sonc cercato. Procediamo allora nella dimostrazione che le (5.1) soddisfano la (i). A questo scopo, consideriamo

$$R_n(t) := \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

che, a meno di un fattore costante, coincide con $\bar{P}_n(t)$. In primo luogo cominciamo col verificare che $\{R_n(t)\}_n$ é un sistema ortogonale.

Sia $n \neq m$. Possiamo supporre $n > m$. Allora:

$$\int_{-1}^1 R_n(t) R_m(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m dt$$

(integrando per parti)

$$\begin{aligned} &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^m \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (t^2 - 1)^m dt \end{aligned}$$

Ora, poiché $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2 - 1)^n = (t^2 - 1)[\dots]$, risulterà

$$\int_{-1}^1 R_n(t) R_m(t) dt = - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(t^2 - 1)^n \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}(t^2 - 1)^m dt$$

Procedendo in tal modo n volte, otteniamo

$$\int_{-1}^1 R_n(t) R_m(t) dt = (-1)^n \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2 - 1)^m dt$$

Ora, essendo $n > m$, sarà $n + m > 2m$, e perciò $\frac{d^{m+n}}{dt^{m+n}}(t^2 - 1)^m = 0$ cosicché

$$\int_{-1}^1 R_n(t) R_m(t) dt = 0 \quad \text{per } n \neq m$$

Ne segue immediatamente che

$$\int_{-1}^1 \bar{P}_n(t) \bar{P}_m(t) dt = 0 \quad \text{per } n \neq m$$

Andiamo ora a verificare che ogni \bar{P}_n ha norma unitaria

$$\int_{-1}^1 (\bar{P}_n(t))^2 dt = \frac{2n+1}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n dt$$

procedendo come prima con $R_n(t)$

$$= \frac{(2n+1)(-1)^n}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(t^2 - 1)^n dt$$

Ma

$$(t^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} t^{2k}$$

e perciò:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{dt^{2n}}(t^2 - 1)^n &= \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \left((-1)^n + (-1)^{n-1} n t^2 + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} t^4 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \binom{n}{n-1} (-1) t^{2n-2} + t^{2n} \right) = (2n)! \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\int_{-1}^1 (\bar{P}_n(t))^2 dt = \frac{(2n+1)!(-1)^n}{2^{2n+1}(n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$$

Posto $t = \sin \vartheta$, avremo che:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos^{2n} \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n+1} \vartheta d\vartheta = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!(-1)^n} \end{aligned}$$

Per cui

$$\int_{-1}^1 (\overline{P}_n(t))^2 dt = 1$$

Abbiamo così dimostrato che $\{\overline{P}_n\}$ soddisfa la (i). Verifichiamo ora che esso soddisfa la (ii). Ricordiamo che:

$$\frac{d^n}{dt^n} t^p = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} t^{p-n} & n \leq p \\ 0 & n > p \end{cases}$$

Da cui si ottiene la

$$(1) \quad \frac{d^n}{dt^n} t^{2m} = \begin{cases} \frac{(2m)!}{(2m-n)!} t^{2m-n} & n \leq 2m \\ 0 & n > 2m \end{cases}$$

Poiché

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n &= \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^{n-m} t^{2m} \right] \\ &= \sum_0^n \binom{n}{m} (-1)^{n-m} \frac{d^n}{dt^n} t^{2m} \end{aligned}$$

Possiamo considerare i due casi:

1^o **Caso:** n pari. Allora la (1) implica in questo caso particolare

$$(3) \quad \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = \sum_{m=\frac{n}{2}}^n \binom{n}{m} (-1)^{n-m} \frac{(2m)!}{(2m-n)!} t^{2m-n}$$

2^o **Caso:** n dispari. Ancora la (1) implica che:

$$(4) \quad \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = \sum_{m=\frac{n+1}{2}}^n \binom{n}{m} (-1)^{n-m} \frac{(2m)!}{(2m-n)!} t^{2m-n}$$

In entrambi i casi si ottiene un polinomio di grado n , e perciò \overline{P}_n è un polinomio di grado n : la (ii) è così verificata. Si osservi che le (3) e (4) dimostrano la (5.2).

Diamo ora una traccia della verifica della (iii). Vogliamo in sostanza trovare, per ogni n fissato, degli scalari $b_{n0}, b_{n1}, \dots, b_{nn}$, con $b_{nn} \neq 0$, in modo che sia

$$(5) \quad t^n = b_{n0} \overline{P}_0(t) + b_{n1} \overline{P}_1(t) + \dots + b_{nn} \overline{P}_n(t)$$

Abbiamo prima dimostrato che ogni \overline{P}_k è un polinomio di grado k e dunque è della forma:

$$(6) \quad \overline{P}_k(t) = a_{k0} + a_{k1}t + a_{k2}t^2 + \dots + a_{kk}t^k$$

ove gli a_{kj} sono determinati dalla formula (2.1). (Per la semplice linea concettuale della dimostrazione di (iii) non ci serve in questo momento trovare

l'effettivo valore degli a_{kj} , cosa che lasciamo per esercizio al lettore). Tramite la (6), la (5) diviene:

$$\begin{aligned} t^n = & b_{n0}a_{00} + b_{n1}(a_{10} + a_{11}t) + b_{n2}(a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2) + \\ & + b_{n3}(a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3) \\ & + \dots + b_{nn}(a_{n0} + a_{n1}t + \dots + a_{nn}t^n) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} t^n = & (b_{n0}a_{00} + b_{n1}a_{10} + b_{n2}a_{20} + \dots + b_{nn}a_{n0}) \\ & + (b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + b_{n3}a_{31} + \dots + b_{n,n-1}a_{n-1,n} + b_{nn}a_{n1})t \\ & + (b_{n2}a_{22} + b_{n3}a_{32} + \dots + b_{nn}a_{n2})t^2 \\ & + \dots + \\ & + (b_{n,n-1}a_{n-1,n-1} + b_{nn}a_{n,n-1})t^{n-1} \\ & + b_{nn}a_{nn}t^n \end{aligned}$$

Ne segue, per il noto principio d'identità dei polinomi (due polinomi sono uguali se hanno gli stessi coefficienti), che deve essere:

$$\begin{aligned} b_{n0}a_{00} + b_{n1}a_{10} + b_{n2}a_{20} + b_{n3}a_{30} \\ + \dots + b_{n,n-1}a_{n-1,0} + b_{nn}a_{n0} = 0 \end{aligned}$$

$$b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + b_{n3}a_{31} + \dots + b_{n,n-1}a_{n-1,1} + b_{nn}a_{n1} = 0$$

$$b_{n2}a_{22} + b_{n3}a_{32} + \dots + b_{n,n-1}a_{n-1,2} + b_{nn}a_{n2} = 0$$

⋮

$$b_{n,n-1}a_{n-1,n-1} + b_{nn}a_{n,n-1} = 0$$

$$b_{nn}a_{nn} = 1$$

Risolvendo tale sistema, mettendo al posto degli a_{kj} i loro effettivi valori, si determinano i coefficienti b_{n0}, \dots, b_{nn} cercati. \square

Esempio 5.2.2 I primi polinomi di Legendre calcolati secondo la (5.2) sono:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \left(\frac{3}{2}\right)t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P_3(t) = \left(\frac{5}{2}\right)t^3 - \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$P_4(t) = \left(\frac{35}{8}\right)t^4 - \left(\frac{15}{4}\right)t^2 + \frac{3}{8}$$

■

Proposizione 5.2.3 *L'equazione differenziale di Legendre*

$$(t^2 - 1)y'' + 2ty' - \lambda y = 0$$

ammette come soluzione il polinomio di Legendre $P_n(t)$ in corrispondenza del valore

$$\lambda = n(n+1)$$

Dimostrazione. Dall'identità

$$(t^2 - 1) \frac{d}{dt} (t^2 - 1)^n = 2nt(t^2 - 1)^n$$

segue:

$$(1) \quad \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[(t^2 - 1) \frac{d}{dt} (t^2 - 1)^n \right] - \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [2nt(t^2 - 1)^n] = 0$$

Ricordiamo che se $f, g \in \mathcal{C}^n$, allora

$$\frac{d^n}{dt^n} [f \cdot g] = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{d^m f}{dt^m} \cdot \frac{d^{n-m} g}{dt^{n-m}}$$

Ne segue:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[(t^2 - 1) \frac{d}{dt} (t^2 - 1)^n \right] &= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} \frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1) \frac{d^{n+2-m}}{dt^{n+2-m}} (t^2 - 1)^n \\ &= (t^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} (t^2 - 1)^n + 2t(n+1) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (t^2 - 1)^n \\ &\quad + n(n+1) \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \end{aligned}$$

Analogamente si ha:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} [2nt(t^2 - 1)^n] &= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} \frac{d^m}{dt^m} (2nt) \frac{d^{n+2-m}}{dt^{n+2-m}} (t^2 - 1)^n \\ &= 2nt \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (t^2 - 1)^n + 2n(n+1) \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \end{aligned}$$

Sostituite le due relazioni (2) e (3) nella (1), si ricava

$$(4) \quad (t^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} (t^2 - 1)^n + 2t \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (t^2 - 1)^n - n(n+1) \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n = 0$$

Ricordando che

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

si ricava

$$\begin{aligned} (t^2 - 1)P_n''(t) + 2tP_n'(t) - n(n+1)P_n(t) &= \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left[(t^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} (t^2 - 1)^n + 2t \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} (t^2 - 1)^n - \right. \\ &\quad \left. - n(n+1) \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \right] = \\ &= (\text{dalla (4)}) = 0 \end{aligned}$$

□

Osservazione 5.2.4 Introdotta l'operatore

$$L = (t^2 - 1) \frac{d^2}{dt^2} + 2t \frac{d}{dt}$$

opportunamente definito in una varietà lineare \mathcal{D}_L di $L_2[-1, 1]$, avremo che L è lineare e l'equazione differenziale di Legendre assume la forma di una equazione agli autovalori:

$$Ly = \lambda y, \quad \text{per } y \in \mathcal{D}_L$$

Il polinomio di Legendre $P_n(t)$ è pertanto un autovettore di L corrispondente all'autovalore

$$\lambda = n(n+1)$$

Si osservi che si può anche porre

$$L = \frac{d}{dt} \left[(t^2 - 1) \frac{d}{dt} \right]$$

5.3 Polinomi di Hermite

Se vogliamo estendere il ragionamento fatto nel paragrafo 2 a proposito della famiglia libera di vettori $\{t^n\}$, intesi come elementi dello spazio di Hilbert $L_2(a, b)$, nella situazione più generale degli spazi di Hilbert $L_2(\alpha, \beta)$, per esempio $L_2(-\infty, \infty)$ (oppure $L_2(0, \infty)$ o $L_2(-\infty, 0)$), ci troviamo di fronte al problema che le funzioni t^n non appartengono a tali spazi. Una possibilità di risolvere questa situazione consiste nel moltiplicare i vettori di tale famiglia per una opportuna *funzione peso* $w(t)$ in modo tale che la successione $\{w(t)t^n\}$ sia costituita da funzioni appartenenti allo spazio di Hilbert in esame. Per esempio, nel caso dello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ si assegna come funzione peso la funzione $w(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$, ove il fattore $\frac{1}{2}$ nell'esponente è preso per un semplice motivo di convenienza formale. In questo paragrafo ci occuperemo appunto di questo caso particolare.

Consideriamo allora in $L_2(\mathbb{R})$ la famiglia di funzioni

$$\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} : n = 0, 1, \dots\}$$

ottenuta moltiplicando ogni elemento della famiglia $\{t^n\}$ di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ per la funzione peso $w(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Si ha il seguente

Teorema 5.3.1 *La famiglia $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$ é una famiglia linearmente indipendente in $L_2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzi tutto che la famiglia appartiene a $L_2(\mathbb{R})$. Dato che

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} (t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}) = 0$$

le funzioni continue $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}$ sono maggiorate da qualche costante $\beta_n > 0$. Ne segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt \leq \beta_{2n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \beta_{2n} \sqrt{2\pi} < \infty$$

ovvero $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} \in L_2(\mathbb{R})$. Inoltre, essendo $e^{-\frac{1}{2}t^2} \neq 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, avremo che la condizione

$$\sum_0^n \alpha_k t^k e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(\sum_0^n \alpha_k t^k \right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

é verificata sse $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$. Tramite il Processo di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt é possibile ottenere una famiglia $\{u_n\}$ di vettori di $L_2(\mathbb{R})$, unica a meno di fattori di fase arbitrari, tale che:

- (i) $\{u_n\}$ é un son
- (ii) $u_n(t) = \left(\sum_{j=0}^n a_{nj} t^j \right) e^{-\frac{1}{2}t^2}$, con $a_{nn} \neq 0$
- (iii) $t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} = \sum_{i=0}^n b_{ni} u_i(t)$, con $b_{nn} \neq 0$

□

Osservazione 5.3.2 Si osservi che dalla (ii) si ha che gli elementi del son sono della forma

$$u_n(t) = \overline{H}_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

con $\overline{H}_n(t)$ polinomio di grado n.

Esercizio 5.3.3 *Si trovino i primi due elementi del son costruito tramite il procedimento di Gram-Schmidt a partire dalla famiglia libera $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$:*

Iniziamo col determinare il primo elemento. Avremo

$$q_0 = e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad \text{da cui} \quad \|q_0\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

e, quindi,

$$u_0 = \frac{q_0}{\|q_0\|} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Per ciò che riguarda il secondo elemento, sappiamo che

$$q_1 = t e^{-\frac{1}{2}t^2} - \left\langle u_0 \mid t e^{-\frac{1}{2}t^2} \right\rangle u_0$$

ma

$$\langle u_0 | te^{-\frac{1}{2}t^2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-t^2}}{\pi^{1/4}} dt = -\frac{1}{2} \frac{e^{-t^2}}{\pi^{1/4}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

per cui

$$\|q_1\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} t \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

concludendo che

$$u_1 = \frac{\sqrt{2} t e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\pi^{1/4}} = -\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} (-2t)$$

I termini della famiglia che si ottengono continuando questo procedimento sono della forma

$$u_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2^n \cdot n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \bar{H}_n(t)$$

Teorema 5.3.4 Considerata la funzione definita da

$$(5.3) \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}$$

essa soddisfa la

$$(5.4) \quad e^{2xt-x^2} = \sum_0^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$$

Dimostrazione. Infatti, per ogni t fissato, lo sviluppo in serie rispetto alla variabile x della funzione e^{2xt-x^2} sarà esprimibile nel seguente modo

$$e^{2xt-x^2} = e^{t^2-(t-x)^2} = e^{t^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$$

ove

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(e^{2xt-x^2} \right) \Big|_{x=0} = H_n(t)$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(e^{2xt-x^2} \right) \Big|_{x=0} &= e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(e^{-(t-x)^2} \right) \Big|_{x=0} \\ &= (\text{ponendo } w = (t-x)) \\ &= (-1)^n e^{t^2} \frac{\partial^n}{\partial w^n} \left(e^{-w^2} \right) \Big|_{w=t} \\ &= (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-t^2} \right) \end{aligned}$$

□

Esempio 5.3.5 Notiamo subito che, tramite la (5.3), possiamo ottenere i primi elementi

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= e^{t^2}(-2te^{-t^2}) = 2t \\ H_2(t) &= -2e^{t^2} \left[\frac{d}{dt}(te^{-t^2}) \right] = -2 + 4t^2 \end{aligned}$$

Anche la (5.4) può essere usata per trovare facilmente le prime funzioni H_n .

$$e^{2xt-x^2} = \sum_0^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n = H_0(t) + H_1(t)x + \frac{H_2(t)}{2}x^2 + \frac{H_3(t)}{6}x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} e^{2xt-x^2} &= 1 + (2xt - x^2) + \frac{(2xt - x^2)^2}{2} + \dots = \\ &= 1 + 2xt + (2t^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}(4t^3 - 6t)x^3 + \dots \end{aligned}$$

Confrontando le due serie abbiamo

$$\begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_2(t) &= 4t^2 - 2 \\ H_3(t) &= 8t^3 - 12t \end{aligned}$$

■

Teorema 5.3.6 Per ogni intero non negativo n le funzioni $H_n(t)$ sono polinomi di grado n espressi estesamente dalla formula

$$(5.5) \quad H_n(t) = n! \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j}$$

dove $N = \frac{n}{2}$, se n è pari, e $N = \frac{(n-1)}{2}$, se è dispari.

Questi polinomi si chiamano polinomi di Hermite. La (5.3) si chiama formula di Rodrigues e la funzione al primo membro della (5.4) funzione generatrice dei polinomi di Hermite.

Dimostrazione.

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2xt)^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j 2^i t^i x^{i+2j}}{i!j!}$$

se poniamo $i + 2j = n$ ed eliminiamo l'indice i , la precedente relazione diviene

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j 2^{n-2j} t^{n-2j}}{(n-2j)!j!} \right] x^n$$

dove $N = \frac{n}{2}$ se n è pari e $N = \frac{(n-1)}{2}$ se n è dispari, ma

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$$

allora

$$H_n(t) = n! \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!} t^{n-2j}$$

□

Teorema 5.3.7 Sia $h_n(t) = (-1)^n e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$ con $0 \leq n < \infty$, allora il polinomio di Hermite di grado n si può esprimere nella seguente forma

$$(5.6) \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} = h_n(t) e^{\frac{1}{2}t^2}$$

Inoltre, la famiglia

$$\left\{ \frac{h_n}{\|h_n\|} = \frac{1}{\|h_n\|} H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \right\}$$

è una base ortonormale di $L_2(\mathbb{R})$, ottenuta applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla famiglia $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$. Le funzioni h_n sono dette funzioni di Hermite.

Dimostrazione. Al solito, per verificare che la famiglia

$$(1) \quad \left\{ \frac{h_n}{\|h_n\|} \right\}$$

è un sonc ottenuto tramite il processo di ortonormalizzazione di G.S. a partire dalla famiglia libera di vettori $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$, a meno di fattori di fase unitari, basterà verificare che essa soddisfa le condizioni (i)-(iii).

Verifichiamo in primo luogo che la famiglia (1) soddisfa la condizione (i) di ortonormalità. Dato che i vettori di tale famiglia sono già normalizzati, basterà dimostrare che

$$\left\langle \frac{h_n}{\|h_n\|} \mid \frac{h_p}{\|h_p\|} \right\rangle = 0 \quad \text{per } n \neq p$$

ovvero che

$$\langle h_n | h_p \rangle = 0 \quad \text{per } n \neq p$$

Per semplicità del discorso supporremo che $p < n$ e considereremo

$$\langle h_n | h_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_p(t) dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_p(t) \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} dt$$

Essendo H_p un polinomio di grado p , l'integrale ora scritto sarà uguale ad una somma di termini del tipo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq p < n < \infty$$

integrando per parti tali termini si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^m \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} dt &= t^m \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - m \int_{-\infty}^{\infty} t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2} dt = \\ &= -m \int_{-\infty}^{\infty} t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-t^2} dt = \dots \\ &= (-1)^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} e^{-t^2} dt \\ &= (-1)^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dt^{n-m-1}} e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Ciò dimostra che la famiglia (1) é ortonormale. Passiamo ora alla condizione (ii). Dalla (5.6) abbiamo che

$$\frac{h_n}{\|h_n\|} = \frac{1}{\|h_n\|} H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

con $H_n(t)$ polinomio di grado n ; ossia esso si ottiene dalla combinazione lineare dei primi n termini della famiglia $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\}$:

$$(2) \quad \frac{h_n}{\|h_n\|} = \left(\sum_{j=0}^n a_{nj} t^j \right) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \text{ con } a_{nn} \neq 0$$

In questo modo si sono verificate le condizioni (i) e (ii) relative al procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt; la condizione (iii) si verifica banalmente tramite lo stesso procedimento usato nel paragrafo 5.2 una volta osservato che, per ogni n fissato, si tratta di trovare degli scalari $b_{n0}, b_{n1}, \dots, b_{nn}$ con $b_{nn} \neq 0$ in modo che sia

$$\begin{aligned} t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} &= \sum_{i=0}^n b_{ni} \frac{h_i(t)}{\|h_i(t)\|} = \text{per la (2)} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^n b_{ni} \left(\sum_{j=0}^i a_{nj} t^j \right) \right) e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

ovvero

$$(5.7) \quad t^n = b_{n0} a_{00} + b_{n1} (a_{10} + a_{11}t) + b_{n2} (a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2) + \\ + b_{n3} (a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3) + \dots + b_{nn} (a_{n0} + a_{n1}t + \dots + a_{nn}t^n)$$

che non é nient'altro che la (7) della proposizione 5.2.1, paragrafo 5.2. La completezza del sistema si dimostra utilizzando la trasformata di Fourier; questa dimostrazione verrà fatta successivamente. \square

Teorema 5.3.8 *La norma di ogni funzione di Hermite é data da*

$$\|h_n(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t)^2 e^{-t^2} dt = 2^n (n!) \sqrt{\pi}$$

Pertanto avremo che

$$(5.8) \quad \frac{h_n}{\|h_n\|} = \left[\frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \right] H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Dimostrazione. Integrando per parti n volte, come nel precedente teorema, e ricordando che dalla (5.5) si ha che il coefficiente del termine di grado n del polinomio H_n é 2^n , avremo che

$$\begin{aligned} \|h_n\| &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

□

Teorema 5.3.9 *I polinomi di Hermite soddisfano le seguenti formule di ricorrenza valide per $n = 1, 2, \dots$*

$$(5.9) \quad H_n'(t) = 2n H_{n-1}(t)$$

$$(5.10) \quad H_{n+1}(t) = 2t H_n(t) - 2n H_{n-1}(t)$$

Dimostrazione. Derivando l'espressione

$$e^{2xt-x^2} = \sum_0^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} x^n$$

rispetto a t abbiamo

$$2x e^{2xt-x^2} = \sum_0^{\infty} \frac{H_n'(t)}{n!} x^n$$

ovvero

$$\sum_0^{\infty} 2 \frac{H_n(t)}{n!} x^{n+1} = \sum_0^{\infty} \frac{H_n'(t)}{n!} x^n$$

Uguagliando i coefficienti di x^n nei due membri di questa espressione si ha

$$\frac{2H_{n-1}(t)}{(n-1)!} = \frac{H_n'(t)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

cioé la (5.9),

$$(1) \quad H_n' = 2n H_{n-1}$$

Dal questa si ottiene

$$(2) \quad H_{n+1}' = 2(n+1) H_n$$

Derivando rispetto a x e a t la funzione generatrice

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{2xt-x^2} = 2(t-x)e^{2xt-x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{2xt-x^2} = 2xe^{2xt-x^2}$$

e dividendo la prima per la seconda si ottiene:

$$(t-x) \frac{\partial}{\partial t} e^{2xt-x^2} = x \frac{\partial}{\partial x} e^{2xt-x^2}$$

Inserendo in questa equazione la definizione della funzione generatrice si ottiene

$$\sum_0^{\infty} \frac{tH'_n(t)}{n!} x^n - \sum_0^{\infty} \frac{nH'_{n-1}(t)}{n!} x^n = \sum_1^{\infty} \frac{nH_n(t)}{n!} x^n$$

eguagliando i coefficienti si avrà allora

$$tH'_n - nH'_{n-1} = nH_n$$

o analogamente

$$tH'_{n+1} - (n+1)H'_n = (n+1)H_{n+1}$$

Sostituendo in questa le espressioni (1) e (2) delle H'_n e H'_{n+1} segue infine

$$2tH_n - 2nH_{n-1} = H_{n+1}$$

□

Teorema 5.3.10 *Il polinomio di Hermite H_n soddisfa l'equazione differenziale*

$$y'' - 2ty' + 2ny = 0$$

Dimostrazione. Dal teorema 5.3.9 abbiamo

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H'_n(t)$$

Derivando ambo i membri si ha

$$H'_{n+1}(t) = 2tH'_n(t) + 2H_n(t) - H''_n(t);$$

dalla (5.9) del teorema 5.3.9 si ha anche

$$H'_{n+1}(t) = 2(n+1)H_n(t)$$

concludendo che

$$H''_n(t) - 2tH'_n(t) + 2nH_n(t) = 0$$

□

Osservazione 5.3.11 Se introduciamo l'operatore differenziale lineare opportunamente definito in $L_2(\mathbb{R})$

$$L = \frac{d^2}{dt^2} - 2t \frac{d}{dt}$$

e consideriamo l'equazione agli autovalori

$$Ly = \lambda y$$

altrimenti scritta

$$y'' - 2ty' - \lambda y = 0$$

il polinomio di Hermite H_n è un autovettore di L corrispondente all'autovalore

$$\lambda = -2n$$

5.4 Polinomi di Laguerre

Consideriamo lo spazio di Hilbert $L_2(0, \infty)$ ed in esso la famiglia di funzioni

$$\{t^n e^{-\frac{1}{2}t} : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

ottenuta moltiplicando ogni elemento della famiglia $\{t^n\}$ di $\mathcal{C}^\infty(0, \infty)$ per la funzione peso $w(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$.

Teorema 5.4.1 *La famiglia $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t}\}$ è una famiglia linearmente indipendente in $L_2(0, \infty)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che la famiglia appartiene ad $L_2(0, \infty)$. Poiché

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^n e^{-\frac{1}{2}t} = 0$$

ed essendo le funzioni $t^n e^{-\frac{1}{2}t}$ continue, esse sono maggiorate da qualche costante $\beta_n > 0$. Allora

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-t} dt \leq \beta_{2n} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t} dt = \beta_{2n} \cdot 2 < \infty$$

Ovvero $t^n e^{-\frac{1}{2}t} \in L_2(0, \infty)$. Inoltre, essendo $e^{-\frac{1}{2}t} \neq 0$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, la equazione

$$\sum_0^n \alpha_k \left(t^k e^{-\frac{1}{2}t}\right) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\sum_0^n \alpha_k t^k\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

è soddisfatta sse $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = 0$. □

Tramite il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt è possibile ottenere una famiglia $\{u_n\}$, unica a meno di fattori di fase unitari, soddisfacente le condizioni:

- (i) $\{u_n\}$ è un son
- (ii) $u_n(t) = \sum_{j=0}^n a_{nj} t^j e^{-\frac{1}{2}t}, \quad a_{nn} \neq 0$

$$(iii) \quad t^j e^{-\frac{1}{2}t} = \sum_{i=0}^n b_{ni} u_i(t), \quad b_{nn} \neq 0$$

Osservazione 5.4.2 Dalla (ii) si ricava che l'elemento u_n del son si può esprimere nel seguente modo

$$u_n(t) = L_n(t) e^{-\frac{1}{2}t}$$

ove

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^n a_{nj} t^j, \quad a_{nn} \neq 0$$

é un opportuno polinomio di grado n .

Esempio 5.4.3 Determiniamo i primi due elementi del son costruito tramite il procedimento di G.S. a partire dalla famiglia libera

$$\{t^n e^{-\frac{1}{2}t}\}.$$

Iniziamo dal primo elemento.

$$q_0 = e^{-\frac{1}{2}t} \quad \text{da cui} \quad \|q_0\| = \left(\int_0^\infty e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

e, quindi

$$u_0 = \frac{q_0}{\|q_0\|} = e^{-\frac{1}{2}t} \quad \text{da cui} \quad L_0 = 1$$

Passiamo ora al secondo elemento. Sappiamo che

$$q_1 = te^{-\frac{1}{2}t} - \langle u_0 | te^{-\frac{1}{2}t} \rangle u_0$$

ma

$$\langle u_0 | te^{-\frac{1}{2}t} \rangle = \int_0^\infty e^{-t} t dt = 1$$

per cui

$$\|q_1\|^2 = \int_0^\infty (t^2 e^{-t} + e^{-t} - 2te^{-t}) dt = 1$$

concludendo che

$$u_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|} = (t-1)e^{-\frac{1}{2}t} \quad \text{da cui} \quad L_1 = (t-1)$$

■

Teorema 5.4.4 Per ogni intero non negativo n le funzioni definite da

$$(5.11) \quad L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (4.1)$$

sono polinomi di grado n in t dati dalla espressione

$$(5.12) \quad L_n(t) = \sum_0^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 k! t^{n-k}$$

Si osservi che il coefficiente del termine di grado massimo del polinomio $L_n(t)$ é $(-1)^n$.

Dimostrazione. Noi sappiamo che

$$\frac{d^n fg}{dt^n} = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dt^k} \frac{d^{n-k} g}{dt^{n-k}}$$

Pertanto, dalla (5.11), segue che

$$\begin{aligned} L_n(t) &= e^t \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{d^k t^n}{dt^k} \frac{d^{n-k} e^{-t}}{dt^{n-k}} \\ &= e^t \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-t} \\ &= \sum_0^n \binom{n}{k}^2 t^{n-k} k! (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

□

Esempio 5.4.5 Dalla (4.1) si ottengono direttamente i seguenti polinomi

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= 1 - t \\ L_2(t) &= 2 - 4t + t^2 \end{aligned}$$

Notiamo che i primi due polinomi coincidono con quelli ricavati direttamente tramite G.S. a meno di fattori di fase unitari. ■

Teorema 5.4.6 *Sia*

$$l_n(t) = e^{\frac{1}{2}t} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad 0 \leq n \leq \infty$$

Allora avremo che

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = l_n(t) e^{\frac{1}{2}t}$$

Inoltre

$$\|l_n\| = n!$$

e la famiglia

$$\left\{ \frac{l_n}{n!} = \frac{1}{n!} L_n e^{-\frac{1}{2}t} \right\}$$

è una base ortonormale di $L_2(0, \infty)$ ottenuta applicando il procedimento di ortonormalizzazione di G.S. alla famiglia $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t}\}$. Le funzioni l_n vengono chiamate funzioni di Laguerre mentre i polinomi L_n sono detti polinomi di Laguerre di grado n . La (5.11) è detta formula di Rodrigues per i polinomi di Laguerre.

Dimostrazione. La prima affermazione, ovvero che L_n è un polinomio di grado n , è stata dimostrata nel precedente teorema. Per verificare che $\{\frac{L_n}{n!}\}$ è un son basterà dimostrare che $\langle l_n | l_m \rangle = 0$, $m \neq n$ e $\|l_n\| = n!$. Supposto $m \leq n$, avremo

$$(1) \quad \langle l_n | l_m \rangle = \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \int_0^\infty L_m(t) \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} dt$$

dal fatto che L_m è un polinomio di grado m l'integrale sopra scritto sarà uguale ad una somma di termini del tipo:

$$\int_0^\infty t^p \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} dt, \quad 0 \leq p \leq m \leq n < \infty$$

integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^p \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} dt &= t^p \frac{d^{n-1} t^n e^{-t}}{dt^{n-1}} \Big|_0^\infty - p \int_0^\infty t^{p-1} \frac{d^{n-1} t^n e^{-t}}{dt^{n-1}} dt \\ &= -p \int_0^\infty t^{p-1} \frac{d^{n-1} t^n e^{-t}}{dt^{n-1}} dt = \dots \\ &= (-1)^p p! \int_0^\infty \frac{d^{n-p} t^n e^{-t}}{dt^{n-p}} dt \end{aligned}$$

A questo punto possiamo considerare due casi.

- **Caso $p = n$.** Rispetto al quale risulta

$$(2) \quad \int_0^\infty t^n \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} dt = (-1)^n n! \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = (-1)^n (n!)^2$$

- **Caso $p < n$.** Rispetto al quale risulta

$$(3) \quad \int_0^\infty t^p \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} dt = (-1)^p p! \frac{d^{n-p-1} t^n e^{-t}}{dt^{n-p-1}} \Big|_0^\infty = 0$$

Utilizzando questi risultati e tenendo presente che $L_n(t)$ è un polinomio di grado n con coefficiente del termine di grado n uguale a $(-1)^n$, dalla (1) e dalla (2) seguirà

$$\begin{aligned} \|l_n\|^2 &= \int_0^\infty L_n(t) d^n \left(\frac{t^n e^{-t}}{t^n} \right) dt = (-1)^n \int_0^\infty t^n \left(\frac{d^n t^n e^{-t}}{t^n} \right) dt = \\ &= (-1)^n (-1)^n (n!)^2 = (n!)^2 \end{aligned}$$

mentre se $m \neq n$, supponendo senza perdere in generalità che $m < n$, per la (3) avremo che

$$\langle l_n | l_m \rangle = 0$$

Ciò dimostra che la famiglia $\{\frac{L_n}{n!}\}$ è ortonormale inoltre, essendo $l_n = L_n e^{-\frac{1}{2}t}$, con L_n polinomio di grado n , essa si ottiene dalla combinazione lineare di termini della famiglia $\{t^n e^{-\frac{1}{2}t}\}$. L'ultima condizione relativa al procedimento di ortonormalizzazione di G.S. segue banalmente. Prima di passare alla dimostrazione della completezza del sistema ortonormale delle funzioni di Laguerre ricaviamo alcuni risultati che saranno particolarmente utili a tal fine.

□

Teorema 5.4.7 *I polinomi di Laguerre soddisfano la relazione*

$$(5.13) \quad \frac{1}{1-x} e^{-\frac{tx}{1-x}} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(t) x^n, \quad \text{per } x \in (-1, 1), t \in \mathbb{R}$$

La funzione al primo membro ora introdotta é detta funzione generatrice dei polinomi di Laguerre.

Dimostrazione. Ricordiamo il seguente risultato sulla serie binomiale (vedi T.M. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley, 1974, paragrafo 9.21) valido per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$(1+t)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} t^n, \quad -1 < t < 1$$

ove

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$$

Dimostriamo ora la (5.13)

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{tx}{1-x}}}{1-x} &= \frac{1}{1-x} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{tx}{1-x} \right)^j \frac{1}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j t^j x^j (1-x)^{-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (-1)^j t^j x^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-j-1)\dots(-j-k)}{k!} (-1)^k x^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+2k} (j+k)!}{k! (j!)^2} t^j x^{j+k} \end{aligned}$$

Ponendo $j+k=n$ ed eliminando k si ha:

$$\frac{e^{-\frac{tx}{1-x}}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j n!}{(j!)^2 (n-j)!} t^j x^n$$

essendo $j = n - k$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{tx}{1-x}}}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^2 k! t^{n-k} \right] x^n \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} x^n \end{aligned}$$

□

Corollario 5.4.8 *Per ogni intero $m \geq 0$ abbiamo*

$$(5.14) \quad e^{-mt - \frac{1}{2}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} \frac{l_n(t)}{n!}$$

ove la serie al secondo membro é convergente sia punto per punto per ogni $t \in \mathbb{R}$ che in media quadratica.

Dimostrazione. Se nella (5.14) poniamo $x = \frac{m}{m+1} < 1$ avremo che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{1 - \frac{m}{m+1}} e^{-\frac{t \frac{m}{m+1}}{1 - \frac{m}{m+1}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n(t) \left(\frac{m}{m+1} \right)^n$$

da cui ricaviamo

$$e^{-mt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} L_n(t)$$

e, infine,

$$\begin{aligned} e^{-mt} e^{-\frac{1}{2}t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} \frac{L_n(t) e^{-\frac{1}{2}t}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} \frac{l_n(t)}{n!} \end{aligned}$$

Passiamo ora a dimostrare il secondo punto. Sappiamo che il sistema infinito numerabile di Laguerre $\left\{ \frac{l_n}{n!} \right\}$ é ortonormale. Considerata allora la successione di scalari

$$\alpha_n = \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}}$$

la corrispondente serie dei quadrati dei moduli

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m}{m+1} \right)^{2n}$$

per $m = 0$ é ovviamente convergente mentre per $m \neq 0$ é il prodotto della quantità costante $\frac{1}{(m+1)^2}$ per la serie geometrica convergente di ragione $\left(\frac{m}{m+1} \right)^2 < 1$ e quindi sarà essa pure convergente. Da questo risultato, per il teorema di Fisher-Riesz abbiamo che la serie $\sum_n \alpha_n \frac{l_n}{n!}$ é convergente nello spazio di Hilbert $L_2(0, \infty)$. Siccome questa serie converge punto per punto, per ogni $t \in (0, \infty)$, alla funzione $e^{-mt - \frac{1}{2}t}$ ed é di Cauchy in $L_2(0, \infty)$, essa é convergente alla stessa funzione rispetto alla norma di $L_2(0, \infty)$. \square

Lemma 5.4.9 *Se $f \in L_2(0, \infty)$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio in e^{-t}*

$$p(e^{-t}) = \sum_{m=0}^n \alpha_m e^{-mt}$$

tale che

$$\left\| f(t) - e^{-\frac{1}{2}t} p(e^{-t}) \right\| < \epsilon$$

Dimostrazione. Posto $f_1(t) = e^{\frac{1}{2}t} f(t)$ definita per $t \in (0, \infty)$ e operata la sostituzione $t = \log \left(\frac{1}{y} \right)$, (da cui $dt = -y^{-1} dy$), otteniamo la funzione $f_1 \left(\log \frac{1}{y} \right) =$

$\frac{1}{\sqrt{y}} f\left(\log \frac{1}{y}\right)$, definita per $y \in (0, 1)$. Dal fatto che $f(t) \in L_2(0, \infty)$ segue che $f_1\left(\log \frac{1}{y}\right) \in L_2(0, 1)$; infatti

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t)|^2 dt &= - \int_1^0 \left| f\left(\log \frac{1}{y}\right) \right|^2 y^{-1} dy = \\ &= \int_0^1 \left| f\left(\log \frac{1}{y}\right) \right|^2 y^{-1} dy \end{aligned}$$

Applicando il teorema di approssimazione di Weierstrass nello spazio $L_2(0, 1)$ avremo che per ogni $\epsilon > 0$ esisterà un polinomio in y tale che

$$\left\| f_1\left(\log \frac{1}{y}\right) - p(y) \right\|_{2;(0,1)} < \epsilon$$

ma

$$\begin{aligned} \left\| f_1\left(\log \frac{1}{y}\right) - p(y) \right\|_{2;(0,1)}^2 &= \int_0^1 \left| f_1\left(\log \frac{1}{y}\right) - p(y) \right|^2 dy \\ &= - \int_\infty^0 |f_1(t) - p(e^{-t})|^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty \left| e^{\frac{1}{2}t} f(t) - p(e^{-t}) \right|^2 e^{-t} dt \\ &= \left\| f(t) - e^{-\frac{1}{2}t} p(e^{-t}) \right\|_{2;(0,\infty)}^2 \end{aligned}$$

□

Teorema 5.4.10 *Il sistema ortonormale $\left\{\frac{l_n}{n!}\right\}$ è completo.*

Dimostrazione. Dal lemma precedente abbiamo che per ogni $f \in L_2(0, \infty)$ e ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{m=0}^n \alpha_m e^{-mt - \frac{1}{2}t} \right\| &= \left\| f - \sum_{m=0}^n \alpha_m \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} \frac{l_n}{n!} \right) \right\| \\ &= \left\| f - \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{m=0}^n \alpha_m \frac{m^n}{(m+1)^{n+1}} \right) \frac{l_n}{n!} \right\| < \epsilon \end{aligned}$$

Essendo

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{m=0}^n \alpha_m \frac{m^n}{(m+1)^n} \right) \frac{l_n}{n!} \in V\left(\frac{l_n}{n!}\right)$$

il teorema è dimostrato. □

Teorema 5.4.11 *Il polinomio di Laguerre L_n soddisfa l'equazione differenziale*

$$(5.15) \quad ty'' + (1-t)y' + ny = 0$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L_n(t) &= e^t \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} \\ L'_n(t) &= e^t \frac{d^{n+1} t^n e^{-t}}{dt^{n+1}} + e^t \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} \\ L''_n(t) &= e^t \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} + 2e^t \frac{d^{n+1} t^n e^{-t}}{dt^{n+1}} + e^t \frac{d^{n+2} t^n e^{-t}}{dt^{n+2}} \end{aligned}$$

Pertanto, la equazione (5.15) sarà soddisfatta da L_n sse

$$\begin{aligned} te^t \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} + 2te^t \frac{d^{n+1} t^n e^{-t}}{dt^{n+1}} + te^t \frac{d^{n+2} t^n e^{-t}}{dt^{n+2}} + \\ + (1-t)e^t \frac{d^{n+1} t^n e^{-t}}{dt^{n+1}} + e^t(1-t) \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} + ne^t \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} = 0 \end{aligned}$$

ovvero, sse

$$(1) \quad (1+t)e^t \frac{d^{n+1} t^n e^{-t}}{dt^{n+1}} + (1+n)e^t \frac{d^n t^n e^{-t}}{dt^n} + e^t t \frac{d^{n+2} t^n e^{-t}}{dt^{n+2}} = 0$$

Usando la formula per la derivata di un prodotto si ottiene la seguente forma estesa della (1).

$$\begin{aligned} (1+t) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k t^n}{dt^k} \frac{d^{n+1-k} e^{-t}}{dt^{n+1-k}} + (1+n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k t^n}{dt^k} \frac{d^{n-k} e^{-t}}{dt^{n-k}} + \\ + t \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} \frac{d^k t^n}{dt^k} \frac{d^{n+2-k} e^{-t}}{dt^{n+2-k}} = 0 \end{aligned}$$

ulteriormente esplicitata nella

$$\begin{aligned} (1+t) \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{n}{k} k! (-1)^{n+1-k} t^{n-k} + \\ + (1+n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 k! (-1)^{n-k} t^{n-k} + \\ + \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} \binom{n}{k} k! (-1)^{n-k} t^{n-k+1} = 0 \end{aligned}$$

che con un ulteriore passaggio si trasforma nella

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{n}{k} k! (-1)^{n+1-k} t^{n-k} \\ + (1+n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 k! (-1)^{n-k} t^{n-k} \\ + \sum_{k=0}^n \left[\binom{n+2}{k} - \binom{n+1}{k} \right] \binom{n}{k} k! (-1)^{n-k} t^{n-k+1} = 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{n}{k} k! (-1)^{n+1-k} t^{n-k} + \\ + (1+n) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 k! (-1)^{n-k} t^{n-k} + \\ + \sum_{k=-1}^{n-1} \left[\binom{n+2}{k+1} - \binom{n+1}{k+1} \right] \binom{n}{k+1} (k+1)! (-1)^{n-k-1} t^{n-k} = 0$$

Si verifica facilmente che i coefficienti dei termini di grado $n+1$ e 0 sono nulli. Infatti, il coefficiente del termine di grado $n+1$ é

$$\left[\binom{n+2}{0} - \binom{n+1}{0} \right] \binom{n}{0} 0! (-1)^n$$

che é 0 , ed é 0 anche $-(n+1)n! + (1+n)n!$ che é il coefficiente del termine di grado 0 .

Essendo la (2) un polinomio, esso risulterà identicamente nullo per ogni t se e solo se i coefficienti dei termini di ogni grado sono nulli. I coefficienti non nulli del polinomio (2) sono i coefficienti dei termini di grado $n, n-1, \dots, 1$ e, quindi, dovrà essere per $j = 0, 1, \dots, n-1$.

$$(3) \quad \binom{n+1}{j} \binom{n}{j} j! (-1)^{n-j+1} + (1+n) \binom{n}{j}^2 (-1)^{n-j} j! + \\ + \left[\binom{n+2}{j+1} - \binom{n+1}{j+1} \right] \binom{n}{j+1} (j+1)! (-1)^{n-j+1} = 0$$

Apportando una ulteriore semplificazione abbiamo che la (3) si riconduce alla

$$(4) \quad -\binom{n+1}{j} \binom{n}{j} + (1+n) \binom{n}{j}^2 + \left[\binom{n+1}{j+1} - \binom{n+2}{j+1} \right] \binom{n}{j+1} (j+1) = 0$$

Tenuto presente che, come si può facilmente verificare,

$$(5) \quad \binom{n}{j+1} = \binom{n}{j} \frac{n-j}{j+1}$$

$$(6) \quad \binom{n+2}{j+1} = \binom{n+1}{j+1} + \binom{n+1}{j}$$

si avrà che la (4) può porsi nella forma

$$-(n-j+1) \binom{n+1}{j} + (1+n) \binom{n}{j} = 0$$

la quale é ovviamente soddisfatta essendo riconducibile alla

$$-\frac{(n+1)!}{j!(n-j)!} + \frac{(n+1)!}{j!(n-j)!} = 0$$

Abbiamo così dimostrato che il polinomio di Laguerre L_n soddisfa l'equazione differenziale (5.15). \square

Osservazione 5.4.12 Se introduciamo l'operatore differenziale lineare opportunamente definito in $L_2(0, \infty)$

$$L = t \frac{d^2}{dt^2} + (1-t) \frac{d}{dt}$$

allora il polinomio di Laguerre L_n é un autovettore dell'operatore L corrispondente all'autovalore $\lambda = -n$; ossia é una soluzione dell'equazione agli autovalori

$$Ly = \lambda y$$

altrimenti scritta

$$ty'' + (1-t)y' - \lambda y = 0$$

corrispondente all'autovalore

$$\lambda = -n$$

Capitolo 6

SONC trigonometrici ed esponenziali di Fourier

6.1 Sonc trigonometrico ed esponenziale di Fourier

Passiamo ora a studiare i più “classici” sonc nello spazio di Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$: il sonc esponenziale e quello trigonometrico.

Proposizione 6.1.1 *Nello spazio di Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$ la famiglia di vettori $\{e_n(t) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ é un son, chiamato son esponenziale.*

Dimostrazione. Poiché $2\pi^{-\frac{1}{2}} e^{int} \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, queste funzioni sono integrabili alla Riemann, e quindi il loro integrale alla Riemann coincide con il loro integrale alla Lebesgue. Si ha poi

$$\begin{aligned} \langle e_n \mid e_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{e}_m e_n dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} \|e_n\|^2 = 1, & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)t}}{2\pi i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto $\langle e_n \mid e_m \rangle = \delta_{n,m}$, e quindi il sistema é ortonormale. Per ciò che riguarda la completezza di questo son, affronteremo il problema studiando prima il caso trigonometrico. \square

Proposizione 6.1.2 *In $L_2[-\pi, \pi]$ la famiglia di vettori*

$$\begin{aligned} e_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ f_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad (n = 1, 2, \dots) \\ g_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

é un son detto son trigonometrico.

Dimostrazione. L'ortonormalità discende dalla ortonormalità del son esponenziale tramite le formule di Eulero

$$(1) \quad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$(2) \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i\sqrt{\pi}}$$

Da (1) e (2) discende allora che:

$$f_n(t) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2\sqrt{\pi}} = \sqrt{2\pi} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}}$$

$$g_n(t) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i\sqrt{\pi}} = \sqrt{2\pi} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}}{2i\sqrt{\pi}} = \frac{e_n - e_{-n}}{i\sqrt{2}}$$

Da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \langle f_n | f_m \rangle &= \left\langle \frac{e^{int} + e^{-int}}{2\sqrt{\pi}} \mid \frac{e^{imt} + e^{-imt}}{2\sqrt{\pi}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \{ \langle e^{int} | e^{imt} \rangle + \langle e^{int} | e^{-imt} \rangle \\ &\quad + \langle e^{-int} | e^{imt} \rangle + \langle e^{-int} | e^{-imt} \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle e_n | e_m \rangle + \langle e_n | e_{-m} \rangle \\ &\quad + \langle e_{-n} | e_m \rangle + \langle e_{-n} | e_{-m} \rangle \} = \delta_{n,m} \end{aligned}$$

In maniera analoga si dimostra che $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ é ortonormale, quindi, sempre con la stessa procedura, si possono verificare tutti gli altri casi possibili, giungendo alla conclusione che la famiglia é un son. \square

Per dimostrare la completezza del son trigonometrico, ci serviamo di alcuni lemmi.

Lemma 6.1.3 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ si ha:

$$(6.1) \quad \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{i\frac{x(n+1)}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

da cui si ricava

$$(6.2) \quad \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (1 - e^{ix}) \sum_{k=1}^n e^{ikt} &= \sum_{k=1}^n (e^{ikx} - e^{i(k+1)x}) \\ &= e^{ix} - e^{2ix} + e^{2ix} - e^{3ix} + \dots - e^{i(n+1)x} \\ &= e^{ix} - e^{i(n+1)x} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$$

Ma

$$\begin{aligned} e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} &= e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{ix} \frac{\left(e^{i\frac{nx}{2}} - \frac{1}{e^{i\frac{nx}{2}}} \right) e^{i\frac{nx}{2}}}{\left(e^{i\frac{x}{2}} - \frac{1}{e^{i\frac{x}{2}}} \right) e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{x}{2}(n+1)} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{x}{2}(n+1)} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sostituito quest' ultimo risultato nella (1), otteniamo:

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{i\frac{x(n+1)}{2}} \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Considerando la parte reale della precedente uguaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos ky &= \frac{\cos\frac{x(n+1)}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = (\text{tramite prostaferesi}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

□

Lemma 6.1.4 Per ogni funzione $f \in L_2[-\pi, \pi]$ si ha:

$$(6.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$$

Dimostrazione. Presa $f \in L_2[-\pi, \pi]$, considerato il son trigonometrico $\{e_0, f_n, g_n\}$, la disuguaglianza di Bessel 3.2.5 in questo caso diviene:

$$\left(|\langle e_0 | f \rangle|^2 + \sum_1^{\infty} |\langle g_n | f \rangle|^2 + \sum_1^{\infty} |\langle f_n | f \rangle|^2 \right) \leq \|f\|^2$$

e ne segue dunque che le serie

$$\sum_1^{\infty} |\langle f_n | f \rangle|^2 \quad \text{e} \quad \sum_1^{\infty} |\langle g_n | f \rangle|^2$$

sono convergenti in \mathbb{R}_+ , e questo implica che

$$\lim_n \langle f_n | f \rangle = \lim_n \langle g_n | f \rangle = 0$$

che é la tesi. □

Lemma 6.1.5 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in [-\pi, \pi]$ vale la uguaglianza

$$(6.4) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)x = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)\frac{x}{2}} &= e^{-i\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^n e^{ikx} = (\text{dalla (6.1) del lemma 6.1.3}) \\ &= e^{-i\frac{x}{2}} e^{i\frac{x(n+1)}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right) \end{aligned}$$

ossia

$$\sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

e la parte immaginaria di questa coincide con la tesi. \square

Consideriamo ora, per ogni $f \in L_2[-\pi, \pi]$, la successione:

$$(6.5) \quad S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

ove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \end{aligned}$$

Queste quantità sono legate ai coefficienti di Fourier della f rispetto al son trigonometrico dalle relazioni

$$(6.6a) \quad \langle e_0 | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0$$

$$(6.6b) \quad \langle f_k | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \sqrt{\pi} a_k$$

$$(6.6c) \quad \langle g_k | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \sqrt{\pi} b_k$$

Esempio 6.1.6 Nel caso particolare della funzione

$$f(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in [-\pi, \pi]$$

si ricava immediatamente che

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) d(kt) = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \cos \varphi d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) d(kt) = \frac{1}{k\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Pertanto avremo che in questo caso

$$S_n(x) = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

■

Osservazione 6.1.7 Dalle relazioni che legano i coefficienti a_0, a_k, b_k ai vari coefficienti di Fourier della f rispetto al son trigonometrico si ottiene facilmente che

$$S_n = \langle e_0 | f \rangle e_0 + \sum_{k=1}^n \left(\langle f_x | f \rangle f_k + \langle g_k | f \rangle g_k \right)$$

ossia S_n é la somma parziale di posto n dello sviluppo in serie di Fourier della f rispetto al son trigonometrico. Pertanto, il son trigonometrico é completo sse é

$$(6.7) \quad \forall f \in \mathcal{L}^2[-\pi, \pi] \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

ove la convergenza coinvolta in questo limite é la convergenza in media quadratica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = 0.$$

Ricordiamo che su un compatto la convergenza in media quadratica implica la convergenza in media.

Facciamo ora osservare che la funzione S_n introdotta dalla (6.5) si può ritenere definita non solo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, ma sull'intero asse reale \mathbb{R} :

$$S_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

In questo caso S_n é una funzione periodica di periodo 2π , ossia soddisfa la condizione

$$S_n(x) = S_n(x + 2\pi) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Questo risultato é una immediata conseguenza del fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π

Da ciò segue che potremo considerare le funzioni S_n non solo come somme parziali di posto n nello sviluppo in serie di Fourier della $f \in L_2[-\pi, \pi]$ rispetto al son trigonometrico, ma, una volta estesa la f per periodicità (di periodo 2π) sull'intero asse reale, la S_n risulta essere in un certo senso la somma parziale della nuova funzione così ottenuta, che per semplicità indicheremo ancora con f . Si osservi che al più bisogna ridefinire nel punto π la f da cui si parte in modo tale che risulti $f(\pi) = f(-\pi)$. Ma in questo caso si ottiene ancora una funzione uguale q.d. alla funzione data e quindi si considera sostanzialmente lo stesso elemento di $L_2[-\pi, \pi]$.

D'ora in avanti considereremo, salvo avviso contrario, sia la f che le S_n come definite sull'intero asse reale con il procedimento di estensione per periodicità visto sopra. Verifichiamo ora che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ottiene che:

$$(6.8) \quad \int_0^a f(t) dt = \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t) dt$$

Infatti, da $f(x) = f(x + 2\pi)$, posto $t = x + 2\pi$, ricaviamo che

$$f(t) = f(t - 2\pi) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

e perciò

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)dt = \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t - 2\pi)dt = \int_0^a f(s)ds$$

Da questo risultato segue che

$$(6.9) \quad \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)dt$$

Infatti

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)dt &= \int_0^a f(t)dt + \int_a^{a+2\pi} f(t)dt + \int_{a+2\pi}^{2\pi} f(t)dt \\ &= \int_0^a f(t)dt - \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(t)dt + \int_a^{a+2\pi} f(t)dt \\ &= \int_a^{a+2\pi} f(t)dt \end{aligned}$$

Dalla relazione (6.9), nel caso $a = 2k\pi$, si ottiene

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt$$

ove l'ultima uguaglianza segue sempre dalla relazione (6.9) considerata nel caso particolare $a = -\pi$. Pertanto se il son trigonometrico é completo dovr  essere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |f(t) - S_n(t)|^2 dt = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

Dalle relazioni (6.5) otteniamo

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \left[\cos(kx) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)dt \right. \\ &\quad \left. + \sin(kx) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n [\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)] \right\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n [\cos k(t-x)] \right\} \\ &= (\text{per la (6.2)}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \end{aligned}$$

ossia

$$(6.10) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} dt$$

L'integrale al secondo membro della (6.10) é detto *integrale di Dirichlet*.

Effettuiamo ora un cambiamento di variabile, ponendo $t - x = y$. Poiché la funzione sotto il segno d'integrazione nella (6.10) é periodica di periodo 2π , l'integrale di questa funzione su ogni segmento di lunghezza 2π , per la (6.9), ha lo stesso valore. Per tale ragione, integrando rispetto alla nuova variabile y , possiamo lasciare gli stessi limiti di integrazione: π e $-\pi$.

Si ha:

$$(6.11) \quad S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}y}{2 \sin \frac{1}{2}y} dy$$

La funzione

$$(6.12) \quad D_n(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}y}{2 \sin \frac{1}{2}y}$$

é chiamato *nucleo di Dirichlet*.

Siamo ora in grado di introdurre il *teorema di Fejer*. Sia

$$S_k(x) \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

la somma parziale d'ordine k della serie di Fourier associata alla funzione f . Poniamo

$$(6.13) \quad \sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k(x)}{n}$$

La funzione σ_n é detta *somma di Fejer* di ordine n della funzione f e, dalla sua definizione, si vede che essa é la media aritmetica delle somme parziali di Fourier

$$S_0, S_1, \dots, S_{n-1}.$$

Dalla definizione (6.13), tenuto conto del valore di $S_k(x)$ trovato in (6.11), si ricava:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2}y}{\sin \frac{1}{2}y} \right] f(x+y) dy = \text{dalla (6.4)} \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2 f(x+y) dy \end{aligned}$$

ossia

$$(6.14) \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2 f(x+y) dy$$

e tale integrale é chiamato *integrale di Fejér*. L'espressione

$$(6.15) \quad \Phi_n(y) = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2$$

si chiama *nucleo di Fejér*. La formula (6.14) può anche essere scritta come

$$(6.16) \quad \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) f(x+y) dy.$$

Lemma 6.1.8 *Il nucleo di Fejér soddisfa le seguenti proprietà*

(i) $\Phi_n(y) \geq 0$;

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y) dy = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Per ogni δ fissato tale che $0 < \delta < \pi$, risulta:

$$\eta(\delta) := \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(y) dy = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dimostrazione. La (i) é un'ovvia conseguenza della definizione di $\Phi_n(y)$.

(ii). Se nella (6.5) si prende $f \equiv 1$, utilizzando l'esempio 6.1.6, si trova che $\sigma_n(x) = 1$ per ogni n .

(iii). Dal fatto che $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, applicato alla (6.15), risulta immediatamente:

$$\eta_n(\delta) = \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(y) dy = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(y) dy$$

Proviamo dunque che

$$\eta_n(\delta) = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Poiché, $\sin y$ é una funzione convessa in 0, notiamo che risulta

$$0 < \delta \leq y \leq \pi \Rightarrow 0 < \frac{\delta}{2} \leq \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{y}{2} \geq \frac{2y}{\pi} \geq \frac{2\delta}{\pi}$$

Ne segue che:

$$\left(\frac{\sin \frac{ny}{2}}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sin \frac{y}{2}} \right)^2 \leq \left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2$$

e la (iii) segue da quest'ultima. □

Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il teorema di Fejèr.

Teorema 6.1.9 *Sia f una funzione continua, periodica di periodo 2π . Allora la successione $\{\sigma_n\}$ delle sue somme di Fejèr, converge uniformemente ad f su tutto \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Poiché f é continua e periodica, essa é limitata ed uniformemente continua (vedi Appendice in fondo alla sezione) su tutto \mathbb{R} , ossia

Limitata:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M,$$

Uniformemente continua:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{\delta} > 0 : |x'' - x'| < \bar{\delta} \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \epsilon/2$$

ove $\bar{\delta}$ non dipende da ϵ .

Prima di tutto diciamo che, una volta fissato $\epsilon > 0$, il $\bar{\delta}$ che esiste in sua corrispondenza, e che soddisfa alla uniforme continuit , é del tipo $\bar{\delta} < \pi$ oppure $\bar{\delta} \geq \pi$. In entrambi i casi é dunque ovvio che esiste un $0 < \delta = \min \{\bar{\delta}, \pi\} < \pi$ a sua volta non dipendente da ϵ , tale che

$$|x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \epsilon/2$$

Per la dimostrazione del teorema, prendiamo $\epsilon > 0$, e valutiamo la differenza $f(x) - \sigma_n(x)$. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_n(x) &= f(x) \cdot 1 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \Phi_n(y) dy = \text{(per la (ii) 6.1.8)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+y)] \Phi_n(y) dy \end{aligned}$$

che pu  essere rappresentata come somma

$$f(x) - \sigma_n(x) = J_- + J_0 + J_+$$

ove:

$$\begin{aligned} J_- &= \int_{-\pi}^{-\delta} [f(x) - f(x+y)] \Phi_n(y) dy \\ J_0 &= \int_{-\delta}^{\delta} [f(x) - f(x+y)] \Phi_n(y) dy \\ J_+ &= \int_{\delta}^{\pi} [f(x) - f(x+y)] \Phi_n(y) dy \end{aligned}$$

Si osservi che

$$|f(x) - \sigma_n(x)| = |J_- + J_0 + J_+| \leq |J_-| + |J_0| + |J_+|.$$

Ora, grazie ad (i) e (iii) del lemma 6.1.8, otteniamo

$$\begin{aligned} |J_-| &\leq 2M\eta_n(\delta) \\ |J_+| &\leq 2M\eta_n(\delta) \end{aligned}$$

mentre per l'uniforme continuit 

$$|J_0| \leq \epsilon/2 \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(y) dy < \epsilon/2$$

Poiché vale la (iii) del lemma 6.1.8, per un fissato ϵ scegliamo n_0 in modo che per $n \geq n_0$ risulti $2M\eta_n(\delta) < \epsilon/4$, cosicché si avrà:

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon$$

e poiché ϵ è arbitrariamente piccolo, e δ non dipende da ϵ , il teorema è provato. \square

Osservazione 6.1.10 Se f è una funzione continua, periodica di periodo 2π , la restrizione della f all'intervallo $[-\pi, \pi]$, che indicheremo ancora con il simbolo f , è una funzione tale che

$$f(\pi) = f(-\pi)$$

pertanto $f \in \mathcal{C}_{//}[-\pi, \pi]$ ove, $\mathcal{C}_{//}[-\pi, \pi] = \{f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$.

In questo caso avremo in particolare che la successione $\{\sigma_n\}$ delle somme di Fejér della f converge uniformemente ad f nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Teorema 6.1.11 *Il son trigonometrico $\{e_0, f_k, g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, in $L_2[-\pi, \pi]$ è completo.*

Dimostrazione. Dal teorema di Fejér, per ogni $f \in \mathcal{C}_{//}[-\pi, \pi]$, si ricava che $\infty - \lim \sigma_n(x) = f(x)$ e poiché $[-\pi, \pi]$ è compatto, sappiamo che ciò implica $2 - \lim \sigma_n(x) = f(x)$; ma allora, tenuto conto del fatto che ogni σ_n è combinazione lineare finita di $\{e_0, f_k, g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, segue che

$$\mathcal{C}_{//}[-\pi, \pi] \subseteq \overline{Sp\{e_0, f_k, g_k\}_{k \in \mathbb{N}}^{(2)}}$$

Ma

$$L_2[-\pi, \pi] = \overline{\mathcal{C}_{//}[-\pi, \pi]^{(2)}} \subseteq \overline{Sp\{e_0, f_k, g_k\}_{k \in \mathbb{N}}^{(2)}} \subseteq L_2[-\pi, \pi]$$

implica che:

$$\overline{Sp\{e_0, f_k, g_k\}_{k \in \mathbb{N}}^{(2)}} = L_2[-\pi, \pi]$$

ossia $\{e_0, f_k, g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un sonc. \square

Teorema 6.1.12 *Il son esponenziale è completo.*

Dimostrazione. Essendo

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (e^{inx} + e^{-inx})$$

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} (e^{inx} - e^{-inx})$$

avremo che

$$Sp\{e_0, f_n, g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq Sp\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq L_2[-\pi, \pi]$$

e perciò

$$\overline{Sp\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}^{(2)}} = L_2[-\pi, \pi].$$

\square

APPENDICE

Lemma 6.1.13 *Se f è una funzione continua periodica di periodo 2π allora essa è uniformemente continua sull'intero \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Consideriamo l'intervallo $[0, 4\pi]$; la restrizione della f ad un tale intervallo compatto è uniformemente continua per cui, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $0 < \delta < 4\pi$ tale che $|x' - x''| < \delta$ e $x', x'' \in [0, 4\pi]$ implicano $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Presi ora due qualsiasi punti $x', x'' \in \mathbb{R}$ tali che $|x' - x''| < \delta$ riportiamo per periodicità x' nel punto $x'_1 \in [0, 2\pi]$ e di conseguenza riportiamo per periodicità x'' nel punto x''_1 tale che

$$|x'_1 - x''_1| = |x' - x''|.$$

Se il δ originario è minore o uguale a 2π allora $x''_1 \in [0, 4\pi]$ e perciò $x'_1, x''_1 \in [0, 4\pi]$ con $|x'_1 - x''_1| < \delta$ da cui segue

$$|f(x'_1) - f(x''_1)| = |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Se il δ originario è tale che $2\pi < \delta \leq 4\pi$, si avranno due casi: o $x''_1 \in [0, 4\pi]$, ed allora come prima sarà $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$, oppure $x''_1 \notin [0, 4\pi]$. In questo caso si riporta x''_1 per periodicità nel punto $x''_2 \in [0, 2\pi]$ ottenendo che $|x' - x''| \leq 2\pi$ e quindi sarà:

$$|f(x'_1) - f(x''_2)| = |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

□

6.2 Sviluppi in serie di Fourier trigonometrici ed esponenziali in $L_2[-\pi, \pi]$

Ricordiamo che se $f \in L_2([\alpha, \beta])$ e $\{u_n\}$ è una base ortonormale di questo spazio, allora potremo scrivere lo sviluppo in serie di Fourier della f rispetto alla base ortonormale nel seguente modo:

$$(6.17) \quad f = \sum_n \langle u_n | f \rangle u_n$$

ove

$$(6.18) \quad \langle u_n | f \rangle = \int_{\beta}^{\alpha} \overline{u_n(t)} f(t) dt.$$

Si intende che la convergenza della serie al secondo membro della (6.17) è secondo la norma della convergenza in media quadratica. A volte, se si ha la necessità di indicare la variabile rispetto alla quale si considerano le funzioni in gioco, useremo scrivere la (6.17) anche nel seguente modo:

$$(6.17') \quad f(x) \simeq \sum_n \langle u_n | f \rangle u_n(x)$$

dove il simbolo \simeq sottolinea il fatto che la serie al secondo membro converge alla $f(x)$ in media quadratica e non puntualmente (in tal caso avremmo il simbolo $=$ invece di \simeq).

Nel caso particolare dello spazio di Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$, dalla dimostrazione fatta della completezza dei son esponenziali e trigonometrici, ricaviamo che per ogni $f \in L_2[-\pi, \pi]$ possiamo porre

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

con

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

che é lo sviluppo della f in serie di Fourier rispetto al sonc esponenziale. Lo sviluppo rispetto al sonc trigonometrico é invece dato da

$$(6.19) \quad f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} c'_n \cos(nx) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} c''_n \sin(nx)$$

ove

$$(6.20) \quad \begin{cases} c_0 = \langle e_0 | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ c'_n = \langle f_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ c''_n = \langle g_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{cases}$$

La relazione (6.19) si pone spesso sotto una forma diversa, usando nuovi coefficienti, nel seguente modo:

$$(6.21) \quad f(x) \simeq \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ove

$$(6.22) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{cases}$$

per cui la (6.19) si ottiene dalla (6.21) tramite le sostituzioni

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} c'_n, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} c''_n$$

Proposizione 6.2.1 *Se f é pari, si ha che $b_n = 0$ per ogni n (sviluppo in soli coseni). Se f é dispari, si ha che $a_n = 0$ per ogni n (sviluppo in soli seni).*

Dimostrazione. Se f é pari, si ha che $f(t) \sin(nt)$ é dispari, e dunque $b_n = 0$. Analogamente se f é dispari si ha che $f(t) \cos(nt)$ é dispari, e dunque $a_n = 0$, ed in questo caso é anche $a_0 = 0$. \square

Dal risultato ottenuto sopra deduciamo facilmente l'esistenza di due *sonc* in $L_2[0, \pi]$.

Proposizione 6.2.2 *In $L_2[0, \pi]$ le seguenti due famiglie di vettori sono due *sonc*:*

$$(6.23) \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) : n = 1, 2, \dots \right\}$$

$$(6.24) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nt) : n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Dimostrazione. Dimosteremo l'enunciato solo per la famiglia (6.23). L'altra dimostrazione é analoga. Prima di tutto, é facile verificare che:

- (i) Per un n fissato la funzione $\varphi_n(t) = \sin(nt)$ è la soluzione dell'equazione differenziale alle derivate totali del secondo ordine

$$y'' + n^2 y = 0.$$

- (ii) Le funzioni $\sin(nt)$ si annullano nei punti $t = 0$ e $t = \pi$.

Sia dunque $n \neq m$. Si ha:

$$(1) \quad \varphi_n'' + n^2 \varphi_n = 0$$

$$(2) \quad \varphi_m'' + m^2 \varphi_m = 0$$

Moltiplicando la prima per φ_m e la seconda per φ_n , sottraendo ed integrando, avremo:

$$(3) \quad \int_0^\pi (\varphi_n'' \varphi_m - \varphi_m'' \varphi_n) + (n^2 - m^2) \int_0^\pi \varphi_n \varphi_m = 0$$

Dalla quale, integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\varphi_n'' \varphi_m - \varphi_m'' \varphi_n) &= \\ &= \varphi_n' \varphi_m \Big|_0^\pi - \left(\int_0^\pi \varphi_n' \varphi_m' \right) - \varphi_m' \varphi_n \Big|_0^\pi + \left(\int_0^\pi \varphi_m' \varphi_n' \right) = 0 \end{aligned}$$

essendo φ_n, φ_m nulle agli estremi 0 e π . Dalla (3) segue che

$$\int_0^\pi \varphi_n \varphi_m = 0 \quad \text{ovvero} \quad \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = 0.$$

Da questo risultato, posto $\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt)$, si ricava immediatamente che anche $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0$. La normalità dei vettori é immediata. Infatti, dalla ortonormalità di $\{e_0, f_n, g_n\}$ in $L_2[-\pi, \pi]$ segue:

$$1 = \langle g_n | g_n \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \mid \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sin^2(nt) dt$$

e ciò implica

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) = \pi$$

Notando, inoltre, che $\alpha(t) = \sin^2(nt)$ é una funzione pari, se ne ricava:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt = 2 \int_0^{\pi} \sin^2(nt) dt$$

e perciò la (4) implica che

$$\int_0^{\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{\pi}{2}$$

Allora

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(nt) dt = 1$$

Abbiamo così provato che $\left\{ \psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) : n = 1, 2, \dots \right\}$ é un son. Ci rimane da provare che tale son é completo.

Sia $f \in L_2[0, \pi]$. Definiamo $\hat{f} \in L_2[-\pi, \pi]$ nel seguente modo:

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq \pi \\ -f(-t), & -\pi \leq t \leq 0 \end{cases}$$

La funzione \hat{f} é ovviamente dispari e perciò il suo sviluppo di Fourier in $L_2[-\pi, \pi]$ é dato da:

$$\hat{f}(t) \simeq \sum_1^{\infty} \hat{b}_n \sin(nt)$$

ove

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x) \sin(nx) dx \\ &= (\text{poiché } \hat{f}(x) \cdot \sin(nx) \text{ é una funzione pari}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

Pertanto

$$\hat{f}(t) \simeq \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nt)$$

ove la convergenza in media quadratica impone che:

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left| \hat{f}(t) - \sum_1^k \hat{b}_n \sin(nt) \right|^2 dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Posto

$$g(t) := \hat{f}(t) - \sum_1^k \hat{b}_n \sin(nt)$$

é facile vedere che $g(t)$ é una funzione dispari, ossia $g(-t) = -g(t)$, e da ciò segue che

$$|g(t)|^2 = |g(-t)|^2$$

Pertanto la (5) implica:

$$(6) \quad 2 \int_0^\pi \left| \hat{f}(t) - \sum_1^k \hat{b}_n \sin(nt) \right|^2 dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Infine, tenendo presente che nell'intervallo $[0, \pi]$, $\hat{f}(t) = f(t)$, la (6) diviene:

$$2 \int_0^\pi \left| f(t) - \sum_1^k \hat{b}_n \sin(nt) \right|^2 dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Ne concludiamo che

$$\begin{aligned} f(t) &\simeq \sum_1^\infty \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nt) = \\ &= \sum_1^\infty \left(\int_0^\pi f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) dx \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt) \end{aligned}$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$f \simeq \sum_1^\infty \langle \psi_n | f \rangle \psi_n.$$

□

6.3 Sviluppi in serie di Fourier trigonometrico ed esponenziale in $L_2[a, b]$

Abbiamo così dimostrato che i seguenti sistemi ortonormali sono completi

$L_2[-\pi, \pi]$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, n \in \mathcal{Z}$
$L_2[-\pi, \pi]$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$L_2[-\pi, \pi]$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), n \in \mathbb{N}$
$L_2[-\pi, \pi]$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), n \in \mathbb{N}$
$L_2[0, \pi]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt), n \in \mathbb{N}$

Vogliamo ora generalizzare questi sono al caso di intervalli $[a, b]$ compatti qualsiasi. È facile vedere che, posto

$$t = 2\pi \frac{x-a}{b-a} - \pi \quad (\text{ovvero}) \quad x = \frac{b-a}{2\pi} (t + \pi) + a$$

allora $-\pi \leq t \leq \pi \iff a \leq x \leq b$ e perciò il sistema esponenziale di $L_2[-\pi, \pi]$ si trasforma nel sistema di funzioni (a meno di un opportuno fattore di fase k_n):

$$(6.25) \quad \hat{e}(x) = k_n e^{2\pi i n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)}$$

Questo sistema é ortogonale in $L_2[a, b]$. Sia infatti $n \neq m$, allora

$$\langle \hat{e}_n | \hat{e}_m \rangle = k_n k_m \int_a^b e^{2\pi i (m-n) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)} dx = k_n k_m (b-a) \delta_{n,m}$$

Pertanto $\langle \hat{e}_n | \hat{e}_m \rangle = 0$ per $n \neq m$ e $\|\hat{e}_n\|^2 = |k_n|^2 (b-a)$, e quindi, prendendo nella (6.25) $k_n = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$, il sistema

$$(6.25') \quad \hat{e}(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)}$$

diventa ortonormale.

Inoltre per ogni $f \in L_2[a, b]$ risulta:

$$(6.26) \quad \begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_a^b |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| f \left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a \right) \right|^2 \frac{b-a}{2\pi} dt \\ &= \frac{b-a}{2\pi} \left\| f \left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a \right) \right\|_{(\pi)}^2 \end{aligned}$$

ove (π) indica che si tratta della norma in $L_2[-\pi, \pi]$.

Essendo vera l'uguaglianza di Parseval per il sonc $\{e_n : n \in \mathcal{Z}\}$ in $L_2[-\pi, \pi]$, avremo che

$$\begin{aligned} &\left\| f \left[\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a \right] \right\|_{(\pi)}^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \mid f \left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a \right) \right\rangle_{(\pi)} \right|^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f \left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a \right) dt \right|^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{2\pi}}{b-a} \int_a^b e^{-in2\pi \frac{x-a}{b-a}} e^{in\pi} f(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{2\pi}}{(b-a)^{\frac{1}{2}}} e^{in\pi} \int_a^b \hat{e}_n(x) f(x) dx \right|^2 \\ &= \frac{2\pi}{b-a} \sum_{-\infty}^{+\infty} |\langle \hat{e}_n | f \rangle|^2 \end{aligned}$$

e pertanto, questo risultato, unito al (6.26), dà

$$\|f\|^2 = \sum |\langle \hat{e}_n | f \rangle|^2$$

ossia il sistema ortonormale $\{\hat{e}_n\}$ é completo.

Ragionando in maniera analoga si ottengono in $L_2[a, b]$ i seguenti sonc:

Sonc esponenziale in $L_2[a, b]$

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \frac{x-a}{b-a}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Sonc trigonometrico in $L_2[a, b]$

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \\ f_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(2\pi n \frac{x-a}{b-a}\right), & n \in \mathbb{N} \\ g_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(2\pi n \frac{x-a}{b-a}\right), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sonc dei seni in $L_2[a, b]$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\pi n \frac{x-a}{b-a}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Osservazione 6.3.1 Gli elementi di questo sonc possono ovviamente essere moltiplicati per fattori di fase di modulo unitario, dando come risultato ancora un sonc.

Esempio 6.3.2 Consideriamo l'intervallo $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$, con ω costante reale strettamente positiva. L'applicazione diretta dei risultati ora visti conduce, in particolare, ai seguenti sonc.

Sonc esponenziale in $L_2[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} e^{in\pi} e^{in\omega x}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Sonc trigonometrico in $L_2[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$

$$\begin{cases} e_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \\ f_n = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \cos(n\pi) \cos(n\omega x), & n \in \mathbb{N} \\ g_n = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \cos(n\pi) \sin(n\omega x), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Potremo allora trascurare i fattori di fase unitari, $e^{in\pi}$ nel caso del sonc esponenziale, $\cos(n\pi)$ in quello trigonometrico. ■

6.4 Sviluppo in serie di Fourier come sovrapposizione di armoniche semplici

Nel caso particolare dell'intervallo $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$, ove $\omega > 0$, avremo che ogni $f \in L_2[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ é rappresentabile secondo il seguente sviluppo in serie di Fourier rispetto al sonc trigonometrico:

$$(6.27) \quad f(t) \simeq \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

essendo

$$(6.28) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) dx \\ a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx \\ b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx \end{cases}$$

ovvero

$$(6.29) \quad \begin{cases} \langle e_0 | f \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} a_0 \\ \langle f_n | f \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} a_n \\ \langle g_n | f \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} b_n \end{cases}$$

Analizziamo brevemente lo sviluppo in serie di Fourier di $f \in L_2[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$. Una funzione f , sviluppata come in (6.27), può essere pensata come una funzione definita sull'intero di \mathbb{R} e periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\cos n\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) = \cos(n\omega t);$$

$$\sin n\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) = \sin(n\omega t).$$

Facciamo ora l'ipotesi che la f sia reale. Allora tutti i coefficienti di Fourier (6.29) nella (6.27), ovvero i coefficienti (6.28), sono pure reali, e se nella (6.27) operiamo la sostituzione

$$\begin{cases} a_n = A_n \cos \phi_n \\ b_n = A_n \sin \phi_n \end{cases}$$

essendo

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} = \arcsin \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \end{cases}$$

otteniamo:

$$(6.30) \quad f(t) \simeq \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \phi_n).$$

Infatti,

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) &= A_n \cos \phi_n \cos(n\omega t) + A_n \sin \phi_n \sin(n\omega t) = \\ &= A_n \cos(n\omega t - \phi_n). \end{aligned}$$

Ponendo nella (6.30) $\nu_n = \frac{n\omega}{2\pi}$ otteniamo

$$(6.31) \quad f(t) \simeq \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos(2\pi\nu_n t - \phi_n).$$

Le funzioni

$$(6.32) \quad \begin{aligned} F_n(t) &= A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= A_n \cos(2\pi\nu_n t - \varphi_n) \end{aligned}$$

si dicono *armoniche di rango n* di f . La costante A_n si chiama *ampiezza* della n -esima armonica, mentre la costante φ_n si chiama *fase* dell'armonica. Infine, $n\omega$ si dice *pulsazione* dell'armonica, $\nu_n = \frac{n\omega}{2\pi}$ è la *frequenza* e $T_n = \frac{2\pi}{n\omega}$ è il *periodo* dell'armonica.

Osserviamo che, tramite la (6.32), la (6.30) può scriversi come

$$f(t) \simeq \sum_1^{\infty} F_n(t)$$

che viene chiamata *decomposizione spettrale* della funzione f , periodica di periodo $T_n = \frac{2\pi}{n\omega}$, nelle sue componenti armoniche F_n , di ampiezza A_n e periodo $T_n = \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{T}{n}$.

Vale la proposizione che segue

Proposizione 6.4.1 *L'equazione differenziale*

$$y'' + \lambda y = 0$$

ammette come soluzione l'armonica di rango n

$$F_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

corrispondente al valore $\lambda = n^2\omega^2$.

Osservazione 6.4.2 Introdotta l'operatore differenziale secondo

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

opportunitamente definito in un dominio \mathcal{D} di $L_2\left(\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]\right)$, avremo che L è lineare e l'equazione differenziale precedente assume la forma di una equazione agli autovalori

$$Ly = -\lambda y, \quad y \in \mathcal{D}$$

L'armonica di rango n , $F_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$, è pertanto un autovettore di L corrispondente all'autovalore $\lambda = n^2\omega^2$.

Considerata ora l'armonica semplice (6.32), in molti problemi fisici la quantità $A_n^2/4$ viene interpretata come "energia" dell'armonica in esame.

Osservato che

$$E_n := \frac{A_n^2}{4} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \quad \text{e posto} \quad E_0 := \frac{a_0^2}{8}$$

potremo estendere la nozione di energia anche al caso in cui la f non sia necessariamente reale. Infatti se lo sviluppo in serie di Fourier della f è rappresentato dalla (3.1), considerata l'armonica semplice

$$F_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

definiamo *energia dell'armonica semplice*, la quantità

$$(6.33) \quad E_n := \frac{n\omega}{4\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |F_n(t)|^2 dt.$$

Non é difficile verificare che é:

$$E_n = \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{4}.$$

Per estensione definiamo *energia* della funzione periodica f la quantità

$$E_f := \frac{\omega}{4\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} |f(t)|^2 dt = \frac{\omega}{4\pi} \|f\|^2.$$

Dall'uguaglianza di Parseval si ottiene:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{\omega}{4\pi} \|f\|^2 = \\ &= \frac{\omega}{4\pi} \left\{ |\langle e_0 | f \rangle|^2 + \sum_1^{\infty} |\langle f_n | f \rangle|^2 + \sum_1^{\infty} |\langle g_n | f \rangle|^2 \right\} = \\ &= \frac{\omega}{4\pi} \left\{ \frac{\pi}{2\omega} |a_0|^2 + \sum_1^{\infty} \frac{\pi}{\omega} |a_n|^2 + \sum_1^{\infty} \frac{\pi}{\omega} |b_n|^2 \right\} = \sum_0^{\infty} E_n \end{aligned}$$

ossia l'energia totale della funzione f , periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, é uguale alla somma dell'energia delle singole armoniche componenti.

Esempio 6.4.3 La funzione definita su $[-\pi, \pi]$ da:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0] \\ 1, & t \in [0, \pi] \end{cases}$$

é decomposta spettralmente nella serie di Fourier esponenziale

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{-\infty \\ n \text{ dispari}}}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{inx}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \frac{1 - e^{in\pi}}{2\pi ni} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{1}{\pi ni} & n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

■

6.5 Equazioni differenziali e serie di Fourier

Consideriamo l'equazione differenziale alle derivate totali, non omogenea a coefficienti costanti:

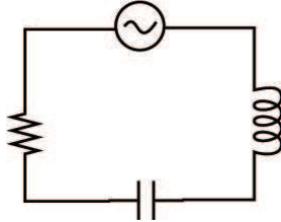
$$(6.34) \quad y'' + k_0 y' + \omega_0^2 y = f$$

ove si suppone che f sia una funzione periodica, non necessariamente sinusoidale.

Osservazione 6.5.1 Nel caso di un circuito RLC disposto in serie, abbiamo che l'equazione precedente assume la forma ($k_0 = R/L, \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$):

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = E(t)$$

avendo posto $E(t) = Lf(t)$. Essa rappresenta un circuito RLC sottoposto



ad una forza elettromotrice esterna $E = E(t)$ di tipo periodico.

Sappiamo che la soluzione generale della (6.34) è somma di una soluzione particolare più la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea associata. Questa seconda soluzione però decresce rapidamente a zero per cui, in condizione di regime, la soluzione generale coincide con la soluzione particolare.

Se la f è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e nell'intervallo di periodicità $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ è di classe $L_2[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$, avremo che

$$(6.35) \quad f(t) \simeq \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$$

con

$$a_n = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \left\langle \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} e^{in\omega x} \mid f(x) \right\rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} e^{-in\omega x} f(x) dx$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi che la convergenza della serie (6.35) ad f non solo sia in media quadratica, ma anche uniforme; cioè che sia:

$$(6.36) \quad f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}, \quad \forall t \in \left(-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right)$$

Ciò accade, ad esempio, se la f è assolutamente continua in $(-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega})$ e la sua derivata f' appartiene a $L_2[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$.

Ricerchiamo allora una soluzione particolare della (6.34) che sia anche essa periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ e sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo $[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$:

$$(6.37) \quad y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

ove in questa relazione i coefficienti c_n sono incogniti.

Supponiamo che $y = y(t)$ sia tale che la serie possa essere derivata termine a termine il numero necessario di volte:

$$(6.38) \quad y'(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} in\omega c_n e^{in\omega t}$$

$$(6.39) \quad y''(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} -n^2\omega^2 c_n e^{in\omega t}$$

Sostituendo nella (6.34) avremo:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-n^2\omega^2 + in\omega k_0 + \omega_0^2) c_n e^{in\omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$$

Da cui otteniamo:

$$c_n = \frac{1}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2) + i(n\omega k_0)} a_n$$

ossia

$$(6.40) \quad c_n = \frac{1}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2) + in\omega k_0} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} e^{-in\omega x} f(x) dx$$

Riepilogando, la soluzione della (6.34) in condizioni di regime, sarà perciò:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega/2\pi}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2) + in\omega k_0} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x) e^{-in\omega x} dx \right] e^{in\omega t} \end{aligned}$$

purché tale serie sia derivabile termine a termine due volte. Una condizione sufficiente perché ciò accada é che la serie $y(t)$ così ottenuta, sia uniformemente convergente.

Esempio 6.5.2 Si consideri la seguente onda triangolare

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T} t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 2A \left(1 - \frac{t}{T}\right), & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Tenendo conto delle particolari simmetrie presentate dal problema, potremo considerare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione pari:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\omega}{\pi} At, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} \\ -\frac{\omega}{\pi} At, & -\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Per la parità della f , avremo che nella (6.40) il termine

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sin(n\omega x) f(x) dx = 0,$$

e quindi rimane da considerare

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos(n\omega x) f(x) dx &= 2 \int_0^{\pi/\omega} \frac{\omega A}{\pi} x \cos(n\omega x) dx = \\ &= \frac{2A}{n^2 \pi \omega} \int_0^{\pi/\omega} y \cos y dy = \\ &= \frac{2A}{n^2 \pi \omega} \left\{ y \sin y \Big|_0^{\pi/\omega} - \int_0^{\pi/\omega} \sin y dy \right\} = \\ &= \frac{2A}{n^2 \pi \omega} [\cos(n\pi) - 1] = \begin{cases} 0, & n \text{ pari} \\ -\frac{4A}{n^2 \pi \omega}, & n \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione cercata è espressa da:

$$y(t) = \sum_{\substack{+\infty \\ n \text{ dispari} \\ -\infty}} -\frac{2A}{\pi^2 n^2 [(\omega_0^2 - n^2 \omega^2) + in\omega k_0]} e^{in\omega t}$$

Posto

$$\xi = \omega_0^2 - n^2 \omega^2, \quad \eta = n\omega k_0$$

avremo che l'armonica semplice di posto n è del tipo:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= -\frac{2A}{(\pi n)^2} \frac{1}{\xi + i\eta} (\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)) = \\ &= -\frac{2A}{(\pi n)^2} \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2} (\cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)) \end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$Re\varphi_n(t) = -\frac{2A}{(\pi n)^2 (\xi^2 + \eta^2)} [\xi \cos(n\omega t) + \eta \sin(n\omega t)]$$

Ricercando A_n, α_n tali che

$$\begin{cases} \xi = A_n \cos \alpha_n \\ \eta = A_n \sin \alpha_n, \end{cases} \quad \text{avremo che} \quad \begin{cases} A_n = \sqrt{\xi_n^2 + \eta_n^2} \\ tg \alpha_n = \frac{\eta \omega k_0}{\omega_0^2 - n^2 \omega^2} \end{cases}$$

per cui:

$$Re\varphi_n(t) = -\frac{2A}{(\pi n)^2 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos(n\omega t - \alpha_n)$$

Pertanto, una soluzione particolare della nostra equazione differenziale è:

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{(\pi n)^2 \sqrt{(\omega_0^2 - n^2 \omega^2) + n^2 \omega^2 k_0^2}} \cos(n\omega t - \alpha_n)$$

con $a = -2A$. ■

Capitolo 7

Operatori Unitari e Antiunitari

7.1 Operatori isometrici, unitari e antiunitari

In questo paragrafo vogliamo analizzare la possibilità di identificare due diversi spazi con prodotto interno tramite eventuali corrispondenze biunivoche, che abbiano la caratteristica di “trasportare” dall’uno all’altro degli spazi le varie strutture: lineare, metrica, normata e così via.

Teorema 7.1.1 *Siano \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 due spazi con prodotto interno, rispettivamente $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$, entrambi complessi. Se $U : \mathcal{S}_1 \mapsto \mathcal{S}_2$ è un operatore lineare, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (i) $\langle Ux|Uy \rangle_2 = \langle x|y \rangle_1$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}_1$
- (ii) $\|Ux\|_2 = \|x\|_1$ per ogni $x \in \mathcal{S}_1$
- (iii) $\|Ux - Uy\|_2 = \|x - y\|_1$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}_1$

Dimostrazione. Supposto che sia vera la (i), allora prendendo $y = x$ avremo che $\|Ux\|_2^2 = \|x\|_1^2$ ossia la (ii). Dalla (ii) segue che $\|U(x - y)\|_2 = \|x - y\|_1$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}_1$ e, dalla additività di U , segue che $\|Ux - Uy\|_2 = \|x - y\|_1$. La (iii) implica la (ii) se si assume come caso particolare $y = 0$. Supposto ora che la (ii) sia vera consideriamo

$$(1) \quad \langle U(x + y)|U(x + y) \rangle_2 = \|Ux\|_2^2 + \langle Ux|Uy \rangle_2 + \langle Uy|Ux \rangle_2 + \|Uy\|_2^2$$

$$(2) \quad \langle x + y|x + y \rangle_1 = \|x\|_1^2 + \langle x|y \rangle_1 + \langle y|x \rangle_1 + \|y\|_1^2$$

Essendo per ipotesi $\|U(x + y)\|_2^2 = \|x + y\|_1^2$ ne segue che

$$\begin{aligned} & \|Ux\|_2^2 + \langle Ux|Uy \rangle_2 + \langle Uy|Ux \rangle_2 + \|Uy\|_2^2 \\ &= \|x\|_1^2 + \langle x|y \rangle_1 + \langle y|x \rangle_1 + \|y\|_1^2 \end{aligned}$$

ovvero, sempre per l’ipotesi (ii) che

$$(3) \quad \langle Ux|Uy \rangle_2 + \langle Uy|Ux \rangle_2 = \langle x|y \rangle_1 + \langle y|x \rangle_1$$

Un analogo calcolo nel caso del vettore $x + iy$ conduce al risultato

$$\begin{aligned} & \|Ux\|_2^2 + i \langle Ux|Uy \rangle_2 - \langle Uy|Ux \rangle_2 + \|Uy\|_2^2 \\ &= \|x\|_1^2 + i \langle x|y \rangle_1 - \langle y|x \rangle_1 + \|y\|_1^2 \end{aligned}$$

da cui segue

$$(4) \quad i \langle Ux|Uy \rangle - i \langle Uy|Ux \rangle = i \langle x|y \rangle - i \langle y|x \rangle$$

Moltiplicando la (4) per $-i$ e sommando il risultato così ottenuto alla (3) ricaviamo che $\langle Ux|Uy \rangle_2 = \langle x|y \rangle_1$. \square

Con procedimenti analoghi a quelli usati nel teorema 7.1.1 si ottiene il seguente risultato

Teorema 7.1.2 *Sia $U : \mathcal{S}_1 \mapsto \mathcal{S}_2$ un operatore antilineare, allora sono equivalenti le proposizioni:*

- (i) $\langle Ux|Uy \rangle_2 = \overline{\langle x|y \rangle_1}$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}_1$
- (ii) $\|Ux\|_2 = \|x\|_1$ per ogni $x \in \mathcal{S}_1$
- (iii) $\|Ux - Uy\|_2 = \|x - y\|_1$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}_1$

Osservazione 7.1.3 Ricordando che in uno spazio lineare normato la distanza indotta dalla norma è definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

avremo che le proposizioni (iii) dei teoremi precedenti si possono scrivere nella forma

$$(iii-a) \quad d_2(Ux, Uy) = d_1(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathcal{S}_1$$

Proposizione 7.1.4 *Se U soddisfa la (iii-a), essa è una applicazione iniettiva da \mathcal{S}_1 in \mathcal{S}_2 .*

Dimostrazione. Sia $Ux = Uy$ allora $d_2(Ux, Uy) = 0$ per le proprietà della distanza e perciò $0 = d_2(Ux, Uy) = d_1(x, y)$ per la (iii-a) e da questo risultato segue $x = y$. \square

Definizione 7.1.5 *Un operatore lineare (antilineare) $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ si dice isometria (antisometria) se soddisfa la (iii-a). Se U è in più una applicazione suriettiva allora esso viene chiamato operatore unitario (antiunitario) da \mathcal{S}_1 su \mathcal{S}_2 .*

Osservazione 7.1.6 Se $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ sono due spazi con prodotto interno complessi e finito-dimensionali, allora ogni operatore $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ isometrico (antiisometrico) sarà necessariamente unitario (antiunitario) da \mathcal{S}_1 su \mathcal{S}_2 .

Infatti basterà ricordarsi che una applicazione lineare (antilineare) iniettiva fra due spazi lineari di dimensione finita è necessariamente suriettiva.

Dalla definizione precedente si ha che, ovviamente, ogni operatore unitario è anche isometrico, però non tutte le isometrie sono operatori unitari, anche nel caso in cui $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

Esempio 7.1.7 *Operatore di shift*

Un esempio di operatore isometrico ma non unitario è il cosiddetto *operatore di shift* definito nel seguente modo: sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale complesso e separabile e $\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ un suo sonc, consideriamo l'operatore $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definito da

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_{n+1}$$

(La definizione è ben posta in virtù del teorema di Fisher-Riesz 4.1.1 a pag. 59). La linearità di S è ovvia conseguenza della linearità a destra del prodotto interno, inoltre l'operatore è isometrico essendo $\|S(x)\|^2 = \sum_1^{\infty} |\langle u_n | x \rangle|^2 = \|x\|^2$.

Questo operatore non è però suriettivo, in quanto se esistesse $x_0 \in \mathcal{H}$ tale che $S(x_0) = u_1$ dovremmo avere $u_1 = \langle u_1 | x_0 \rangle u_2 + \langle u_2 | x_0 \rangle u_3 + \dots$ e quindi $\langle u_n | x \rangle = 0$ per ogni n , da cui seguirebbe $x_0 = \sum_1^{\infty} \langle u_n | x \rangle u_n = \underline{0}$ e perciò $\underline{0} = S(x_0) = u_1$ contro il fatto che $\|u_1\| = 1$. ■

Esempio 7.1.8 Daremo ora un esempio di operatore unitario la cui definizione è abbastanza simile a quella del precedente esempio ed è ben posta in virtù del teorema di Fisher-Riesz. Siano \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert complessi e separabili, $\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ un sonc di \mathcal{H}_1 e $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ un sonc di \mathcal{H}_2 , allora l'operatore $U : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2$ definito da

$$U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n | x \rangle v_n$$

è unitario. Infatti, la linearità di U è ovvia, mentre dalla

$$\|U(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_n | x \rangle|^2 = \|x\|^2$$

segue immediatamente l'isometria di U . Preso $y \in \mathcal{H}_2$, dall'ipotesi che $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$ è un sonc di \mathcal{H}_2 si ottiene che $y = \sum_1^{\infty} \langle v_n | y \rangle v_n$ e posto $x = \sum_1^{\infty} \langle v_n | y \rangle u_n$, si ha che x è un vettore di \mathcal{H}_1 per il teorema di Fisher-Riesz. Inoltre

$$U(x) = \sum_j \left\langle u_j \left| \sum_n \langle v_n | y \rangle u_n \right. \right\rangle v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n | y \rangle v_n = y$$

e perciò U è suriettivo. ■

Esempio 7.1.9 *Operatore di coniugazione complessa.*

Sia $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ un qualsiasi spazio con prodotto interno di tipo funzionale. Si consideri l'operatore, chiamato *operatore di coniugazione complessa*

$$k : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

definito da

$$k(\psi) = \bar{\psi}$$

Esso è ovviamente antilineare e suriettivo e in più soddisfa la condizione

$$\|k(\psi)\|^2 = \int_{\mathcal{R}^n} |k(\psi)|^2 = \int_{\mathcal{R}^n} |\bar{\psi}|^2 = \int_{\mathcal{R}^n} |\psi|^2 = \|\psi\|^2$$

Pertanto, l'operatore di coniugazione complesso è antiunitario. ■

Se $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ è un operatore unitario potremo identificare lo spazio con prodotto interno \mathcal{S}_1 con lo spazio con prodotto interno \mathcal{S}_2 , tramite la corrispondenza biunivoca U , secondo il seguente schema:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &\equiv \mathcal{S}_2 \\ x &\longleftrightarrow Ux \\ x + y &\longleftrightarrow Ux + Uy \\ \alpha x &\longleftrightarrow \alpha Ux\end{aligned}$$

Infatti la struttura di spazio vettoriale viene trasportata per linearità tramite U da \mathcal{S}_1 su \mathcal{S}_2 . La norma di un elemento di \mathcal{S}_1 è uguale alla norma del corrispondente elemento secondo U in \mathcal{S}_2 e la distanza fra due qualsiasi elementi di \mathcal{S}_1 è uguale alla distanza fra i corrispondenti elementi di \mathcal{S}_2 . In simboli,

$$(7.1) \quad \|x\|_1 = \|Ux\|_2$$

$$(7.2) \quad d_1(x, y) = d_2(Ux, Uy)$$

Infine, viene conservato il prodotto interno

$$(7.3) \quad \langle x|y \rangle_1 = \langle Ux|Uy \rangle_2$$

Per queste proprietà gli operatori unitari sono chiamati *isomorfismi* fra spazi con prodotto interno.

Analoghe considerazioni si possono fare per gli operatori antiunitari, i quali sono ancora delle corrispondenze biunivoche che permettono di identificare \mathcal{S}_1 con \mathcal{S}_2 , però in questo caso la struttura vettoriale di \mathcal{S}_1 viene trasportata *antilinearmente* su \mathcal{S}_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &\equiv \mathcal{S}_2 \\ x &\longleftrightarrow Ux \\ x + y &\longleftrightarrow Ux + Uy \\ \alpha x &\longleftrightarrow \bar{\alpha} Ux\end{aligned}$$

le norme e le distanze vengono ancora preservate

$$(7.1a) \quad \|x\|_1 = \|Ux\|_2$$

$$(7.2a) \quad d_1(x, y) = d_2(Ux, Uy)$$

però per il prodotto interno vale la proprietà

$$(7.3a) \quad \langle x|y \rangle_1 = \overline{\langle Ux|Uy \rangle_2}$$

Per questo motivo un operatore antiunitario viene anche chiamato *antiisomorfismo* fra spazi con prodotto interno.

Definizione 7.1.10 *Due spazi con prodotto interno \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 si diranno isomorfi (antiisomorfi) se esiste un isomorfismo (antiisomorfismo) $U : \mathcal{S}_1 \mapsto \mathcal{S}_2$ fra di essi.*

Proposizione 7.1.11 *Se $U : \mathcal{S}_1 \mapsto \mathcal{S}_2$ è un operatore unitario (antiunitario), allora esso ammette operatore inverso $U^{-1} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_1$ tale che:*

$$(i) \quad U \circ U^{-1} = \mathbb{I}_{\mathcal{S}_2}, \quad U^{-1} \circ U = \mathbb{I}_{\mathcal{S}_1}$$

(ii) U^{-1} è unitario (antiunitario).

Dimostrazione. La (i) è una banale conseguenza del fatto che U è una biiezione da \mathcal{S}_1 su \mathcal{S}_2 . Dal fatto che U è unitario abbiamo che $\|Ux\|_2 = \|x\|_1$ per ogni $x \in \mathcal{S}_1$. Sia $y \in \mathcal{S}_2$ tale che $Ux = y$ allora $x = U^{-1}y$ e perciò $\|U^{-1}y\|_1 = \|U(U^{-1}y)\|_2 = \|y\|_2$ per ogni $y \in \mathcal{S}_2$. Pertanto U^{-1} è unitario. Analogamente si procede nel caso di U antiunitario. \square

Osservazione 7.1.12 Se $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ è un operatore isometrico non suriettivo i due spazi \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 non risulteranno isomorfi. Comunque se consideriamo il sottinsieme $U(\mathcal{S}_1)$ di \mathcal{S}_2 sappiamo che esso è una varietà lineare di \mathcal{S}_2 la quale risulta essere uno spazio con prodotto interno qualora la si munisca della restrizione del prodotto interno definito su \mathcal{S}_2 .

In questo caso l'operatore $\hat{U} : \mathcal{S}_1 \mapsto U(\mathcal{S}_1)$, definito nel seguente modo

$$\hat{U}(x) := U(x), \quad \forall x \in \mathcal{S}_1$$

è un operatore unitario che rende isomorfi gli spazi con prodotto interno \mathcal{S}_1 ed $U(\mathcal{S}_1)$.

In grafico,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1 & \xrightarrow{\hat{U}} & U(\mathcal{S}_1) \\ & \searrow U & \downarrow \text{id} \\ & & \mathcal{S} \end{array}$$

Nel seguito, quando non comporterà ambiguità, useremo indicare l'operatore \hat{U} ancora col simbolo U .

Due spazi con prodotto interno \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 possono essere isomorfi pur essendo \mathcal{S}_2 un sottinsieme proprio di \mathcal{S}_1 (o viceversa).

Esempio 7.1.13 Si consideri l'operatore $s : l_2 \rightarrow l_2$ definito da

$$s(\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}) := \{0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

Questo operatore è lineare ed isometrico, come è facile verificare. Esso però non è suriettivo. Se però consideriamo il sottospazio di l_2 definito da

$$s(l_2) := \{\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in l_2 : x_1 = 0\}$$

si ottiene che l'operatore $s : l_2 \rightarrow s(l_2)$ così ottenuto è un operatore unitario fra gli spazi con prodotto interno l_2 e $s(l_2)$, che perciò risulteranno essere isomorfi fra di loro pur essendo $s(l_2) \subset l_2$; ciò non di meno i due spazi potranno ritenersi identificabili per ciò che riguarda tutte le proprietà di spazio con prodotto interno.

In particolare ogni successione $\{\underline{x}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq l_2$ è convergente in l_2 se e solo se la corrispondente successione $\{s(\underline{x}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ è convergente in $s(l_2)$ e un'analoga proprietà è vera per le successioni di Cauchy. Da ciò segue che $s(l_2)$ è completo, e perciò è uno spazio di Hilbert.

Facciamo notare che l'operatore isometrico $s : l_2 \rightarrow l_2$ ora considerato è l'operatore di shift nel caso di l_2 , qualora si consideri il sonc canonico di l_2 , $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Infatti, se $x = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in l_2$, allora l'operatore $s : l_2 \rightarrow l_2$ che abbiamo ora introdotto si può porre nella forma

$$s(\underline{x}) := \{0, x_1, x_2, \dots\} = 0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | \underline{x} \rangle e_{n+1}$$

■

Proposizione 7.1.14 Sia $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ un operatore unitario. Se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ è un sonc di \mathcal{S}_1 allora $\{Uu_\alpha : \alpha \in A\}$ è un sonc di \mathcal{S}_2 .

Dimostrazione. Essendo $\langle Uu_\alpha | Uu_\beta \rangle = \langle u_\alpha | u_\beta \rangle$, dall'ipotesi che $\{u_\alpha\}$ è un sonc segue che pure $\{Uu_\alpha\}$ è un sonc. D'altra parte consideriamo un generico $y \in \mathcal{S}_2$ e sia $x \in \mathcal{S}_1$ l'unico elemento tale che $Ux = y$, allora

$$\begin{aligned} \sum |\langle Uu_\alpha | y \rangle|^2 &= \sum |\langle Uu_\alpha | Ux \rangle|^2 = \sum |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 = \|Ux\|^2 = \|y\|^2 \end{aligned}$$

e perciò $\{Uu_\alpha\}$ è un sonc in \mathcal{S}_2 . □

Esempio 7.1.15 Nello spazio di Hilbert $L_2([0, 1])$, fissato $\omega \in \mathbb{R}$ si consideri l'operatore lineare

$$U_\omega : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), f \rightarrow U_\omega f$$

definito dalla legge

$$(U_\omega f)(x) := e^{i\omega x} f(x)$$

Chiaramente questa definizione è ben posta e in più

$$\begin{aligned} \|U_\omega f\|^2 &= \int_0^1 |U_\omega f|^2 = \int_0^1 |e^{i\omega x} f(x)|^2 dx \\ &= \int_0^1 |f|^2 = \|f\|^2, \quad \text{per ogni } f \in L_2([0, 1]) \end{aligned}$$

ovvero U_ω è una isometria. D'altra parte, per ogni $h \in L_2([0, 1])$ esiste $f(x) = e^{-i\omega x} h(x)$ tale che $U_\omega f = h$ e perciò U_ω è suriettiva. Da queste due proprietà ricaviamo che U_ω è un operatore unitario su $L_2([0, 1])$ avente come operatore unitario inverso $(U_\omega)^{-1} = U_{-\omega}$. Poichè abbiamo visto che $\{e^{2\pi i n x} : n \in \mathbb{Z}\}$ è un sonc in $L_2([0, 1])$, dalla proposizione 7.1.14 segue che $\{U_\omega e^{2\pi i n x} = e^{i(\omega + 2\pi n)x} : n \in \mathbb{Z}\}$ è un sonc in $L_2([0, 1])$ qualunque sia $\omega \in \mathbb{R}$. ■

Osservazione 7.1.16 Si osservi che ogni operatore isometrico è necessariamente continuo in quanto dalla

$$\|Ux - Ux_0\|_2 = \|x - x_0\|_1$$

segue che per $x \rightarrow x_0$ si ha che $U(x) \rightarrow U(x_0)$. Pertanto, la proposizione 7.1.14 assicura che ogni operatore unitario (e quindi lineare e continuo) trasforma sonc in sonc. A questa proprietà corrisponde una sorta di viceversa nel caso però di spazi di Hilbert.

Proposizione 7.1.17 Siano \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 due spazi con prodotto interno e $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ un operatore lineare e continuo. Se esiste un sonc $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ in \mathcal{S}_1 tale che $\{Uu_\alpha : \alpha \in A\}$ risulta essere un sonc in \mathcal{S}_2 allora U è isometrico.

Se \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 sono due spazi di Hilbert, nelle precedenti ipotesi risulta che U è unitario.

Dimostrazione. Preso $x \in \mathcal{S}_1$ abbiamo che $x = \sum \langle u_\alpha | x \rangle u_\alpha$ da cui, per la continuità (sequenziale) di U , segue che $Ux = \sum \langle u_\alpha | x \rangle Uu_\alpha$. Perciò, dalla

$$\|Ux\|^2 = \left\langle \sum \langle u_\alpha | x \rangle Uu_\alpha \mid \sum \langle u_\beta | x \rangle Uu_\beta \right\rangle = \sum \overline{\langle u_\alpha | x \rangle} \langle u_\alpha | x \rangle = \|x\|^2$$

ricaviamo che U è una isometria.

Supponiamo ora che gli spazi in questione siano di Hilbert. Allora, fissato $y \in \mathcal{H}_2$, sappiamo che $\sum |\langle Uu_\alpha | y \rangle|^2$ è convergente in \mathbb{R} e perciò, per il teorema di Fisher-Riesz, sarà convergente in \mathcal{H}_1 la serie $\sum \langle Uu_\alpha | y \rangle u_\alpha =: x \in \mathcal{H}_1$.

Da ciò segue che $Ux = U(\sum \langle Uu_\alpha | y \rangle u_\alpha) = \sum \langle Uu_\alpha | y \rangle Uu_\alpha = y$, ove la seconda uguaglianza è conseguenza della continuità (sequenziale) di U , mentre la terza uguaglianza è conseguenza dell'ipotesi che $\{Uu_\alpha\}$ sia un sonc in \mathcal{H}_2 . Abbiamo così ottenuto che U è suriettiva. \square

Corollario 7.1.18 *Siano \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert di uguale dimensione ortogonale. Se $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ è un sonc di \mathcal{H}_1 e $\{v_\alpha : \alpha \in A\}$ è un sonc di \mathcal{H}_2 , allora l'applicazione $U : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2$ definita da*

$$U(x) = \sum_{\alpha \in A} \langle u_\alpha | x \rangle v_\alpha$$

è un operatore unitario.

Dimostrazione. Dalla definizione di U segue immediatamente la linearità. Inoltre

$$\|U(x)\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle u_\alpha | x \rangle|^2 = \|x\|^2$$

implica la isometria e quindi la continuità di U . Essendo $U(u_\alpha) = v_\alpha$, dalle ipotesi che $\{u_\alpha\}$ e $\{v_\alpha = Uu_\alpha\}$ sono dei sonc e dalla proposizione 7.1.17 segue la unitarietà dell'operatore U . \square

Proposizione 7.1.19 *Sia $U : \mathcal{S}_1 \mapsto \mathcal{S}_2$ un operatore unitario o antiunitario. Se \mathcal{V} è una varietà lineare di \mathcal{S}_1 allora $U(\mathcal{V})$ è una varietà lineare di \mathcal{S}_2 . Se \mathcal{M} è un sottospazio di \mathcal{S}_1 allora $U(\mathcal{M})$ è un sottospazio di \mathcal{S}_2 . In particolare se Ψ è un sottospazio monodimensionale di \mathcal{S}_1 allora $U(\Psi)$ è un sottospazio monodimensionale di \mathcal{S}_2 .*

Dimostrazione. Sia U antiunitario (una analoga dimostrazione si può fare nel caso di un operatore unitario). Se $x_2, y_2 \in U(\mathcal{V})$ allora esisteranno $x_1 = U^{-1}(x_2)$ e $y_1 = U^{-1}(y_2)$, entrambi in \mathcal{V} . Dall'ipotesi che \mathcal{V} è una varietà lineare di \mathcal{S}_1 ne segue che $x_1 + y_1 \in \mathcal{V}$ e perciò

$$U(x_1 + y_1) \in U(\mathcal{V})$$

Ma $U(x_1 + y_1) = U(x_1) + U(y_1) = U(U^{-1}x_2) + U(U^{-1}y_2) = x_2 + y_2$ e perciò $x_2 + y_2 \in U(\mathcal{V})$. D'altra parte, se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x_2 \in U(\mathcal{V})$, posto $x_1 = U^{-1}x_2 \in \mathcal{V}$, avremo che $\bar{\alpha}x_1 \in \mathcal{V}$ e perciò $U(\bar{\alpha}x_1) \in U(\mathcal{V})$, ma $U(\bar{\alpha}x_1) = \alpha U(x_1) = \alpha x_2$ e quindi $\alpha x_2 \in U(\mathcal{V})$.

Se \mathcal{M} è un sottospazio di \mathcal{S}_1 , per quanto ora dimostrato, $U(\mathcal{M})$ sarà una varietà lineare di \mathcal{S}_2 . Sia ora $\{x''_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione in $U(\mathcal{M})$ convergente

ad un elemento $x'' \in \mathcal{S}_2$. Consideriamo la successione $\{x'_n = U^{-1}(x''_n) : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{M} e poniamo $x' = U^{-1}(x'')$. Poichè $\|x'_n - x'\| = \|U^{-1}(x''_n) - U^{-1}(x'')\| = \|x''_n - x''\|$ avremo che $\lim x'_n = x'$. Ma essendo \mathcal{M} chiuso, non potrà che essere $x' \in \mathcal{M}$, da cui segue che $x'' = U(x') \in U(\mathcal{M})$, ovvero pure $U(\mathcal{M})$ è chiuso. L'ultima proprietà è banale. \square

7.1.1 Trasformazioni ortogonali e isometriche in spazi con prodotto interno reali

Se \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono due spazi con prodotto interno, entrambi reali, in analogia con quanto visto nel teorema 7.1.1, si può dimostrare che le seguenti proposizioni sono equivalenti:

$$(1-a) \quad \langle Ux|Uy \rangle_2 = \langle x|y \rangle_1 \text{ per ogni } x, y \in \mathcal{S}_1$$

$$(1-b) \quad \|Ux\|_2 = \|x\|_1 \text{ per ogni } x \in \mathcal{S}_1$$

$$(1-c) \quad d_2(Ux, Uy) = d_1(x, y) \text{ per ogni } x, y \in \mathcal{S}_1$$

In questo caso specifico, se l'operatore U soddisfa una delle precedenti condizioni diremo che esso è *isometrico*, mentre un operatore fra due spazi con prodotto interno reale isometrico e suriettivo si chiamerà *operatore ortogonale*. Due spazi con prodotto interno reali si diranno ortogonalmente *isomorfi* se esiste un operatore ortogonale che mappa uno degli spazi sull'altro.

Esempio 7.1.20 *La rotazione in \mathbb{R}^2 di un angolo θ attorno all'origine è un operatore ortogonale da \mathbb{R}^2 su \mathbb{R}^2 .*

Infatti, sia $\mathcal{R}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore di rotazione in \mathbb{R}^2 di un angolo θ definito dalla matrice

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ossia

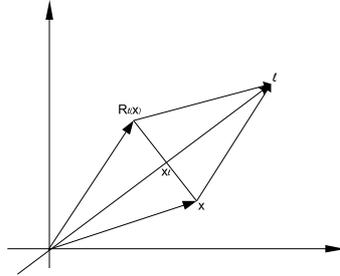
$$\mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esso è un operatore lineare soddisfacente la condizione

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta \\ a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 \cos \theta - b_2 \sin \theta \\ b_1 \sin \theta + b_2 \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= a_1 b_1 \cos^2 \theta - a_1 b_2 \cos \theta \sin \theta - a_2 b_1 \sin \theta \cos \theta + a_2 b_2 \sin^2 \theta + \\ &\quad + a_1 b_1 \sin^2 \theta + a_1 b_2 \cos \theta \sin \theta + a_2 b_1 \cos \theta \sin \theta + a_2 b_2 \cos^2 \theta = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

■

Esempio 7.1.21 La riflessione di \mathbb{R}^2 rispetto a una retta l passante per l'origine è un operatore ortogonale da \mathbb{R}^2 su \mathbb{R}^2 . Sia l la retta passante per l'origine e $\underline{u}_l \in l$ un



vettore di norma unitaria, $\|\underline{u}_l\| = 1$, su l . Per ogni vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, la sua proiezione su l è definita come il vettore $\underline{x}_l = \langle \underline{u}_l | \underline{x} \rangle \underline{u}_l$. Indicata con $R_l(\underline{x})$ la riflessione di \underline{x} rispetto alla retta l , poichè (vedi fig.1), $\underline{x}_l = \frac{1}{2}(\underline{x} + R_l(\underline{x}))$, avremo che

$$R_l(\underline{x}) = 2\underline{x}_l - \underline{x} = 2 \langle \underline{u}_l | \underline{x} \rangle \underline{u}_l - \underline{x}$$

Pertanto, la riflessione dei vettori di \mathbb{R}^2 rispetto a l è data dall'operatore

$$R_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da

$$R_l(\underline{x}) = 2 \langle \underline{u}_l | \underline{x} \rangle \underline{u}_l - \underline{x}$$

Questo operatore è ovviamente lineare, stante la linearità a destra del prodotto interno, e in più

$$\begin{aligned} \langle R_l(\underline{x}) | R_l(\underline{y}) \rangle &= \langle 2 \langle \underline{u}_l | \underline{x} \rangle \underline{u}_l - \underline{x} | 2 \langle \underline{u}_l | \underline{y} \rangle \underline{u}_l - \underline{y} \rangle \\ &= 4 \langle \underline{u}_l | \underline{x} \rangle \langle \underline{u}_l | \underline{y} \rangle - 2 \langle \underline{u}_l | \underline{x} \rangle \langle \underline{u}_l | \underline{y} \rangle - 2 \langle \underline{u}_l | \underline{y} \rangle \langle \underline{x} | \underline{u}_l \rangle + \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle \\ &= \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle \end{aligned}$$

Si osservi che, se il vettore unitario \underline{u}_l che determina l forma un angolo α rispetto all'asse \underline{e}_1 , allora $\underline{u}_l = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ e quindi per ogni $\underline{x} = (a, b)$ avremo che

$$\begin{aligned} R_l(a, b) &= 2 \langle (\cos \alpha, \sin \alpha) | (a, b) \rangle (\cos \alpha, \sin \alpha) - (a, b) = \\ &= 2(a \cos \alpha + b \sin \alpha)(\cos \alpha, \sin \alpha) - (a, b) = \\ &= (2a \cos^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha - a, 2a \cos \alpha \sin \alpha + 2b \sin^2 \alpha - b) \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} a \cos 2\alpha + b \sin 2\alpha &= a(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2b \sin \alpha \cos \alpha \\ &= a(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2b \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$a \sin 2\alpha - b \cos 2\alpha = 2a \cos \alpha \sin \alpha + 2b \sin^2 \alpha - b$$

potremo concludere che

$$R_l \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos 2\alpha + b \sin 2\alpha \\ a \sin 2\alpha - b \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la forma esplicita della matrice rappresentativa di questo operatore, che potremo indicare con R_α , intendendo con α l'angolo che la linea l , rispetto alla quale si opera la trasformazione di riflessione, forma con l'asse e_1 :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

■

Nel caso degli operatori ortogonali vale la analoga della proposizione 7.1.14.

Proposizione 7.1.22 *Se $U : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ è un operatore ortogonale e suriettivo allora esso trasforma sonc di \mathcal{S}_1 in sonc di \mathcal{S}_2 .*

Esempio 7.1.23 Consideriamo i due operatori in \mathbb{R}^2 ortogonali: di rotazione di un angolo θ , \mathcal{R}_θ , e di riflessione attorno alla retta di angolo α , R_α . La base ortogonale canonica verrà in questo caso trasformata nei due sonc di \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} & \mathcal{R}_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ R_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} & R_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se, come caso particolare, prendiamo $\alpha = \frac{\theta}{2}$ avremo che

$$R_{\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\cos \theta \sin \theta) \quad R_{\frac{\theta}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Poichè abbiamo visto che in \mathbb{R}^2 i sonc possono assumere soltanto una delle due forme canoniche, per un certo angolo θ ,

$$(I) \quad \{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$$

$$(II) \quad \{(\cos \theta, \sin \theta), (\sin \theta, -\cos \theta)\}$$

Potremo concludere che: i sonc di tipo (I) sono ottenibili dal sonc canonico tramite una rotazione di angolo θ attorno all'origine; i sonc di tipo (II) sono ottenibili dal sonc canonico tramite una riflessione rispetto ad una retta l formante un angolo $\frac{\theta}{2}$ rispetto all'asse e_1 . ■

Teorema 7.1.24 *Se $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un operatore ortogonale, allora esso è o una rotazione o una riflessione.*

Dimostrazione. Se $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ è un operatore ortogonale su \mathbb{R}^2 , esso trasforma il sonc canonico $\{e_1, e_2\}$ nel sonc $\alpha = \{(a, b), (c, d)\}$, e quindi esisterà un angolo φ tale che

$$\alpha = \{(\cos \varphi, \sin \varphi), \pm(-\sin \varphi, \cos \varphi)\} = \{(a, b), (c, d)\}$$

Assumendo il segno + avremo che

$$(1) \quad U_+ = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ovvero U_+ è la rotazione attorno all'origine di un angolo φ .

Assumendo il segno $-$ avremo che

$$(2) \quad U_- = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

ovvero U_- è la riflessione lungo la retta passante per l'origine e formante un angolo $\varphi/2$ rispetto all'asse \underline{e}_1 . \square

Proposizione 7.1.25 *Se $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un operatore ortogonale, allora*

$$\det U = \pm 1$$

In particolare,

(i) *se U_+ è una rotazione, allora $\det U_+ = +1$,*

(ii) *se U_- è una riflessione, allora $\det U_- = -1$.*

L'insieme degli operatori ortogonali è un gruppo rispetto al prodotto di composizione, coincidente proprio con il gruppo ortogonale $O(2; \mathbb{R})$, (!!!vedi paragrafo 1.3, capitolo 2), di cui l'insieme delle rotazioni è il sottogruppo speciale ortogonale $SO(2; \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Le (i) e (ii) sono banali conseguenze delle (1) e (2), da cui si ottiene che $\det U_+ = 1$ e $\det U_- = -1$. Inoltre, dalla forma stessa delle matrici (1) e (2) segue immediatamente che $(U_{\pm})^t = (U_{\pm})^{-1}$, concludendo che tutte le rotazioni (1) e tutte le riflessioni (2) appartengono al gruppo ortogonale $O(2; \mathbb{R})$.

Le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ del gruppo ortogonale $O(2; \mathbb{R})$ soddisfano le condizioni

$$A^t = A^{-1} \quad \text{e} \quad \det A = \pm 1$$

Poichè

$$A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La condizione $A^t = A^{-1}$ si riconduce alla uguaglianza fra matrici

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

che impone le seguenti uguaglianze

$$\begin{array}{ll} \det(A) = ad - bc = +1 & \det(A^{-1}) = ad - bc = -1 \\ a = d & a = -d \\ b = -c & b = c \end{array}$$

da cui si ottengono le

$$\begin{array}{ll} \det(A) = +1 & \det(A^{-1}) = -1 \\ a^2 = ad & a^2 = -ad \\ b^2 = -bc & b^2 = bc \\ ab = -cd & ab = -cd \end{array}$$

ricavando dalle prime tre uguaglianze di ogni colonna che

$$1 = \det(A) = ad - bc = a^2 + b^2 \quad -1 = \det(A) = ad - bc = -(a^2 + b^2)$$

ovvero, in entrambi i casi si ha $a^2 + b^2 = 1$. Tenuto conto ora che, se $\underline{x} = (x_1, x_2)$ allora

$$\begin{aligned} \|U\underline{x}\|^2 &= (a^2 + c^2)x_1^2 + 2(ab + cd)x_1x_2 + (b^2 + d^2)x_2^2 = \\ &= (a^2 + b^2)(x_1^2 + x_2^2) + 2(ab + cd)x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 = \|\underline{x}\|^2 \end{aligned}$$

otteniamo che ogni matrice del gruppo $O(2; \mathbb{R})$ è un operatore ortogonale. Potremo quindi concludere che il gruppo *ortogonale* $O(2; \mathbb{R})$ è dato da

$$O(2; \mathbb{R}) = \{U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \text{lineare}, \langle U\underline{x} | U\underline{y} \rangle = \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2\}$$

Dalla (1) otteniamo, in particolare, che il gruppo *speciale ortogonale* $SO(2; \mathbb{R})$, sottogruppo di $O(2; \mathbb{R})$,

$$SO(2; \mathbb{R}) = \{U_+ \in O(2; \mathbb{R}) : \det U_+ = +1\}$$

è il gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^2 .

Tenendo conto che $\det(A \circ B) = \det(A) \det(B)$, abbiamo che

- (i) la composizione di due rotazioni è una rotazione,
- (ii) la composizione di due riflessioni è una rotazione,
- (iii) la composizione di una rotazione con una riflessione o, viceversa, di una riflessione con una rotazione è una riflessione.

In particolare, Se U'_-, U''_- sono due riflessioni, ovvero due elementi di $O(2; \mathbb{R})$ tali che $\det U'_- = \det U''_- = -1$, allora $U'_- \circ U''_-$ e $U''_- \circ U'_-$ $\in SO(2; \mathbb{R})$ sono due rotazioni. Precisamente, se

$$\begin{aligned} U'_- &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \end{pmatrix} & U''_- &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & -\cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ U'_- \circ U''_- &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2) & \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ossia $(U'_- \circ U''_-)$ è la rotazione dell'angolo $(\varphi_1 - \varphi_2)$ attorno all'origine. \square

Capitolo 8

Due casi notevoli di rappresentazioni unitaria e antiunitaria

8.1 Rappresentazione matriciale di Heisenberg

Daremo ora un procedimento standard per rappresentare ogni spazio con prodotto interno infinito-dimensionale sotto forma di opportune matrici ad infinite righe ed una colonna. Tratteremo esplicitamente il caso di uno spazio con prodotto interno complesso e separabile, infinito-dimensionale, ma la generalizzazione di questo procedimento al caso di uno spazio di Hilbert qualsiasi o di uno spazio con prodotto interno con almeno un sonc, é immediata.

Sia allora \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno complesso e separabile e $\alpha = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un generico sonc *ordinato* di \mathcal{S} , che riterremo fissato una volta per tutte, e si consideri l'operatore

$$U_\alpha : \mathcal{S} \mapsto l_2$$

definito asociando ad ogni vettore x si \mathcal{S} la successione dei coefficienti di Fourier di x rispetto ad α :

$$(8.1) \quad U_\alpha(x) = \{\langle u_n | x \rangle : n \in \mathbb{N}\}$$

Chiaramente $U_\alpha(x) \in l_2$ in quanto la serie $\sum |\langle u_n | x \rangle|^2$ é convergente. L'operatore in esame é lineare essendo

$$\begin{aligned} U_\alpha(x + y) &= \{\langle u_n | x + y \rangle : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\langle u_n | x \rangle : n \in \mathbb{N}\} + \{\langle u_n | y \rangle : n \in \mathbb{N}\} = U_\alpha(x) + U_\alpha(y) \end{aligned}$$

e analogamente $U_\alpha(\lambda x) = \lambda U_\alpha(x)$.

L'isometria di questo operatore segue dal fatto che

$$\|U_\alpha(x)\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u_n | x \rangle|^2} = \|x\|_{\mathcal{S}}$$

ove la prima uguaglianza esprime l'usuale definizione della norma in l_2 mentre l'ultima uguaglianza é nient'altro che l'uguaglianza di Parseval relativa al sonc $\alpha = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Facciamo osservare che se \mathcal{S} non é completo in norma (ossia non é uno spazio di Hilbert) allora certamente U_α non é un operatore unitario.

Infatti, sappiamo che l_2 é uno spazio di Hilbert e, se U fosse unitario, la stretta identificazione operata da questo operatore fra \mathcal{S} e l_2 , non solo dal punto di vista insiemistico ma anche dal punto di vista delle proprietà metriche, imporrebbe la proprietà di completezza anche ad \mathcal{S} .

Proposizione 8.1.1 *Se \mathcal{H} é uno spazio di Hilbert, separabile e infinito-dimensionale, l'operatore $U_\alpha : \mathcal{H} \mapsto l_2$ definito dalla (8.1) é un operatore unitario.*

Dimostrazione. Per dimostrare l'unitarietà della isometria U_α basterà verificare che essa é suriettiva. Sia allora $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione in l_2 , ossia tale che $\sum |\lambda_n|^2 < +\infty$, e si consideri il vettore $x := \sum \lambda_n u_n$, che é un elemento di \mathcal{H} in virtù del teorema di Fisher-Riesz. Chiaramente $U_\alpha(x) = \{\langle u_n | x \rangle : n \in \mathbb{N}\} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$. \square

Abbiamo visto che se \mathcal{H} é uno spazio di Hilbert separabile allora U_α é un operatore unitario che permette la identificazione

$$\begin{array}{ccc} & U_\alpha & \\ \mathcal{H} & \equiv & l_2 \\ x & \longleftrightarrow & \{\langle u_n | x \rangle\} \end{array}$$

Se \mathcal{S} non é completo potremo considerare la varietà lineare $U_\alpha(\mathcal{S}) \subseteq l_2$, che é a sua volta uno spazio con prodotto interno indotto da \mathcal{S} , e quindi potremo considerare l'operatore, che indicheremo ancora con U_α , definito nel seguente modo:

$$U_\alpha : \mathcal{S} \mapsto U_\alpha(\mathcal{S}) \subseteq l_2, x \mapsto U(x) := \{\langle u_n | x \rangle : n \in \mathbb{N}\}$$

U_α é ora un operatore unitario, e perciò un isomorfismo lineare, fra gli spazi \mathcal{S} e $U_\alpha(\mathcal{S})$ secondo lo schema

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{U_\alpha} & U_\alpha(\mathcal{S}) \\ & & \downarrow \\ & & l_2 \end{array}$$

Per motivi che saranno chiariti nel seguito, a volte useremo indicare l'elemento $U_\alpha(x) \in l_2$ sotto forma di matrice colonna ad infinite numerabili righe e lo denoteremo anche col simbolo \underline{x}_α :

$$\underline{x}_\alpha := U_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \langle u_1 | x \rangle \\ \langle u_2 | x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n | x \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Proposizione 8.1.2 *Lo spazio con prodotto interno $U_\alpha(\mathcal{S})$ é denso in l_2 .*

Dimostrazione. Sia $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \in l_2$, ossia tale che $\sum |\lambda_n|^2 < +\infty$, e si consideri la successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ contenuta in \mathcal{S} e i cui elementi sono dati da

$$x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i.$$

Chiaramente $U_\alpha(x_n) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \in U_\alpha(\mathcal{S})$ ed in più

$$\lim U_\alpha(x_n) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$$

□

Da quest'ultimo risultato potremo concludere con la seguente affermazione
Se \mathcal{S} é uno spazio non completo si può sempre costruire la coppia (l_2, U_α) che risulta essere un completamento di \mathcal{S} , ossia tale da soddisfare le condizioni:

- (i) $U_\alpha : \mathcal{S} \mapsto l_2$ é una isometria,
- (ii) $\overline{U_\alpha(\mathcal{S})} = l_2$

Osservazione 8.1.3 Le considerazioni fatte nel caso della rappresentazione matriciale di uno spazio separabile e infinito-dimensionale sono facilmente estendibili nel caso di un qualsiasi spazio infinito-dimensionale che ammette almeno un sonc $\alpha = \{u_j : j \in J\}$, ove J é una famiglia di indici totalmente ordinata con cardinalità non necessariamente uguale a quella del numerabile. Indichiamo con $l_2(J)$ lo spazio di Hilbert delle successioni $J \rightarrow \mathbb{C}$ a quadrato sommabile, Introdotto l'operatore

$$U_\alpha : \mathcal{S} \mapsto l_2(J)$$

definito dalla legge

$$U_\alpha(x) := \{\langle u_j | x \rangle : j \in J\}$$

questo operatore risulta essere una isometria, in generale non suriettiva, al quale sono applicabili i risultati ottenuti nel presente paragrafo.

8.1.1 Caso finito-dimensionale

Se \mathcal{S} é finito-dimensionale con $\dim(\mathcal{S}) = n$ sappiamo che \mathcal{S} é uno spazio di Hilbert e che un sonc può essere ottenuto da una base lineare mediante il procedimento di Gram-Schmidt. Indicato con $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un tale sonc, l'operatore

$$U_\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

definito da $U_\alpha(x) = \{\langle u_1 | x \rangle, \langle u_2 | x \rangle, \dots, \langle u_n | x \rangle\}$ é un operatore unitario che permette l'identificazione $\mathcal{S} \cong \mathbb{C}^n$.

8.2 Completamento di uno spazio con prodotto interno

Nelle questioni di carattere teorico, uno spazio con prodotto interno che è anche completo in norma è molto più maneggevole di uno spazio non completo. Infatti, nel caso di uno spazio completo tutti i problemi che coinvolgono questioni di convergenza di una successione possono essere affrontati analizzando il comportamento intrinseco della successione indipendentemente dal conoscere o meno il limite cui eventualmente la successione converge, limite che in molti casi pratici non è sempre di facile individuazione.

Poiché nozioni importanti quali la chiusura di un insieme, la densità di un insieme in un altro, la continuità di funzioni e così via sono esprimibili in termini di convergenza di successioni, si può facilmente intuire come il lavorare con uno spazio completo sia molto più desiderabile che non il lavorare con uno spazio non completo. Però, non sempre si può realizzare la condizione ottimale di avere a che fare con spazi completi, anzi, in molti casi della fisica matematica lo spazio in cui si opera è non completo. Ciò che si può allora sperare di fare è di immergere isometricamente lo spazio non completo in uno spazio completo più ampio, in modo tale cioè che tutte le proprietà metriche dello spazio non completo vengano riprodotte fedelmente nello spazio completo più ampio. L'ultimo risultato della precedente sezione ci fornisce un procedimento costruttivo per individuare in l_2 un completamento di \mathcal{S} e ciò è espresso dalla proprietà (i), mentre la proprietà (ii) può intuitivamente rappresentare il fatto che l'allargamento dello spazio \mathcal{S} al suo completato l_2 è in un certo senso "minimale".

Il completamento di uno spazio \mathcal{S} possiede l'ulteriore notevole proprietà di essere unico, a meno di isomorfismi unitari, nel senso del seguente

Teorema 8.2.1 *Se \mathcal{S} è uno spazio con prodotto interno non completo, la scelta di un sonc ordinato α in \mathcal{S} permette di costruire il completamento (l_2, U_α) , essendo*

(i) U_α una isometria dallo spazio \mathcal{S} in l_2 che associa ad ogni vettore $x \in \mathcal{S}$ il vettore $U_\alpha(x) = \{\langle u_\alpha | x \rangle\}$,

(ii) $\overline{U_\alpha(\mathcal{S})} = l_2$.

Sia (\mathcal{H}, U) un altro completamento di \mathcal{S} , ossia una coppia costituita da uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e da un operatore $U : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{H}$ soddisfacente le condizioni:

(i-a) U è una isometria da \mathcal{S} in \mathcal{H}

(ii-a) $\overline{U(\mathcal{S})} = \mathcal{H}$

allora esiste un unico operatore unitario $\hat{U}_\alpha : \mathcal{H} \rightarrow l_2$ che permette la identificazione $\mathcal{H} \equiv l_2$ e tale da rendere commutativo il diagramma della sottostante figura 8.2.1, ossia tale che

$$\hat{U}_\alpha \circ U = id \circ U_\alpha$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{U_\alpha} & U_\alpha(\mathcal{S}) \\
 \downarrow U & & \downarrow id \\
 \mathcal{H} & \xrightarrow{\hat{U}_\alpha} & l_2
 \end{array}$$

Figura 8.1:

In effetti, il precedente teorema si può dimostrare nel contesto più ampio del *principio di estensione generalizzato*. Precisamente,

Teorema 8.2.2 *Siano \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 due spazi con prodotto interno non completi e isomorfi fra di loro tramite l'operatore unitario $W : \mathcal{S}_1 \mapsto \mathcal{S}_2$. Se (\mathcal{H}_1, U_1) e (\mathcal{H}_2, U_2) sono due completamenti rispettivamente di \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 allora il principio di estensione generalizzato assicura le seguenti due cose:*

(1) *esiste un operatore unitario $\hat{W} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tale che*

$$\hat{W} \circ U_1 = U_2 \circ W$$

Ossia tale da rendere commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}_1 & \xrightarrow{W} & \mathcal{S}_2 \\
 \downarrow U_1 & & \downarrow U_2 \\
 \overline{U_1(\mathcal{S}_1)} = \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\hat{W}} & \mathcal{H}_2 = \overline{U_2(\mathcal{S}_2)}
 \end{array}$$

Figura 8.2:

(2) *l'operatore unitario \hat{W} è unico.*

Come si vede, la fig. 8.2.1 è un caso particolare della fig. 1. Il vero e proprio principio dell'estensione consiste nel seguente ulteriore caso particolare.

Teorema 8.2.3 *Siano \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 due spazi con prodotto interno non completi, densi rispettivamente negli spazi di Hilbert \mathcal{H}_1 ed \mathcal{H}_2 . Se W è un operatore unitario da \mathcal{S}_1 su \mathcal{S}_2 , esiste un operatore unitario $\hat{W} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tale che:*

(1) *$W(x) = \hat{W}(x)$ per ogni $x \in \mathcal{S}_1$,*

(2) *se $\hat{W} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ è un operatore unitario soddisfacente la condizione (1) allora*

$$\hat{W}(y) = \hat{W}(y) \text{ per ogni } y \in \mathcal{H}_1$$

In grafico,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}_1 & \xrightarrow{W} & \mathcal{S}_2 \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\
 \overline{U_1(\mathcal{S}_1)} = \mathcal{H}_1 & \xrightarrow{\hat{W}} & \mathcal{H}_2 = \overline{U_2(\mathcal{S}_2)}
 \end{array}$$

Figura 8.3:

Esempio 8.2.4 Sia $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ uno degli spazi funzionali $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ o $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sappiamo che $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ é denso nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^n)$ e quindi $(L_2(\mathbb{R}^n), \text{id})$ é un completamento di $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. D'altra parte, scelta una base ortonormale $\alpha = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ possiamo costruire il completamento (l_2, U_α) di $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ secondo il diagramma presentato nella figura 8.4

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{U_\alpha} & U_\alpha(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)) \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\
 L_2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\hat{U}_\alpha} & l_2
 \end{array}$$

Figura 8.4:

Per il principio dell'estensione stretta esisterà un unico operatore unitario $\hat{U}_\alpha : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow l_2$ estensione dell'operatore U_α , ossia tale che

$$\hat{U}_\alpha(\varphi) = U_\alpha(\varphi) = \{\langle u_n | \varphi \rangle : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

Siccome sappiamo che ogni base ortonormale dello spazio $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ é una base ortonormale dello spazio $L_2(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = \{u_n\}$ é una base ortonormale di $L_2(\mathbb{R}^n)$. Potremo allora considerare l'operatore unitario $\hat{U}_\alpha : L_2(\mathbb{R}^n) \mapsto l_2$ definito da

$$\hat{U}_\alpha(f) = \{\langle u_n | f \rangle : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{per ogni } f \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

che ovviamente soddisfa la condizione

$$\hat{U}_\alpha(\varphi) = U_\alpha(\varphi) = \{\langle u_n | \varphi \rangle : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$$

Dal precedente teorema segue che $\hat{U} = \hat{U}$. ■

Osservazione 8.2.5 In questo paragrafo abbiamo costruito un completamento (\mathcal{H}, U) di uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} e verificato che questo completamento é sostanzialmente unico a meno di isomorfismi unitari.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & \longrightarrow & U(\mathcal{S}) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathcal{H} = \overline{U(\mathcal{S})}
 \end{array}$$

Tramite l'isometria U siamo in grado di identificare $\mathcal{S} \equiv U(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{H}$ come spazi con prodotto interno. Per questo motivo, d'ora in avanti, riterremo \mathcal{S} un vero e proprio sottoinsieme di \mathcal{H} e considereremo il precedente diagramma come equivalente alle condizioni: $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{H}$

Daremo ora la dimostrazione del principio di estensione stretto. La dimostrazione del corrispondente principio di estensione generalizzato si può ricavare dai successivi teoremi una volta apportate le opportune modifiche. Richiamiamo il seguente teorema

Teorema 8.2.6 (Principio dell'estensione) *Siano \mathcal{E}_1 ed \mathcal{E}_2 due spazi di Banach, \mathcal{D}_1 una varietà lineare densa in \mathcal{E}_1 e $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ un operatore lineare limitato, ossia tale che esista una costante $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui*

$$\|Tx\|_2 \leq \alpha \|x\|_1 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}_1.$$

Allora esiste un'unica estensione lineare \hat{T} di T all'intero \mathcal{E}_1 tale che $\|\hat{T}x\|_2 \leq \alpha \|x\|_1$ per ogni $x \in \mathcal{E}_1$.

Proposizione 8.2.7 *Siano \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 due spazi di Hilbert, \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 due varietà lineari dense rispettivamente in \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 e $U : \mathcal{D}_1 \mapsto \mathcal{D}_2$ un operatore unitario. Esiste un unico operatore unitario $\hat{U} : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2$ estensione di U all'intero spazio \mathcal{H}_1 .*

Dimostrazione. Poiché $\|Ux\|_2 = \|x\|_1$ per ogni $x \in \mathcal{D}_1$ possiamo applicare il teorema 8.2.3 ottenendo che esiste un'unica estensione lineare $\hat{U} : \mathcal{H}_1 \mapsto \mathcal{H}_2$ tale che $\|\hat{U}x\|_2 \leq \|x\|_1$ per ogni $x \in \mathcal{H}_1$. Verifichiamo che \hat{U} è unitario. Infatti, se $x \in \mathcal{H}_1$ allora esiste una successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{D}_1 tale che $\lim x_n = x$. Per quanto visto nella dimostrazione del teorema 8.2.3, l'operatore \hat{U} si costruisce in modo tale da risultare per definizione $\hat{U}x = \lim Ux_n$. Avremo perciò che

$$\begin{aligned} \|\hat{U}x\|_2 &= \|\lim Ux_n\|_2 = \text{per la continuità della norma} \\ &= \lim \|Ux_n\|_2 = \text{per la unitarietà di } U \\ &= \lim \|x_n\|_1 = \|\lim x_n\|_1 = \|x\|_1 \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo verificato che \hat{U} è isometrico. Rimane da dimostrare la suriettività. Preso $x_2 \in \mathcal{H}_2$, esisterà una successione $\{x_n'' : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{D}_2 tale che $\lim x_n'' = x_2$. Indicato con $x_n' = U^{-1}x_n''$, avremo che la successione $\{x_n' : n \in \mathbb{N}\}$ è di vettori appartenenti a \mathcal{D}_1 e, quindi a maggior ragione, a \mathcal{H}_1 . In più di Cauchy in \mathcal{H}_1 ; infatti

$$\|x_n' - x_m'\|_1 = \|U^{-1}x_n'' - U^{-1}x_m''\|_1 = \|x_n'' - x_m''\|_2 \rightarrow 0$$

Ma essendo \mathcal{H}_1 completo, esisterà $x_1 \in \mathcal{H}_1$ tale che $\lim x_n' = x_1$. Considerando $\hat{U}x_1$ avremo che, essendo \hat{U} una estensione di U e avendo verificato che U è isometrico,

$$\begin{aligned} \|\hat{U}x_1 - x_2\|_2 &\leq \|\hat{U}x_1 - Ux_n'\|_2 + \|Ux_n' - x_2\|_2 \\ &= \|\hat{U}(x_1 - x_n')\|_2 + \|x_n'' - x_2\|_2 \\ &= \|x_1 - x_n'\|_1 + \|x_n'' - x_2\|_2 \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Pertanto $\hat{U}x_1 = x_2$, concludendo che per ogni $x_2 \in \mathcal{H}_2$ esiste un elemento $x_1 \in \mathcal{H}_1$ tale che $\hat{U}x_1 = x_2$. \square

8.3 Duale di uno spazio con prodotto interno. Notazione di Dirac: spazio dei vettori bra e spazio dei vettori ket

Sappiamo che uno spazio con prodotto interno \mathcal{S} (anche non separabile) é una struttura piuttosto articolata su cui sono definite due operazioni

- (i) $x_1 + x_2$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$
- (ii) λx per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ e ogni $x \in \mathcal{S}$

Consideriamo ora il duale (topologico) di \mathcal{S} , consistente di tutti i funzionali da \mathcal{S} in \mathbb{C} lineari e continui e che verrà indicato con \mathcal{S}^* . Pertanto

$$\mathcal{S}^* := \{l : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{lineare e continuo} \}$$

Ricordiamo che per i funzionali lineari la continuità in un punto, la continuità globale e la limitatezza sono proprietà fra loro equivalenti.

In particolare, un funzionale lineare $l : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ é limitato se e soltanto se esiste $\alpha \geq 0$ tale che $|l(x)| \leq \alpha \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{S}$.

Il duale \mathcal{S}^* di \mathcal{S} é uno spazio lineare rispetto alle usuali operazioni fra funzionali

$$(8.2) \quad l_1 + l_2 \in \mathcal{S}^* \quad \text{per ogni } l_1, l_2 \in \mathcal{S}^*$$

$$(8.3) \quad \lambda l \in \mathcal{S}^* \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e ogni } l \in \mathcal{S}^*$$

Lo spazio \mathcal{S}^* può essere munito della norma:

$$(iii) \quad \begin{aligned} \|l\|_\infty &:= \sup \left\{ \frac{|l(x)|}{\|x\|} : x \in \mathcal{S} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \{ |l(x)| : \|x\| = 1 \} \\ &= \inf \{ \alpha : |l(x)| \leq \alpha \|x\|, \text{ per ogni } x \in \mathcal{S} \} \end{aligned}$$

Dal fatto che \mathbb{C} é uno spazio di Banach ne segue che pure \mathcal{S} é completo rispetto alla norma introdotta. Inoltre, vale l'ulteriore proprietà:

$$(iii-a) \quad |l(x)| \leq \|l\|_\infty \|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{S}$$

Abbiamo che il duale \mathcal{S}^* di \mathcal{S} é un insieme sufficientemente ampio in quanto

fissato un qualsiasi elemento $x \in \mathcal{S}$, il funzionale $D_x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ definito dalla corrispondenza

$$D_x(y) := \langle x|y \rangle$$

é lineare e continuo e perciò risulta essere un elemento del duale \mathcal{S}^ di \mathcal{S} .*

Abbiamo così ottenuto che per ogni $x \in \mathcal{S}$ il funzionale D_x ora definito appartiene a \mathcal{S}^* e ciò ci permette di introdurre l'applicazione

$$D : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^*, \quad x \mapsto D_x.$$

Proposizione 8.3.1 *L'applicazione $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^*$ definita sopra é una anti-isometria da \mathcal{S} in \mathcal{S}^* .*

Dimostrazione. Essendo, qualunque sia $y \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} D_{(x_1+x_2)}(y) &= \langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle \\ &= D_{x_1}(y) + D_{x_2}(y) = (D_{x_1} + D_{x_2})(y) \end{aligned}$$

ne concludiamo che

$$(8.4) \quad D_{(x_1+x_2)} = D_{x_1} + D_{x_2}$$

Analogamente, per $D_{(\lambda x)}$ otteniamo

$$D_{(\lambda x)}(y) = \langle \lambda x | y \rangle = \bar{\lambda} \langle x | y \rangle = \bar{\lambda} D_x(y)$$

e perciò

$$(8.5) \quad D_{(\lambda x)} = \bar{\lambda} D_x.$$

Inoltre, fissato $x \in \mathcal{S}$, dalla disuguaglianza di Schwarz avremo che

$$|D_x(y)| = |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{S}$$

e perciò $\|D_x\|_\infty \leq \|x\|$. D'altra parte

$$\|x\|^2 = \langle x | x \rangle = D_x(x) \leq \|D_x\|_\infty \|x\|$$

e perciò $\|x\| \leq \|D_x\|_\infty$. Mettendo insieme questi ultimi due risultati ricaviamo che

$$(8.6) \quad \|D_x\|_\infty = \|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{S}$$

□

Indicato con $D(\mathcal{S})$ il range di \mathcal{S} rispetto all'antiisometria D , sappiamo che $D(\mathcal{S})$, in quanto varietà lineare di \mathcal{S} , é a sua volta uno spazio lineare complesso che, munito della norma (iii), diviene uno spazio lineare normato. L'anti-isometria suriettiva

$$D : \mathcal{S} \rightarrow D(\mathcal{S}), \quad x \rightarrow D_x$$

é ora un operatore antiunitario che permette l'identificazione, in quanto spazi unitari normati, di

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\stackrel{D}{\cong} D(\mathcal{S}) \\ (1) \quad x &\longleftrightarrow D_x \\ (2) \quad (x+y) &\longleftrightarrow D_{(x+y)} = D_x + D_y \\ (3) \quad \alpha x &\longleftrightarrow D_{(\alpha x)} = \bar{\alpha} D_x \end{aligned}$$

valendo inoltre le proprietà

$$\begin{aligned} (4) \quad \|x\| &= \|D_x\|_\infty \\ (5) \quad d(x, y) &= d_\infty(D_x, D_y) \end{aligned}$$

L'identificazione antilineare fra \mathcal{S} e $D(\mathcal{S})$, in quanto spazi normati, impone che $D(\mathcal{S})$ non sia completo se \mathcal{S} è non completo. In ogni caso lo spazio lineare normato \mathcal{S}^* è sempre completo e varrà il seguente diagramma

$$\begin{array}{c} \mathcal{S} \equiv D(\mathcal{S}) \\ \downarrow \\ \mathcal{S}^* \end{array}$$

Lo spazio $D(\mathcal{S}) := \{D_x : x \in \mathcal{S}\}$ può essere munito di un prodotto interno definito dalla

$$(iv) \quad \langle D_x | D_y \rangle := \overline{\langle x | y \rangle}$$

L'unica proprietà che può essere dubbia per questo prodotto interno è l'antilinearità a sinistra. Però

$$\begin{aligned} \langle D_{x_1} + D_{x_2} | D_y \rangle &= \langle D_{x_1+x_2} | D_y \rangle = \overline{\langle x_1 + x_2 | y \rangle} \\ &= \overline{\langle x_1 | y \rangle} + \overline{\langle x_2 | y \rangle} = \langle D_{x_1} | D_y \rangle + \langle D_{x_2} | D_y \rangle \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \langle \lambda D_x | D_y \rangle &= \langle D_{(\overline{\lambda}x)} | D_y \rangle = \overline{\langle \overline{\lambda}x | y \rangle} = \overline{\overline{\lambda} \langle x | y \rangle} \\ &= \overline{\overline{\lambda}} \overline{\langle x | y \rangle} = \overline{\overline{\lambda}} \langle D_x | D_y \rangle \end{aligned}$$

La norma indotta dal prodotto interno ora introdotto è:

$$\|D_x\| = \sqrt{\langle D_x | D_x \rangle} = \sqrt{\|x\|^2} = \|D_x\|_\infty$$

In questo modo \mathcal{S} e $D(\mathcal{S})$ sono due spazi con prodotto interno antiisomorfi fra di loro.

Esempio 8.3.2 Sia $\mathcal{E}(I)$ uno degli spazi funzionali $\mathcal{D}(I)$ oppure $\mathcal{S}(I)$. Sappiamo che $\mathcal{E}(I)$ è uno spazio con prodotto interno

$$\langle \varphi | \psi \rangle := \int_I \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$$

Fissato $\varphi \in \mathcal{E}(I)$ avremo che il funzionale

$$\begin{aligned} D_\varphi : \mathcal{E}(I) &\mapsto \mathbb{C} \\ \psi &\mapsto D_\varphi(\psi) := \int_I \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx \end{aligned}$$

che potremo scrivere in forma operatoriale come

$$D_\varphi = \int_I dx \overline{\varphi(x)} (\cdot)$$

è un funzionale lineare e continuo definito su $\mathcal{E}(I)$ e perciò è un vettore dello spazio duale $\mathcal{E}(I)^*$ di $\mathcal{E}(I)$. In questo modo l'operatore

$$\begin{aligned} D : \mathcal{E}(I) &\mapsto \mathcal{E}(I)^* \\ \varphi &\mapsto D_\varphi \end{aligned}$$

é un'antiisometria non suriettiva tale che

$$\|\varphi\| = \|D_\varphi\|_\infty$$

ove

$$\|\varphi\| = \sqrt{\int_I |\varphi(x)|^2 dx}$$

e

$$\|D_\varphi\|_\infty = \sup\{|D_\varphi(\psi)| : \|\psi\| = 1\} = \sup\left\{\left|\int_I \bar{\varphi}(x)\psi(x) dx\right| : \|\psi\| = 1\right\}$$

■

Queste considerazioni fatte nel caso in cui \mathcal{S} sia uno spazio con prodotto interno permettono di introdurre con rigore la notazione usata da P.A.M. Dirac nell'opera: "I principi della Meccanica Quantistica" (1959, Boringhieri). In essa viene utilizzata come struttura matematica fondamentale uno spazio lineare infinito-dimensionale (e complesso). Infatti "i vettori ordinari, esistenti in uno spazio di dimensione finita, non sono sufficientemente generali per la maggior parte dei sistemi dinamici in meccanica quantistica. Dobbiamo fare una generalizzazione ai vettori di uno spazio con un numero infinito di dimensioni, e la trattazione matematica diviene complicata a causa dei problemi di convergenza. (...) È desiderabile avere un nome particolare per descrivere i vettori (...) in Meccanica Quantistica, sia che essi siano in uno spazio di dimensione finita o infinita. Noi li chiameremo *vettori ket*, o semplicemente *ket* e indicheremo il generico di tali vettori con il simbolo particolare $|x\rangle$."

I vettori ket possono essere moltiplicati per numeri complessi e possono essere sommati fra di loro per dare altri vettori ket (...)"

Le operazioni su \mathcal{S} sono indicate con

$$\begin{aligned} \text{(k-i)} \quad & |x_1\rangle + |x_2\rangle = |x_1 + x_2\rangle \\ \text{(k-ii)} \quad & \lambda|x\rangle = |\lambda x\rangle \end{aligned}$$

Viene poi preso in considerazione un sottoinsieme del duale algebrico di \mathcal{S} . Infatti, "ogni qualvolta si ha un insieme di vettori in una qualsiasi teoria matematica, possiamo sempre individuare un secondo insieme di vettori, che i matematici chiamano i vettori duali. (...) Supponiamo di avere un numero ϕ che é funzione di un vettore ket $|x\rangle$, ossia che a ciascun vettore ket $|x\rangle$ faccia corrispondere il numero ϕ e si supponga inoltre che la funzione sia lineare, il che significa che il numero corrispondente a $|x_1 + x_2\rangle$ sia la somma dei numeri corrispondente a $|x_1\rangle$ e a $|x_2\rangle$ e il numero corrispondente a $|\lambda x\rangle$ sia λ volte il numero corrispondente a $|x\rangle$, essendo λ un qualsiasi fattore numerico. (...) Chiameremo tali vettori nuovi come *vettori bra*, o semplicemente *bra*, e denoteremo il generale vettore bra col simbolo $\langle x|$."

Pertanto viene richiesto esplicitamente che un vettore bra sia un funzionale lineare $\langle x| : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$ e col simbolo $\langle x|y\rangle$ viene denotato il risultato ϕ dell'azione di $\langle x|$ sul generico elemento $|y\rangle$ di \mathcal{S} . Infatti, citando Dirac "il numero ϕ corrispondente ad ogni $|y\rangle$ può essere considerato come il prodotto scalare di quel $|y\rangle$ con qualche nuovo vettore, essendoci uno di questi nuovi vettori (che verrà indicato con $\langle x|$) per ciascuna funzione lineare dei vettori ket $|y\rangle$ (...) Il prodotto scalare di un vettore bra $\langle x|$ con un vettore ket $|y\rangle$ sarà scritto $\langle x|y\rangle$. (...) Un prodotto scalare $\langle x|y\rangle$ appare ora come una espressione completa in parentesi e

un vettore bra $\langle x|$ o un vettore ket $|y\rangle$ (i termini “bra” e “ket” derivano dalla parola inglese bra(c)ket= parentesi, n.d.r.) come espressioni incomplete.

Avremo così la regola che *ogni espressione completa in parentesi denota un numero e ogni espressione incompleta denota un vettore, del tipo bra o ket a seconda che esso contenga la prima o la seconda parte della parentesi.*”

Viene quindi assunto che “...esista una applicazione iniettiva fra i bra e i ket, tale che il bra corrispondente a $|x_1\rangle + |x_2\rangle$ sia la somma dei bra corrispondenti rispettivamente a $|x_1\rangle$ e a $|x_2\rangle$, mentre quello corrispondente a $\lambda|x\rangle$ sia $\bar{\lambda}$ volte quello corrispondente a $|x\rangle$...”

In altri termini viene assunta l’esistenza di una applicazione iniettiva

$$D : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^*$$

la cui azione sul generico vettore $|y\rangle$ può essere indicata con

$$D_{|x\rangle}(|y\rangle) = \langle x|y\rangle$$

e soddisfacente le condizioni

$$\begin{aligned} D_{|x_1\rangle + |x_2\rangle} &= D_{|x_1\rangle} + D_{|x_2\rangle} \\ D_{\lambda|x\rangle} &= \bar{\lambda}D_{|x\rangle} \end{aligned}$$

Osservazione 8.3.3 $\langle x|y\rangle$ viene visto come l’azione del funzionale lineare e continuo $\langle x| \in \mathcal{S}^*$ sul vettore dello spazio con prodotto interno \mathcal{S} indicato convenzionalmente con $|y\rangle$.

Quindi il funzionale lineare $D_{|x\rangle} = \langle x|$ agente sui vettori di \mathcal{S} indicati sottoforma di $|y\rangle$, producendo come risultato $\langle x|y\rangle$.

Tenuto conto delle (k-i) e (k-ii), potremo compendiare i risultati ottenuti nella seguente tabella

vettori KET	vettori BRA
$ x\rangle \in \mathcal{S}$	$\langle x \in D(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}^*$
$ x_1 + x_2\rangle = x_1\rangle + x_2\rangle$	$\langle x_1 + x_2 = \langle x_1 + \langle x_2 $
$ \alpha x\rangle = \alpha x\rangle$	$\langle \alpha x = \bar{\alpha}\langle x $

Tabella 8.1: Convenzione di Dirac

Ricordiamo che per la (8.6) si ottiene

$$\| |x\rangle \| = \| \langle x| \|_\infty.$$

Generalizzando quanto visto sino ad ora, si potrebbe allargare lo spazio dei vettori bra assumendo che un generico vettore bra sia un funzionale lineare e continuo $l : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$, ossia un elemento del duale topologico \mathcal{S}^* di \mathcal{S} . In analogia colle notazioni introdotte da Dirac, useremo indicare con il simbolo $\langle l|y\rangle$, il risultato dell’azione $l(y)$ del funzionale lineare l sul vettore $y \in \mathcal{S}$.

Pertanto un vettore bra $\langle l| \in \mathcal{S}^*$ sarà un funzionale lineare continuo

$$\langle l| : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}, y \mapsto \langle l|y\rangle := l(y)$$

ove la linearità si esprime nelle condizioni

$$\begin{aligned} \langle l|y_1 + y_2\rangle &= \langle l|y_1\rangle + \langle l|y_2\rangle \\ \langle l|\alpha y\rangle &= \alpha \langle l|y\rangle \end{aligned}$$

mentre la continuità, nella forma della limitatezza (iii-a), assume la forma di una disuguaglianza di Schwarz

$$|\langle l|y\rangle| \leq \|l\|_\infty \|y\| \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{S}.$$

Ciò implica che la “lunghezza” o, più precisamente, la norma $\|l\|_\infty$ del vettore bra l sia finita.

Le operazioni algebriche su \mathcal{S}^* vengono definite nel seguente modo

$$\begin{aligned} \langle l_1 + l_2| &:= \langle l_1| + \langle l_2| \\ \langle \alpha l| &:= \bar{\alpha} \langle l| \end{aligned}$$

ovvero le loro azione sul generico vettore bra $\langle y|$ sono

$$\begin{aligned} \langle l_1 + l_2|y\rangle &= \langle l_1|y\rangle + \langle l_2|y\rangle \\ \langle \alpha l|y\rangle &= \bar{\alpha} \langle l|y\rangle \end{aligned}$$

L'estensione ora fatta dello spazio dei vettori bra sino a comprendere *tutti* i funzionali lineari e continui é certamente coerente con la necessità evidenziata da Dirac, nel paragrafo 10 del libro sopra citato, di allargare ulteriormente lo spazio dei vettori bra, addirittura oltre \mathcal{S}^* .

Infatti, egli afferma che: “nel nostro lavoro sino al momento attuale si é ritenuto implicito che i vettori bra e i vettori ket siano di lunghezza finita e che i loro prodotti scalari siano finiti. Noi vediamo ora la necessità di indebolire queste condizioni (...). Se non operassimo questo indebolimento (...) la teoria sarebbe troppo insufficiente per molti problemi pratici.”

Questo allargamento, legato alla necessità di soddisfare precise richieste teoriche della Meccanica Quantistica, consisterà nel considerare come utili rappresentativi di vettori bra secondo Dirac, opportuni elementi dello spazio duale algebrico \mathcal{S}^+ di \mathcal{S} .

8.4 Sottospazi ortogonali in spazi di Hilbert

Se \mathcal{S} é uno spazio con prodotto interno complesso e separabile, sull'insieme $\Sigma(\mathcal{S})$ di tutti i suoi sottospazi possiamo isolare quei particolari sottospazi $\mathcal{M} \in \Sigma(\mathcal{S})$ tali che $\mathcal{S} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ e il cui insieme viene indicato con $\mathcal{E}(\mathcal{S})$.

Diamo adesso una condizione sufficiente per garantire che un sottospazio sia un elemento di $\mathcal{E}(\mathcal{S})$.

Proposizione 8.4.1 *Se M é una varietà lineare completa di \mathcal{S} allora*

$$M \oplus M^\perp = \mathcal{S}$$

ovvero $M \in \mathcal{E}(\mathcal{S})$

Dimostrazione. Dalla completezza di M segue che esso é un chiuso e quindi é uno spazio di Hilbert. Considerato allora un sonc $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ in M e preso $x \in \mathcal{S}$ avremo che $\sum |\langle u_n|x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ e perciò la successione $\{\langle u_n|x\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ é un elemento di l_2 . Dal teorema di Fisher-Riesz segue che la serie

$\sum \langle u_n | x \rangle u_n$ é convergente in M e posto $y = \sum \langle u_n | x \rangle u_n \in M$ e $z = x - y$ avremo che per ogni n

$$\begin{aligned} \langle u_n | z \rangle &= \left\langle u_n \left| x - \sum_i \langle u_i | x \rangle u_i \right. \right\rangle \\ &= \langle u_n | x \rangle - \sum_i \langle u_i | x \rangle \langle u_n | u_i \rangle = 0 \end{aligned}$$

e perciò $z \perp M$. Quindi, per ogni $x \in \mathcal{S}$ esistono $y \in M$ e $z \in M^\perp$ tali che $x = y + z$. \square

Se lo spazio in esame é uno spazio di Hilbert \mathcal{H} allora ogni sottospazio \mathcal{M} é completo e perciò avremo la seguente proposizione.

Proposizione 8.4.2 *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert, per ogni sottospazio \mathcal{M} di \mathcal{H} si ha che $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ e da questo risultato segue che $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \Sigma(\mathcal{H})$.*

Vogliamo dimostrare in questo paragrafo il seguente notevole teorema:

Teorema 8.4.3 *Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (i) \mathcal{S} é uno spazio di Hilbert.
- (ii) $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp = \mathcal{S}$ per ogni sottospazio \mathcal{M} di \mathcal{S} .
- (iii) $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$ per ogni sottospazio \mathcal{M} di \mathcal{S} .
- (iv) Se \mathcal{M} é un sottospazio proprio di \mathcal{S} allora $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$.
- (v) Teorema della rappresentazione di Riesz: Se $l : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{C}$ é un funzionale lineare continuo allora esiste $x \in \mathcal{S}$ tale che

$$l(y) = \langle x | y \rangle \text{ per ogni } y \in \mathcal{S}$$

$$\text{e } \|l\| = \|x\|$$

- (vi) \mathcal{S} e \mathcal{S}^* sono antiunitariamente isomorfi.

Dimostrazione. Abbiamo appena verificato che la (i) implica la (ii);

Dimostriamo che la (ii) implica la (iii). Siccome per il corollario 1.6.5 \mathcal{M}^\perp è un sottospazio, applicando ad esso la (ii) si ottiene $\mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{S}$. Da ciò segue che $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$

Dimostriamo che la (iii) implica la (iv). Sia \mathcal{M} un sottospazio proprio di \mathcal{S} e sia $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ allora per la (iii) $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{S}$ contro l'ipotesi.

Dimostriamo che la (iv) implica la (v). Sia $l \in \mathcal{S}^*$. Se l é il funzionale nullo, $l(y) = 0$, allora esiste il vettore $x = 0$ di \mathcal{S} tale che $l(y) = \langle 0 | y \rangle$ per ogni $y \in \mathcal{S}$. Se l non é nullo, considerato $\text{Ker}(l) = \{x \in \mathcal{S} : l(x) = 0\}$, esso é un sottospazio di \mathcal{S} , ed é un sottospazio proprio di \mathcal{S} altrimenti l sarebbe il funzionale nullo. Allora, dalle ipotesi che $\text{Ker}(l)^\perp \neq \{0\}$ segue che esisterà un vettore $z \in \text{Ker}(l)^\perp$ con $z \neq 0$. Poiché

$$l[l(y)z - l(z)y] = l(y)l(z) - l(z)l(y) = 0$$

abbiamo che $[l(y)z - l(z)y] \in \text{Ker}(l)$ per ogni $y \in \mathcal{S}$. Da ciò segue che:

$$0 = \left\langle z \mid l(y)z - l(z)y \right\rangle = l(y)\|z\|^2 - l(z)\langle z|y \rangle \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{S}.$$

Pertanto, essendo

$$l(y) = \frac{l(z)}{\|z\|^2} \langle z|y \rangle = \left\langle \frac{\overline{l(z)}}{\|z\|^2} z \mid y \right\rangle \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{S}$$

abbiamo ottenuto che, per ogni $y \in \mathcal{S}$, esiste

$$x = \frac{\overline{l(z)}}{\|z\|^2} z \quad \text{con } z \text{ tale che } l(y) = \langle x|y \rangle$$

Dal teorema di Fisher-Riesz 4.1.1 si ricava la relazione tra le norme.

Dimostriamo che la (v) implica la (vi). L'operatore

$$D : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^*, x \mapsto D_x = \langle x|$$

è un operatore antiunitario, in quanto è un'antiisometria, che risulta essere suriettiva per l'ipotesi (v).

Infine dimostriamo che la (vi) implica la (i). Dato che \mathcal{S}^* è completo, ne seguirà che pure \mathcal{S} è completo, ossia che \mathcal{S} è uno spazio di Hilbert. \square

Corollario 8.4.4 *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert ed \mathcal{M} un suo sottospazio, allora:*

$$\mathcal{M}^\perp \neq \{0\} \text{ sse } \mathcal{M} \subset \mathcal{H}$$

Dimostrazione. Dal precedente teorema abbiamo visto che $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ implica $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$. Rimane da verificare che $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$ implica $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, ovvero che $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ implica $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ e ciò è banalmente vero. \square

Esempio 8.4.5 Sia $d_2(\mathbb{C})$ lo spazio con prodotto interno formato da tutte le successioni $\{\alpha_k : k \in \mathbb{C}\}$ definitivamente nulle. Sia \mathcal{M} l'insieme di tutte le successioni $\{\lambda_k\} \in d_2(\mathbb{C})$ tali che $\sum(\frac{1}{k})\lambda_k = 0$, allora \mathcal{M} è un sottospazio proprio di $d_2(\mathbb{C})$, il cui annihilatore è $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ (basta osservare che \mathcal{M} contiene gli elementi della forma $\{1, 0, 0, \dots, n, 0, 0, \dots\}$). Pertanto $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \neq d_2(\mathbb{C})$ e ciò in accordo col fatto che $d_2(\mathbb{C})$ non è completo. Abbiamo quindi l'esempio di uno spazio non completo $d_2(\mathbb{C})$ in cui esiste il sottospazio \mathcal{M} che non soddisfa le proprietà (ii) (iii) (iv). \blacksquare

Corollario 8.4.6 *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e \mathcal{A} un qualsiasi sottoinsieme, allora $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ è il sottospazio generato da \mathcal{A} .*

Dimostrazione. Sia \mathcal{M} un generico sottospazio di \mathcal{H} contenente \mathcal{A} , allora $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ da cui (??riferimento??) $\mathcal{A}^\perp \subseteq \mathcal{M}^\perp$ e $\mathcal{A}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp}$. Per la (ii) del teorema 8.4.3 $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$, allora $\mathcal{A}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}$, per qualsiasi sottospazio \mathcal{M} contenente \mathcal{A} . Dato che, per il corollario 1.6.5, $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ è un sottospazio allora $\mathcal{A}^{\perp\perp}$ è il più piccolo sottospazio di \mathcal{H} contenente \mathcal{A} . \square

8.4.1 Equivalenza antiunitaria fra uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e il suo duale topologico \mathcal{H}^*

Ricordiamo che l'operatore $\hat{D} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^*$ definito per ogni $x \in \mathcal{H}$ dalla relazione $\hat{D}_x = \langle x |$ é antiunitario, in quanto antiisometria da \mathcal{H} in \mathcal{H}^* che risulta essere suriettiva per il punto (v) del teorema 8.4.3 che assicura che per ogni $l \in \mathcal{H}^*$ esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che $D_x = \langle x | = l$. Potremo definire su \mathcal{H}^* il prodotto interno

$$(8.7) \quad \langle \hat{D}_x | \hat{D}_y \rangle := \overline{\langle x | y \rangle}$$

che rende \mathcal{H}^* uno spazio di Hilbert antiisomorfo a \mathcal{H} tramite l'operatore \hat{D} . La (8.7) nel caso particolare di $y = x$, conduce al risultato che la norma indotta da questo prodotto interno é proprio la norma $\| \cdot \|_\infty$ su \mathcal{H}^* . Infatti

$$\| \hat{D}_x \| := \sqrt{\langle \hat{D}_x | \hat{D}_x \rangle} = \| x \| = \| \hat{D}_x \|_\infty$$

In questo modo lo spazio di Hilbert \mathcal{H} é identificato col suo duale \mathcal{H}^* tramite l'antiisomorfismo \hat{D} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \equiv & \mathcal{H}^* \\ x & \longleftrightarrow & \langle x | \end{array}$$

Esempio 8.4.7 Su $L_2(I)$ il prodotto interno é dato da

$$\langle f | g \rangle = \int_I \overline{f(x)} g(x) dx$$

e perciò, fissato $f \in L_2(I)$, il funzionale $\hat{D}_f : L_2(I) \mapsto \mathbb{C}$ definito da $\hat{D}_f := \int_I dx \overline{f(x)}(\cdot)$ é lineare e continuo, ossia é un elemento di $L_2(I)^*$. In questo caso potremo definire su $L_2(I)^*$ il prodotto interno

$$\langle \hat{D}_f | \hat{D}_g \rangle = \overline{\langle f | g \rangle} = \overline{\int_I \overline{f(x)} g(x) dx} = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$$

da cui si induce la norma

$$\| \hat{D}_f \| = \sqrt{\langle \hat{D}_f | \hat{D}_f \rangle} = \sqrt{\int_I | f(x) |^2 dx} = \| f \| = \| \hat{D}_f \|_\infty$$

Pertanto l'operatore

$$\hat{D} : L_2(I) \mapsto L_2(I)^*, f \mapsto \hat{D}_f$$

é un'antiisometria suriettiva che permette di identificare lo spazio di Hilbert $L_2(I)$ con il suo duale $L_2(I)^*$. In particolare si ha che $L_2(I)^* = \{ \hat{D}_f : f \in L_2(I) \}$ e in piú $\| \hat{D}_f \|_\infty = \| f \|$, ove $\| f \|$ é la seguente norma indotta dal prodotto interno

$$\| f \| = \sqrt{\int_I | f(x) |^2 dx}$$

mentre $\| \hat{D}_f \|_\infty$ é la norma introdotta sul duale di uno spazio lineare normato

$$\| \hat{D}_f \|_\infty = \sup\{ | \hat{D}_f(g) | : \| g \| = 1 \}.$$

■

Nei paragrafi precedenti ci siamo occupati degli spazi con prodotto interno e abbiamo visto che ogni spazio con prodotto interno \mathcal{S} , se non è completo, può essere completato tramite uno spazio di Hilbert \mathcal{H} contenente \mathcal{S} come sottovarietà lineare densa in \mathcal{H} . Siamo quindi portati a considerare coppie $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$, ove \mathcal{S} è uno spazio con prodotto interno e \mathcal{H} è uno spazio di Hilbert, soddisfacenti le condizioni

- (i) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$
- (ii) $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{H}$

Per ciò che riguarda i duali di tali spazi potremo considerare il diagramma non chiuso

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xlongequal{D} & D(\mathcal{S}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xlongequal{\hat{D}} & \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{S}^* \end{array}$$

Ciò che vogliamo verificare ora è che esiste un operatore unitario $\tilde{D} : \mathcal{H}^* \mapsto \mathcal{S}^*$ che permette l'identificazione dei due spazi duali \mathcal{H}^* e \mathcal{S}^* , chiudendo il diagramma precedente nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xlongequal{D} & D(\mathcal{S}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \xlongequal{\hat{D}} & \mathcal{H}^* \xlongequal{\tilde{D}} \mathcal{S}^* \end{array}$$

Tenendo presente il principio di estensione espresso nel teorema 8.2.3, ricaviamo che

- (iii) per ogni $l \in \mathcal{S}^*$ esiste un'unica estensione $\hat{l} \in \mathcal{H}^*$ tale che $\|l\|_\infty = \|\hat{l}\|_\infty$

La (iii) permette quindi di introdurre l'applicazione

- (iv) $\mathcal{S}^* \mapsto \mathcal{H}^*, l \mapsto \hat{l}$

D'altra parte per ogni $\tilde{l} \in \mathcal{H}^*$ esiste un unico elemento $l \in \mathcal{S}^*$, precisamente $l = \tilde{l}|_{\mathcal{S}}$, la restrizione di \tilde{l} ad \mathcal{S} , tale che costruita la sua estensione \hat{l} secondo la (iii) si abbia $\hat{l} = \tilde{l}$.

In questo modo la (iv) istituisce una corrispondenza biunivoca fra \mathcal{S}^* e \mathcal{H}^* che è ovviamente lineare e che in più, grazie alla relazione $\|l\|_\infty = \|\hat{l}\|_\infty$, è una isometria. Pertanto, la (iv) definisce un isomorfismo fra gli spazi di Banach \mathcal{S}^* e \mathcal{H}^* .

Proposizione 8.4.8 $D(\mathcal{S})$ è denso in \mathcal{S}^* , ossia $\overline{D(\mathcal{S})} = \mathcal{S}^*$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathcal{S} \equiv D(\mathcal{S})$ e perciò pure $\overline{\mathcal{S}} \equiv \overline{D(\mathcal{S})}$, ma essendo $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{H}$ ne ricaviamo che $\mathcal{H} \equiv \overline{D(\mathcal{S})}$. D'altra parte $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^*$ e perciò $\mathcal{H}^* \equiv \overline{D(\mathcal{S})}$; ma per quanto ora dimostrato $\mathcal{H}^* \equiv \mathcal{S}^*$ e quindi $\mathcal{S}^* \equiv \overline{D(\mathcal{S})}$. Essendo $D(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}^*$ non potrà che essere $\overline{D(\mathcal{S})} = \mathcal{S}^*$. \square

Capitolo 9

Trasformata di Fourier e operatore di Fourier-Plancherel

9.1 La trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Uno dei più importanti operatori unitari della Fisica Matematica é la trasformata di Fourier delle funzioni appartenenti a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. In questo paragrafo, per motivi di chiarezza che saranno facilmente compresi, useremo il simbolo $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ per indicare lo spazio delle funzioni di classe \mathcal{C}^∞ su \mathbb{R} a rapida decrescita all'infinito, in cui si intende che il singolo vettore $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ é una funzione della variabile x . Ovviamente $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ é lo spazio delle funzioni la cui variabile indipendente é ξ , di classe \mathcal{C}^∞ e a rapida decrescita all'infinito.

Teorema 9.1.1 (i) Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ la seguente definizione é ben posta:

$$\hat{\phi}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx$$

e la funzione così ottenuta $\hat{\phi}$ é un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$

(ii) Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ la seguente definizione é ben posta

$$\check{\phi}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \phi(\xi) d\xi$$

e la funzione $\check{\phi}$ così ottenuta é un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$.

Dimostrazione. Fissato un valore $\xi \in \mathbb{R}$, la funzione $e^{-i\xi x} \phi(x)$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ ed in più

$$|e^{-i\xi x} \phi(x)| = |\phi(x)| \leq \frac{h}{1+x^2}$$

e ha senso (sacri testi ??) l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx \in \mathbb{C}$$

e questo permette di definire una funzione della variabile ξ

$$\hat{\phi}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx$$

Si tratta ora di verificare che $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$. Consideriamo

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{\phi}(\xi) &= \frac{d^k}{d\xi^k} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k e^{-i\xi x} \phi(x) dx \end{aligned}$$

da cui, per ogni intero positivo p fissato, segue che

$$\begin{aligned} (-i\xi)^p \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^k \frac{d^p e^{-i\xi x}}{dx^p} \phi(x) dx \\ &= \text{integrando per parti} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (-ix)^k \phi(x) \frac{d^{p-1} e^{-i\xi x}}{dx^{p-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{p-1} e^{-i\xi x}}{dx^{p-1}} \frac{d(-ix)^k \phi(x)}{dx} dx \right\} \\ &= \text{iterando questo processo } p \text{ volte} \\ &= \frac{(-1)^p}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{d^p (-ix)^k \phi(x)}{dx^p} dx \end{aligned}$$

Essendo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$, pure $(-ix)^k \phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$, e perciò anche

$$\frac{d^p}{dx^p} [(-ix)^k \phi(x)] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$$

e quindi questo integrale é ben definito, e perciò, fissati p e k , avremo che:

$$\left| \xi^p \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{\phi}(\xi) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \frac{d^p (-ix)^k \phi(x)}{dx^p} dx \right| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

da cui segue

$$\left| \xi^p \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{\phi}(\xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^p (-ix)^k \phi(x)}{dx^p} \right| dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

e perciò esisterà una costante C_{pk} tale che

$$\sup \left| \xi^p \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{\phi}(\xi) \right| = C_{pk}$$

Da ciò segue che $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$. In modo analogo si verifica la (ii). \square

Definizione 9.1.2 Per ogni funzione $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$, si chiama trasformata di Fourier di ϕ la funzione $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ definita da:

$$\hat{\phi}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \phi(x) dx$$

mentre si chiama trasformata inversa di Fourier di $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ la funzione $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ definita da:

$$\check{\phi}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \phi(\xi) d\xi$$

Esempio 9.1.3 La trasformata di Fourier della funzione $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ è la funzione $\hat{\phi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Infatti, cominciamo col considerare l'eguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx \end{aligned}$$

Si tratta ora di calcolare l'integrale a secondo membro. A questo proposito, si consideri la funzione complessa $e^{-\frac{z^2}{2}}$ e calcoliamone l'integrale curvilineo

$$\int_{\Gamma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

lungo la curva Γ costituita dai segmenti:

$$I_1 = [-\beta, \beta] \quad I_2 = [\beta, \beta + i\alpha] \quad I_3 = [\beta + i\alpha, -\beta + i\alpha] \quad I_4 = [-\beta + i\alpha, -\beta]$$

ove α e β sono due numeri reali positivi.

La funzione $e^{-\frac{z^2}{2}}$ è analitica su Γ e nell'interno di Γ e perciò, per il teorema integrale di Cauchy, l'integrale curvilineo in esame è nullo.

Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \int_{I_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &= \left| \int_0^\alpha e^{-\frac{(\beta+ix)^2}{2}} i dx \right| \leq \int_0^\alpha \left| e^{-\left[\frac{\beta^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{i\beta x}{2}\right]} \right| dx \\ &= e^{-\frac{\beta^2}{2}} \int_0^\alpha e^{\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

questo secondo membro, fissato α , tende a zero per $\beta \rightarrow +\infty$ e perciò

$$\int_{I_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \rightarrow 0 \text{ per } \beta \rightarrow +\infty$$

ed analogamente si verifica che

$$\int_{I_4} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \rightarrow 0 \text{ per } \beta \rightarrow +\infty$$

Perciò avremo che:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{I_3} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{I_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ovvero

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-\frac{(x+i\alpha)^2}{2}} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

da cui, passando al limite per $\beta \rightarrow \infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\alpha)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Ora sia $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; allora

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2+s^2)}{2}} dx ds \\ &= \int_0^{2\pi} \pi \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

Pertanto otteniamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Concludendo dunque col risultato che

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

■

Esempio 9.1.4 Verifichiamo ora che

$$\frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} dx$$

ovvero, la Trasformata di Fourier della funzione $\phi(x) = e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$, con $\alpha \neq 0$, è la funzione

$$\check{\phi}(\xi) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\alpha^2 \xi^2}{2}}$$

Infatti,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} [e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}] dx = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\frac{\xi}{\alpha})(\alpha x)} e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} d(\alpha x) \right] = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Si osservi che $\phi(x) = e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ è una funzione con un picco nell'origine, monotona decrescente per $x \rightarrow \pm\infty$, la cui larghezza del picco è proporzionale ad α^2 . Analogamente, la sua trasformata di Fourier

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

è una funzione con picco nell'origine, monotona non decrescente per $x \rightarrow \pm\infty$, la cui larghezza del picco è proporzionale a $\frac{1}{\alpha^2}$. Pertanto, quanto più è stretto il picco di ϕ , tanto più è largo il picco di $\hat{\phi}$ e viceversa. ■

Esercizio 9.1.5 Con un procedimento analogo a quello dell'esempio ora visto, si verifichi che la trasformata di Fourier della funzione gaussiana $\phi(x) = e^{-\gamma x^2}$ è la funzione

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}}$$

Riassumiamo questi risultati nella seguente tabella.

funzione $\phi(x)$	trasformata di Fourier $\hat{\phi}(\xi)$
$e^{-\frac{x^2}{2}}$	$e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
$e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$	$\frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\xi^2}{2\alpha^2}}$
$e^{-\gamma x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2\gamma}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}}$

Proposizione 9.1.6 Sia $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$; la trasformata di Fourier della sua complessa coniugata soddisfa le relazioni $\widehat{\bar{\phi}} = \overline{\hat{\phi}}$ e $\overline{\hat{\phi}} = \widehat{\bar{\phi}}$.

Dimostrazione. Considerando che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \overline{\phi(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e^{i\xi x} \phi(x)} dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \phi(x) dx}$$

la relazione $\widehat{\bar{\phi}} = \overline{\hat{\phi}}$ é così dimostrata. L'altra relazione si ottiene in maniera analoga. \square

Proposizione 9.1.7 Sia $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ e $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ allora vale la relazione:

$$(9.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \hat{\phi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) \phi(x+y) dy$$

Dimostrazione. Infatti il primo membro della (9.1) é uguale a:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \left\{ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} \phi(t) dt \right\} e^{ix\xi} d\xi \\ = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-i\xi(t-x)} d\xi \right\} \phi(t) dt \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(t-x) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) \phi(x+y) dy \end{aligned}$$

\square

Proposizione 9.1.8 Per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha che $\hat{\hat{\phi}} = \phi$ e $\hat{\hat{\hat{\phi}}} = \hat{\phi}$

Dimostrazione. Infatti, fissato un $\delta > 0$, se consideriamo la trasformata di Fourier di $g(\delta \cdot \xi)$ al posto di $g(\xi)$ avremo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi} g(\delta \cdot \xi) d\xi &= \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-iy \frac{t}{\delta}} dt \\ &= \frac{1}{\delta} \hat{g}\left(\frac{y}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Pertanto la (9.1), nel caso della funzione $g(\delta \cdot \xi)$ diviene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\delta \cdot \xi) \hat{\phi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}\left(\frac{y}{\delta}\right) \phi(x+y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) \phi(x+\delta y) dy \end{aligned}$$

assumendo $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e ricordando che $\hat{g}(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$, ricaviamo la seguente relazione per δ tendente a zero:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\delta\xi)^2}{2}} \hat{\phi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \phi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \phi(x)$$

da cui

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

ovvero

$$(9.2) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \check{\phi} = \phi,$$

In maniera analoga si dimostra l'altra uguaglianza

$$(9.3) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \hat{\phi} = \phi,$$

□

Teorema 9.1.9 *Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ allora é verificata la seguente eguaglianza di Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi$$

Dimostrazione. Verifichiamo che é soddisfatta l'eguaglianza. La (9.1) proposizione 9.1.7, nel caso particolare in cui $x = 0$, assume la forma

$$(9.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y) \phi(y) dy$$

Considerata la (9.4) nel caso particolare $g(\xi) = \overline{\hat{\phi}}(\xi)$ e ponendo $y = x$ avremo la

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{\phi}}(\xi) \hat{\phi}(\xi) d\xi \\ &= \text{per la proposizione 9.1.8} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{\phi}}(x) \hat{\phi}(x) dx \end{aligned}$$

sostituendo in questo risultato la (9.2) avremo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx$$

□

9.2 La trasformata di Fourier come operatore unitario su $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$

Nel paragrafo 9.1 abbiamo visto che se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$, la sua trasformata di Fourier

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \phi(x) dx$$

é un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$. La corrispondenza che associa ad ogni funzione dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ la sua trasformata di Fourier nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ permette di introdurre un operatore che, verificheremo in questo paragrafo, é un operatore unitario.

Definizione 9.2.1 *L'operatore, ovviamente lineare,*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}, x) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi), \phi \rightarrow \mathcal{F}(\phi) := \hat{\phi}$$

si chiama operatore di Fourier-Plancherel su $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$. Analogamente si può introdurre l'operatore lineare

$$\check{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, x), \psi \rightarrow \check{\mathcal{F}}(\psi) := \check{\psi}$$

Teorema 9.2.2 *L'operatore di Fourier-Plancherel \mathcal{F} é unitario ed in piú il suo inverso é l'operatore $\check{\mathcal{F}}$.*

Dimostrazione. Dal teorema 9.1.9, paragrafo 9.1, abbiamo che per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ vale l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi$$

Ma essendo $\hat{\phi} = \mathcal{F}(\phi)$, e ricordando come é definita la norma in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ricaviamo da questa relazione che:

$$\|\phi\| = \|\mathcal{F}(\phi)\| \text{ per ogni } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$$

Pertanto \mathcal{F} é una isometria. La suriettività della \mathcal{F} si ottiene osservando che dalla (9.3), proposizione 9.1.8 del precedente paragrafo, si ha $\check{\psi} = \psi$. Pertanto, per ogni $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$ esiste $\check{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ tale che $\mathcal{F}(\check{\phi}) = \hat{\check{\phi}} = \psi$, ossia l'operatore \mathcal{F} é suriettivo.

Infine considerato che:

$$(\mathcal{F} \circ \check{\mathcal{F}})\psi = \mathcal{F}(\check{\psi}) = \hat{\check{\psi}} = \psi$$

$$(\check{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})\phi = \check{\mathcal{F}}(\hat{\phi}) = \check{\hat{\phi}} = \phi$$

abbiamo ottenuto le relazioni

$$\mathcal{F} \circ \check{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)} \text{ e } \check{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I_{\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)}$$

e perciò

$$\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$$

□

Nelle applicazioni tradizionali della Meccanica Quantistica viene usata una definizione di operatore di Fourier-Plancherel leggermente diversa da quella da noi presentata. Precisamente, posto $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ove $h = 6,625 \cdot 10^{-27}$ erg sec é la costante di Planck, si consideri l'operatore

$$\mathcal{U}_F : \mathcal{S}(\mathbb{R}, x) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, p)$$

definito da

$$(9.5) \quad (\mathcal{U}_F \phi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}xp} \phi(x) dx$$

e l'operatore

$$\mathcal{U}_F^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}, p) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$$

definito da

$$(9.6) \quad (\mathcal{U}_F^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}xp} \psi(p) dp$$

Gli operatori \mathcal{F} e \mathcal{F}^{-1} si possono considerare dei casi particolari di \mathcal{U}_F e \mathcal{U}_F^{-1} qualora in questi ultimi si ponga $\hbar = 1$. Inoltre, se si ripercorrono le dimostrazioni che hanno condotto al teorema 9.1.1, utilizzando gli operatori \mathcal{U}_F e \mathcal{U}_F^{-1} al posto di \mathcal{F} e \mathcal{F}^{-1} , si ottiene ancora che \mathcal{U}_F e \mathcal{U}_F^{-1} sono operatori unitari di cui l'uno é l'inverso dell'altro.

Osservazione 9.2.3 Facciamo osservare che vale la relazione formale, ma matematicamente non corretta

$$(9.7) \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x-x_0)} \phi(x) dx d\xi = \phi(x_0)$$

infatti, se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ allora

$$(\mathcal{U}_F\phi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\xi x} \phi(x) dx$$

da cui

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_F^{-1} \circ \mathcal{U}_F\phi)(x_0) &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\xi x_0} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi x} \phi(x) dx \\ &= \text{formalmente} = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi(x-x_0)} \phi(x) dx d\xi \end{aligned}$$

ma essendo $\mathcal{U}_F^{-1} \circ \mathcal{U}_F = I_{\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)}$ ne segue la (9.7). Si faccia attenzione che il passaggio formale ora considerato non é matematicamente corretto.

Ricordando il comportamento del funzionale delta di Dirac centrata in x_0 potremo porre

$$\langle \delta_{x_0} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x-x_0)} d\xi \right)} \phi(x) dx$$

da cui si ottiene la seguente trascrizione formale della funzione delta di Dirac centrata in x_0

$$\delta_{x_0}(x) = \text{formalmente} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}\xi(x-x_0)} d\xi$$

Questa scrittura formale a volte viene usata dai fisici teorici, ma essa é matematicamente sbagliata perché la funzione integranda non é integrabile, né secondo Riemann né secondo Lebesgue.

Gli elementi dello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sono, in particolare, funzioni infinitamente differenziabili e perciò assume un certo interesse considerare le trasformate di Fourier delle varie derivate

Proposizione 9.2.4 Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avremo che valgono le relazioni:

$$(i) (\mathcal{F}\phi')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(\phi)$$

$$(ii) (\mathcal{F}\phi^{(n)})(\xi) = (i\xi)^n\mathcal{F}(\phi)$$

Dimostrazione. Poiché

$$(\mathcal{F}\phi')(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi'(x) dx$$

integrando il secondo membro per parti e ricordando il comportamento di rapida decrescita all'infinito della ϕ avremo che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi')(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\xi x} \phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi) e^{-i\xi x} \phi(x) dx \right\} = \\ &= \frac{(i\xi)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx = (i\xi)(\mathcal{F}\phi)(\xi) \end{aligned}$$

Dimostriamo la (ii) per induzione su n . Abbiamo ora verificato che essa é vera per $n = 1$. Consideriamo ora

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\phi^{(n)})(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} d\phi^{(n-1)}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\xi x} \phi^{(n-1)}(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - (-i\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi^{(n-1)}(x) dx \right\} \\ &= \frac{(i\xi)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi^{(n-1)}(x) dx \end{aligned}$$

procedendo in tal modo otteniamo il seguente risultato

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\phi^{(n)})(\xi) &= \frac{(i\xi)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx \\ &= (i\xi)^n (\mathcal{F}\phi)(\xi) \end{aligned}$$

□

Definizione 9.2.5 Siano ϕ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si dice convoluzione $\phi * \psi$ la funzione definita da:

$$(\phi * \psi)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y)\psi(y) dy$$

Proposizione 9.2.6 La convoluzione soddisfa le seguenti proprietà:

$$(i) \phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$(ii) \mathcal{F}(\phi * \psi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\phi) \mathcal{F}(\psi)$$

$$(iii) \mathcal{F}(\phi \cdot \psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(\phi) * \mathcal{F}(\psi)$$

$$(iv) \phi * \psi = \psi * \phi$$

Dimostrazione. Dal fatto che \mathcal{F} é un operatore unitario segue che

$$\langle \mathcal{F}(f) \mid \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f \mid g \rangle, \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$$

Prendendo y fissato e ponendo $f(x) = e^{iyx}\bar{\phi}(x)$ e $g(x) = \psi(x)$ avremo che

$$\langle \mathcal{F}(e^{iyx}\bar{\phi}(x)) \mid \mathcal{F}(\psi(x)) \rangle = \langle e^{iyx}\bar{\phi}(x) \mid \psi(x) \rangle$$

Ma poiché

$$\langle e^{iyx}\bar{\phi}(x) \mid \psi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx}\phi(x)\psi(x)dx = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\phi\psi)$$

ed essendo

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}(e^{iyx}\bar{\phi}(x)) \mid \mathcal{F}(\psi(x)) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi-y)x}\bar{\phi}(x) \right\} (\mathcal{F}\psi)(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(y-\xi)x}\phi(x)dx \right\} (\mathcal{F}\psi)(\xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}\phi)(y-\xi)(\mathcal{F}\psi)(\xi)d\xi = \mathcal{F}(\phi) * \mathcal{F}(\psi) \end{aligned}$$

ne ricaviamo la (iii)

$$\mathcal{F}(\phi \cdot \psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(\phi) * \mathcal{F}(\psi)$$

Se ϕ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora per la (ii), teorema 9.1.1 paragrafo 9.1, pure $\mathcal{F}^{-1}(\phi)$ e $\mathcal{F}^{-1}(\psi)$ sono elementi di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e perciò applicando il risultato ora ottenuto a queste ultime funzioni avremo che:

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\phi) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\psi)) = \phi * \psi$$

Ma se $\mathcal{F}^{-1}(\phi)$ e $\mathcal{F}^{-1}(\psi)$ appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pure il loro prodotto é un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e quindi la trasformata di Fourier di $\mathcal{F}^{-1}(\phi) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\psi)$ é ancora un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ne concludiamo che il primo membro della precedente uguaglianza é un elemento di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ per cui non potrà che essere $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Infine

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi * \psi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y)\psi(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\phi(x-y)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y}\psi(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(x-y)}\phi(x-y)d(x-y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi y}\psi(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi h}\phi(h)dh \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi) \cdot \mathcal{F}(\phi) \end{aligned}$$

Rimane da verificare la (iv). Dalla (ii) otteniamo che

$$\mathcal{F}(\phi * \psi) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\psi) \mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}(\psi * \phi)$$

e perciò

$$\mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(\phi * \psi) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(\psi * \phi) \text{ da cui } \phi * \psi = \psi * \phi$$

□

Proposizione 9.2.7 *Lo spazio lineare complesso $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ munito del prodotto di convoluzione*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}), (\phi, \psi) \rightarrow \phi * \psi$$

è un'algebra associativa abeliana.

Dimostrazione. La (i) proposizione 9.2.6 assicura che la definizione di prodotto di convoluzione è ben posta. Inoltre, non è difficile verificare che sono soddisfatte le condizioni

$$(9.8) \quad (\phi_1 + \phi_2) * \psi = \phi_1 * \psi + \phi_2 * \psi$$

$$(9.9) \quad \phi * (\psi_1 + \psi_2) = \phi * \psi_1 + \phi * \psi_2$$

$$(9.10) \quad \alpha(\phi * \psi) = (\alpha\phi) * \psi = \phi * (\alpha\psi)$$

$$(9.11) \quad \phi * (\xi * \eta) = (\phi * \psi) * \eta$$

Proviamo a dimostrare la (9.8).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\phi_1 + \phi_2)(x-y)\psi(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x-y)\psi(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_2(x-y)\psi(y)dy$$

Anche le altre proprietà sono di facile dimostrazione. La abelianità del prodotto di convoluzione è stata dimostrata nella (iv) proposizione 9.2.6. □

L'algebra associativa abeliana costituita dallo spazio lineare $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ con il prodotto di convoluzione, può essere munita della norma della convergenza in media

$$\|\psi\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)| dx$$

Questa norma, oltre a soddisfare le condizioni tradizionali

$$(i) \quad \|\phi\|_1 = 0 \text{ sse } \phi = \underline{0}$$

$$(ii) \quad \|\alpha\phi\|_1 = |\alpha| \|\phi\|_1$$

$$(iii) \quad \|\phi + \psi\|_1 \leq \|\phi\|_1 + \|\psi\|_1$$

ove la (ii) e la (iii) coinvolgono rispettivamente il prodotto per scalari e la somma in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, soddisfa l'ulteriore condizione che coinvolge il prodotto di convoluzione

$$(iv) \quad \|\phi * \psi\|_1 \leq \|\phi\|_1 \|\psi\|_1$$

Infatti

$$\begin{aligned}\|\phi * \psi\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-y)\psi(y)dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x-y)| |\psi(y)| dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x-y)| d(x-y) = \|\psi\|_1 \|\phi\|_1\end{aligned}$$

Un'algebra munita di una norma soddisfacente la ulteriore proprietà (iv), relativa alla operazione di moltiplicazione, si chiama *algebra normata*. Se, rispetto alla metrica introdotta dalla norma risulta che l'algebra é uno spazio metrico completo allora si parlerà di *algebra di Banach* o *B-algebra*. Dai risultati visti precedentemente si ha che $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ non é un'algebra di Banach ma un'algebra normata abeliana.

Esempio 9.2.8 La funzione B e sua relazione con la funzione Γ

Per $p > 0$ e $q > 0$ si definisce funzione beta, indicata con $B(p, q)$ la funzione

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Verifichiamo che vale la relazione

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Infatti, introdotta la funzione appartenente a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1}e^{-t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_p(t) dt = \int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t} dt = \Gamma(p)$$

Introdotta la convoluzione $h = f_p * f_q$ e considerata la (ii) proposizione 9.2.6 si ha il seguente risultato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} (f_p * f_q)(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f_p(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f_q(x) dx \right)$$

Nel caso particolare di $\xi = 0$ la precedente uguaglianza diviene

$$(9.12) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \Gamma(p) \Gamma(q)$$

Calcoliamo in un'altra maniera il membro a sinistra. Poiché f_p e f_q si annullano sul semiasse reale negativo sarà

$$h(x) = \int_0^{\infty} f_p(t) f_q(x-t) dt = \begin{cases} e^{-x} \int_0^x t^{p-1} (x-t)^{q-1} dt & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Il cambiamento di variabile $t = ux$ fornisce per $x > 0$ la funzione

$$h(x) = e^{-x} x^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du = e^{-x} x^{p+q-1} B(p, q)$$

pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = B(p, q) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} x^{p+q-1} dx = B(p, q) \Gamma(p+q)$$

sostituito questo risultato nella (9.12) otteniamo la relazione cercata. ■

9.3 L'operatore di Fourier–Plancherel su L_2

Nella precedente sezione abbiamo introdotto l'operatore unitario di Fourier–Plancherel

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}, x) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$$

definito da

$$(9.13) \quad (\mathcal{F}\phi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx$$

Essendo $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ una varietà lineare densa nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}, x)$, per il principio di estensione, esisterà un unico operatore unitario, che indicheremo ancora con $\hat{\mathcal{F}} : L_2(\mathbb{R}, x) \mapsto L_2(\mathbb{R}, \xi)$, estensione dell'operatore di Fourier–Plancherel definito dalla (9.13), secondo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}, x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi) \\ \downarrow \cap & & \downarrow \cap \\ L_2(\mathbb{R}, x) & \xrightarrow{\hat{\mathcal{F}}} & L_2(\mathbb{R}, \xi) \end{array}$$

In questo paragrafo forniremo un'espressione concreta dell'operatore di Fourier–Plancherel in $L_2(\mathbb{R})$. In primo luogo dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 9.3.1 *Per ogni funzione $f \in L_2(\mathbb{R}, x)$ valgono le seguenti proprietà*

(i) *qualunque sia N , l'integrale*

$$\hat{f}_N(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx$$

è una funzione di $L_2(\mathbb{R}, \xi)$

(ii) *esiste una funzione $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}, \xi)$ tale che:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2 = 0$$

(iii) *questa funzione \hat{f} soddisfa l'uguaglianza di Parseval:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Pertanto, per ogni f in $L_2(\mathbb{R}, x)$ la funzione \hat{f} è ancora un elemento dello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}, \xi)$, chiamato trasformata di Fourier della f , e la (ii) può essere posta nella forma

$$(9.14) \quad \hat{f}(\xi) = 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx \right)$$

Dimostrazione. Sia f una qualsiasi funzione di $L_2(\mathbb{R}, x)$ nulla al di fuori dell'intervallo $(-a, a)$. Sotto queste condizioni, indicato che $A = \{x \in (-a, a) : |f(x)| < 1\}$, avremo che:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx &= \int_A |f(x)| dx + \int_{(-a,a)/A} |f(x)| dx \leq \\ &\leq 2a + \int_{(-a,a)/A} |f(x)|^2 dx < +\infty \end{aligned}$$

e perciò $f \in L_1(\mathbb{R}, x)$, da cui segue:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

ossia esiste l'integrale

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Sia ora $\{\phi_n\}$ una successione di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$, nulle al di fuori dell'intervallo $(-a, a)$ e convergenti a f secondo la norma di $L_2(\mathbb{R}, x)$:

$$(1) \quad \lim \|f - \phi_n\|_2 = 0$$

Dalla (1) segue che la successione $\{\hat{\phi}_n = \mathcal{F}\phi_n\}$ delle trasformate di Fourier delle $\phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ è di Cauchy in $L_2(\mathbb{R}, x)$ in quanto, per la uguaglianza di Parseval

$$\|\hat{\phi}_n - \hat{\phi}_m\|_2 = \|\phi_n - \phi_m\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{per } n, m \rightarrow \infty$$

Essendo lo spazio $L_2(\mathbb{R}, \xi)$ completo, esisterà $g \in L_2(\mathbb{R}, \xi)$ tale che:

$$(2) \quad \lim \|\hat{\phi}_n - g\|_2 = 0$$

Dalla (1), ricordando che su di un intervallo limitato $(-a, a)$ la convergenza in media quadratica implica la convergenza in media, avremo che pure

$$(3) \quad \lim \|f - \phi_n\|_1 = 0$$

e ciò implica che la successione $\{\hat{\phi}_n = \mathcal{F}\phi_n\}$ delle trasformate di Fourier delle ϕ_n è uniformemente convergente alla funzione \hat{f} . Infatti

$$\begin{aligned} |(\hat{f} - \hat{\phi}_n)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - \phi_n(x)) e^{-i\xi x} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - \phi_n(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - \phi_n\|_1 \end{aligned}$$

ottenendo quindi che

$$(4) \quad \lim \|\hat{\phi}_n - \hat{f}\|_\infty = 0$$

▷ Verifichiamo ora che $\hat{f} = g$ q.d. su \mathbb{R} . Sia infatti $N := \{x \in \mathbb{R} : \hat{f}(x) \neq g(x)\}$, e supponiamo per assurdo che la sua misura secondo Lebesgue

sia strettamente positiva, $m(N) > 0$. Se per ogni fissato $\delta > 0$ poniamo $N_\delta := \{x \in \mathbb{R} : |\hat{f}(x) - g(x)| > \delta\}$, la precedente condizione (4) impone che esista un $\delta_0 > 0$ tale che $m(N_{\delta_0}) > 0$. Per ogni $n > 0$ si ha

$$(5) \quad \left(\|\hat{\phi}_n - g\|_2\right)^2 \geq \int_{N_{\delta_0}} |\hat{\phi}_n(x) - g(x)|^2 dx$$

Ora essendo $\|\hat{\phi}_n - \hat{f}\|_\infty \rightarrow 0$, esisterà $n_0 > 0$ tale che risulti

$$|\hat{\phi}_n(x) - \hat{f}(x)| < \frac{\delta_0}{2}, \text{ per ogni } n > n_0$$

Per ogni $x \in N_{\delta_0}$ avremo che $|\hat{f}(x) - g(x)| > \delta_0$ mentre $|\hat{f}(x) - \hat{\phi}_n(x)| > \frac{\delta_0}{2}$ ovvero $-|\hat{f}(x) - \hat{\phi}_n(x)| > -\frac{\delta_0}{2}$ da cui, sommando membro a membro

$$\frac{\delta_0}{2} < |\hat{f}(x) - g(x)| - |\hat{f}(x) - \hat{\phi}_n(x)| \leq |\hat{\phi}_n(x) - g(x)|$$

e quindi la (5) assume la forma

$$\left(\frac{\delta_0}{2}\right)^2 m(N_{\delta_0}) < \int_{N_{\delta_0}} |\hat{\phi}_n(x) - g(x)|^2 dx \leq \left(\|\hat{\phi}_n - g\|_2\right)^2$$

contro la (2). Concludiamo dunque che $\hat{f} = g$ q.d. su \mathbb{R} . ◁

Essendo $\hat{f} = 2 - \lim \hat{\phi}_n$, avremo che:

$$(6) \quad \begin{aligned} (\|\hat{f}\|_2)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = \lim \left(\|\hat{\phi}_n\|_2\right)^2 \\ &= \lim(\|\phi_n\|_2)^2 = (\|f\|_2)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Ora, presa una $f \in L_2(\mathbb{R}, x)$, per ogni $N > 0$ definiamo

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq N \\ 0 & |x| > N \end{cases}$$

Allora

$$\hat{f}_N(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f_N(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx$$

è una funzione di $L_2(\mathbb{R}, \xi)$. Siccome $2 - \lim_{N \rightarrow \infty} f_N = f$, si avrà:

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \|f_M - f_N\|_2 = 0$$

quindi, utilizzando la (6), otteniamo

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \|\hat{f}_M - \hat{f}_N\|_2 = 0$$

Questo implica che esiste $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}, \xi)$ tale che:

$$\hat{f}(\xi) = 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}_N = 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Inoltre dalla (6) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= (\|\hat{f}(\xi)\|_2)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\|\hat{f}_N\|_2)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} (\|f_N\|_2)^2 = \\ &= (\|f\|_2)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

□

Quanto ora visto riguarda la trasformata di Fourier di funzioni di classe $L_2(\mathbb{R})$, definita tramite la (9.14). Passiamo ora a considerare funzioni di classe $L_1(\mathbb{R})$. In primo luogo osserviamo che se f è una funzione di $L_1(\mathbb{R})$ allora, dalla

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

segue che per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

ottenendo in tal modo una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{C} , chiamata *trasformata di Fourier della f in senso ordinario*.

Richiamiamo ora il seguente teorema:

Teorema 9.3.2 *Se $f \in L_1(\mathbb{R})$ e $\{f_n\}$ è una successione di funzioni in $L_1(\mathbb{R})$ soddisfacente la condizione di convergere in media alla funzione f , i.e.*

$$\lim \|f_n - f\|_1 = 0$$

allora la successione di funzioni

$$\hat{f}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f_n(x) dx$$

converge uniformemente alla funzione

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

ovvero

$$\lim \|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty = 0$$

Dimostrazione. Banale conseguenza della maggiorazione, valida per ogni $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_1 \end{aligned}$$

□

Corollario 9.3.3 *Se $f \in L_2(\mathbb{R}, x) \cap L_1(\mathbb{R}, x)$ allora la sua trasformata di Fourier nel senso di $L_2(\mathbb{R}, x)$ (9.14) coincide con la trasformata di Fourier in senso ordinario (9.13), ossia nel senso di $L_1(\mathbb{R}, x)$.*

$$(9.15) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx \right)$$

Dimostrazione. Considerate le funzioni

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq N \\ 0 & |x| > N \end{cases}$$

queste funzioni sono elementi di $L_2(\mathbb{R}, x) \cap L_1(\mathbb{R}, x)$. Dal teorema 9.3.1, utilizzando l'ipotesi che $f \in L_2(\mathbb{R}, x)$, segue che esiste la trasformata di Fourier \hat{f} della f secondo la (9.14), valendo inoltre che

$$(1) \quad \lim \| \hat{f}_N - \hat{f} \|_2 = 0$$

ove

$$\hat{f}_N(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Siccome la $f \in L_1(\mathbb{R}, x)$, e dal fatto che $\{f_N\}$ è una successione di funzioni in $L_1(\mathbb{R}, x)$ ovviamente convergente in media alla f , segue

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| f_N - f \|_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{-N} + \int_N^{+\infty} \right) f(x) dx \right\} = 0$$

Indicate con \tilde{f} e \tilde{f}_N le trasformate di Fourier della f e delle f_N , rispettivamente, nel senso ordinario (9.3), applicando il teorema 9.3.2 seguirà che

$$(2) \quad \lim \| \tilde{f}_N - \tilde{f} \|_{\infty} = 0$$

Se adesso si ripercorre, a partire dalla (1) e dalla (2), la tecnica dimostrativa utilizzata nel teorema 9.3.1 e racchiusa fra i simboli $\triangleright \dots \triangleleft$, si ottiene che $\tilde{f} = \hat{f}$.

□

Esempio 9.3.4 La trasformata di Fourier della funzione di $L_2(\mathbb{R}, x) \cap L_1(\mathbb{R}, x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad \text{con } a > 0$$

è la funzione

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi a} - e^{i\xi a}}{-i\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}}{(2i)\xi}$$

da cui

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}$$

■

Osservazione 9.3.5 Si osservi che la trasformata di Fourier ottenuta in questo esempio non è una funzione di $L_1(\mathbb{R})$ mentre la funzione di partenza appartiene a questo spazio. Comunque, dal fatto che $f \in L_2(\mathbb{R}, x)$, per la (ii) teorema 9.3.1, segue che la sua trasformata di Fourier appartiene ancora a $L_2(\mathbb{R}, x)$.

Esempio 9.3.6 Nel caso più generale della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{con } a < b$$

e procedendo come nell'esempio precedente, si ottiene che la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$\hat{f}(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{\xi}$$

■

Esempio 9.3.7 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}, \quad \text{con } a > 0$$

Questa funzione è sia un elemento di $L_1(\mathbb{R}, x)$ che di $L_2(\mathbb{R}, x)$. La sua trasformata di Fourier sarà quindi

$$\hat{f}(\xi) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{(x + ia)(x - ia)} dx$$

L'integrale al secondo membro può essere calcolato con il teorema dei residui (vedi funzioni analitiche), ottenendo

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|a}$$

■

Siamo ora in grado di poter dare l'espressione concreta dell'operatore unitario di Fourier-Plancherel sullo spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R})$, quale unica estensione dell'operatore unitario di Fourier-Plancherel su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definito dalla (9.13).

Teorema 9.3.8 *L'unica estensione unitaria su $L_2(\mathbb{R}, x)$ dell'operatore unitario di Fourier-Plancherel su $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}, x) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}, \xi)$$

definito da

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \phi(x) dx$$

è l'operatore unitario

$$\hat{\mathcal{F}} : L_2(\mathbb{R}, x) \mapsto L_2(\mathbb{R}, \xi)$$

definito da

$$(9.16) \quad (\hat{\mathcal{F}}f)(\xi) = 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx \right)$$

Dimostrazione. La corrispondenza $f \rightarrow \mathcal{H}\mathcal{F}f$ è ovviamente lineare. Essa è anche isometrica in virtù della (iii), teorema 9.3.1, che si può anche scrivere nella forma $\|\mathcal{H}\mathcal{F}f\| = \|f\|$.

Siccome $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x) \subseteq L_2(\mathbb{R}, x) \cap L_1(\mathbb{R}, x)$, per il corollario del teorema 9.3.2 si ha

$$\text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}, \mathcal{F}\phi = \mathcal{H}\mathcal{F}\phi$$

Pertanto, l'operatore $\mathcal{H}\mathcal{F}$ è una estensione continua a $L_2(\mathbb{R}, x)$ dell'operatore di Fourier–Plancherel \mathcal{F} su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ora, l'estensione continua di un operatore unitario su $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$ a tutto $L_2(\mathbb{R}, x)$ è unica ed è ancora un operatore unitario. Quindi $\mathcal{H}\mathcal{F}$ è suriettivo. Con questo il teorema è dimostrato. \square

Osservazione 9.3.9 Come al solito, e se ciò non comporterà ambiguità, nel seguito indicheremo più semplicemente con \mathcal{F} l'estensione unitaria all'intero spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}, x)$ dell'operatore di Fourier–Plancherel su $\mathcal{S}(\mathbb{R}, x)$.

A volte, con un certo abuso e mancanza di precisione, si usa indicare formalmente la (9.16) colla scrittura

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Rimanendo però inteso che questa è una scrittura formale definita rigorosamente dal secondo membro della (9.16).

Corollario 9.3.10 *La condizione $\mathcal{F}f = 0$ implica $f = 0$. Questo risultato può essere scritto per esteso nel seguente modo. Se*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx := 2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-i\xi x} f(x) dx \right) = 0$$

allora $f = 0$ q.d. su \mathbb{R} .

Dimostrazione. Banale conseguenza del fatto che l'operatore di Fourier–Plancherel è unitario e, quindi, invertibile. \square

9.4 Proprietà particolari della trasformata di Fourier di funzioni di classe $L_1(\mathbb{R})$

In questo paragrafo ci occuperemo in particolare della trasformata di Fourier di funzioni $f \in L_1(\mathbb{R})$ la cui definizione, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, è ben posta e espressa dalla

$$(9.17) \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

Ricordiamo che, come dimostra l'esempio 9.3.4 del paragrafo precedente, la trasformata di Fourier di una funzione di $L_1(\mathbb{R})$ in generale non è detto sia ancora un elemento di $L_1(\mathbb{R})$, escludendo in questo modo la possibilità di introdurre un operatore $L_1(\mathbb{R}) \mapsto L_1(\mathbb{R})$ tramite la legge $f \rightarrow \hat{f}$.

Teorema 9.4.1 *La trasformata di Fourier di una funzione $f \in L_1(\mathbb{R}, x)$ é una funzione*

- (i) *limitata;*
- (ii) *infinitesima per $|\xi| \rightarrow \infty$;*
- (iii) *uniformemente continua;*

Dimostrazione. (i) La limitatezza di

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

segue da

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

(ii) Per ogni funzione $\phi \in L_1(\mathbb{R}, x)$ del tipo

$$\phi(x) = c\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} c & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

si ha, vedi esempio 9.3.6, paragrafo precedente,

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{i\xi}$$

che é una funzione uniformemente continua ed infinitesima per $\xi \rightarrow \infty$. Ora, ogni $f \in L_1(\mathbb{R}, x)$ é 1 - lim di funzioni a scala. Quindi, per il teorema 9.3.2, paragrafo precedente, \hat{f} é limite uniforme della trasformata di Fourier di queste funzioni a scala. Siccome quest'ultime sono infinitesime, \hat{f} é pure infinitesimo, in quanto limite uniforme di funzioni infinitesime.

(iii) \hat{f} é uniformemente continuo in quanto limite uniforme di funzioni uniformemente continue. □

Modulo II

OPERATORI IN SPAZI DI HILBERT

Capitolo 10

Operatori che ammettono aggiunto Operatori simmetrici e autoaggiunti

10.1 Aggiunto di un operatore densamente definito

Gli operatori che verranno presi in considerazione nel seguito si intenderanno definiti su di una varietà lineare di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Gli operatori verranno quindi indicati indifferentemente con i simboli $T : \mathcal{D}_T \mapsto \mathcal{H}$ oppure con (\mathcal{D}_T, T) , a causa dell'importanza della esplicitazione della varietà lineare \mathcal{D}_T che ne costituisce il dominio di definizione.

La richiesta che il dominio di definizione dell'operatore T sia una varietà lineare di \mathcal{H} nasce dal fatto che, nel caso di un operatore lineare, l'essere \mathcal{D}_T una varietà lineare assicura che sono ben poste le condizioni:

$$(10.1) \quad T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 \text{ per ogni } x_1, x_2 \in \mathcal{D}_T$$

$$(10.2) \quad T(\alpha x) = \alpha Tx \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{C} \text{ e ogni } x \in \mathcal{D}_T.$$

Diremo che l'operatore T è *densamente definito* in \mathcal{H} sse il suo dominio di definizione è denso in \mathcal{H} mentre diremo che T *rende stabile* il dominio di definizione \mathcal{D}_T sse $T(\mathcal{D}_T) \subseteq \mathcal{D}_T$.

Esempio 10.1.1 Gli spazi funzionali $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sono delle varietà lineari dense nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ e valgono le seguenti inclusioni insiemistiche $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L_2(\mathbb{R})$. Gli operatori

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\mapsto L_2(\mathbb{R}), f \mapsto D(f) := f' \\ D : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\mapsto L_2(\mathbb{R}), f \mapsto D(f) := f' \end{aligned}$$

sono pertanto densamente definiti in $L_2(\mathbb{R})$; inoltre ciascuno di essi rende stabile il proprio dominio di definizione.

I due operatori sono da considerarsi diversi tra di loro, pur agendo formalmente nello stesso modo, in quanto hanno i corrispondenti domini di definizione che sono diversi. ■

Esempio 10.1.2 Gli spazi funzionali $\mathcal{P}([a, b])$, $\mathcal{C}^\infty([a, b])$, $\mathcal{C}^1([a, b])$ sono delle varietà lineari dense in $L_2([a, b])$ e valgono le inclusioni:

$$\mathcal{P}([a, b]) \subseteq \mathcal{C}^\infty([a, b]) \subseteq \mathcal{C}^1([a, b]) \subseteq L_2([a, b]).$$

Siano dati gli operatori:

$$\begin{aligned} D : \mathcal{P}([a, b]) &\mapsto L_2([a, b]), f \mapsto D(f) = f' \\ D : \mathcal{C}^\infty([a, b]) &\mapsto L_2([a, b]), f \mapsto D(f) = f' \\ D : \mathcal{C}^1([a, b]) &\mapsto L_2([a, b]), f \mapsto D(f) = f' \end{aligned}$$

I primi due sono densamente definiti in $L_2([a, b])$ e rendono stabile il dominio di definizione. Anche il terzo operatore è densamente definito in $L_2([a, b])$ ma non rende stabile il dominio di definizione: se $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, la sua derivata f' non è in generale una funzione di classe $\mathcal{C}^1([a, b])$. ■

Esempio 10.1.3 Possiamo prendere in esame lo spazio funzionale

$$\mathcal{C}_=^1([a, b]) = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b]) : f(a) = f(b)\}$$

che è una varietà lineare densa in $L_2([a, b])$, e definire su di esso l'operatore di derivazione

$$D : \mathcal{C}_=^1([a, b]) \mapsto L_2([a, b]), f \mapsto D(f) = f'.$$

Un tale operatore permette di scrivere l'equazione differenziale con condizioni al contorno

$$\begin{cases} y' = g \\ y(a) = y(b) \end{cases}$$

nella forma operatoriale più compatta $D(y) = g$ con $y \in \mathcal{C}_=^1([a, b])$.

Analogamente si può considerare lo spazio

$$\mathcal{C}_{x_0}^1([a, b]) = \{f \in \mathcal{C}^1([a, b]) : f(x_0) = 0\}$$

che è denso in $L_2([a, b])$ e l'operatore

$$D : \mathcal{C}_{x_0}^1([a, b]) \mapsto L_2([a, b]), f \mapsto D(f) = f'$$

L'equazione differenziale con condizioni iniziali

$$\begin{cases} y' = g \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

si traduce in questo caso nella trascrizione compatta $D(y) = g$ con $y \in \mathcal{C}_{x_0}^1([a, b])$.

Naturalmente, è anche possibile introdurre operatori adatti allo studio di equazioni differenziali di ordine superiore al primo. Per esempio nello spazio

$$\mathcal{C}_{x_0}^2([a, b]) = \{f \in \mathcal{C}^2([a, b]) : f(x_0) = f'(x_0) = 0\}$$

si può introdurre l'operatore

$$L = a(x)D^2 + b(x)D + c(x)I$$

ove $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sono funzioni continue in $[a, b]$ e $D^2 = D \circ D$; la scrittura

$$L(y) = g \quad \text{con} \quad y \in \mathcal{C}_{x_0}^2([a, b])$$

traduce l'equazione differenziale lineare del secondo ordine con condizioni iniziali

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

dove g è una funzione assegnata, a sua volta continua in $[a, b]$. ■

Definizione 10.1.4 Diremo che un operatore $T : \mathcal{D}_T \mapsto \mathcal{H}$ è limitato sse esiste una costante $\alpha \geq 0$ tale che $\|Tx\| \leq \alpha\|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T$. Nel caso contrario diremo che T è non limitato.

Proposizione 10.1.5 T è non limitato sse esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathcal{D}_T$ e $\|x_n\| = 1$, tale che $\lim \|Tx_n\| = +\infty$.

Dimostrazione. Infatti, se T è non limitato per ogni numero reale positivo $\alpha > 0$ esiste un elemento $\hat{x}_\alpha \in \mathcal{D}_T$ tale che $\|T\hat{x}_\alpha\| > \alpha\|\hat{x}_\alpha\|$, ovvero un elemento $x_\alpha = \frac{\hat{x}_\alpha}{\|\hat{x}_\alpha\|}$ tale che $\|Tx_\alpha\| > \alpha$ e $\|x_\alpha\| = 1$. La proposizione si dimostra prendendo come particolari α gli interi $n \in \mathbb{N}$. □

Esempio 10.1.6 Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert separabile, $\{u_n\}$ una base ortonormale di \mathcal{H} e

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum n^2 |\langle u_n | x \rangle| < +\infty \right\};$$

si verifica immediatamente che \mathcal{D} è denso in \mathcal{H} in quanto per ogni $y \in \mathcal{H}$, scritto nello sviluppo in serie di Fourier nella forma $y = \sum \langle u_n | y \rangle u_n$, esiste la successione $x_k = \sum_{n=1}^k \langle u_n | x \rangle u_n \in \mathcal{D}$ tale che $\lim x_k = y$. Sotto queste condizioni, l'operatore

$$T : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{H}, x \rightarrow Tx := \sum n \langle u_n | x \rangle u_n$$

è lineare ma non limitato in quanto $\|Tu_k\| = k$ e $\|u_k\| = 1$. ■

Fatte queste premesse possiamo ora passare a introdurre la nozione di *aggiunto* di un operatore $T : \mathcal{D}_T \mapsto \mathcal{H}$. In primo luogo osserviamo che il sottoinsieme di \mathcal{H} definito da

$$(10.3) \quad \mathcal{D}_{T^*} := \{y \in \mathcal{H} : \exists y^* \in \mathcal{H} \text{ t.c. } \forall x \in \mathcal{D}_T, \langle Tx | y \rangle = \langle x | y^* \rangle\}$$

è una varietà lineare di \mathcal{H} . Si tratta ora di stabilire una condizione necessaria e sufficiente che assicuri, qualunque sia $y \in \mathcal{H}$, l'unicità dell'elemento y^* che interviene nella definizione ora data di \mathcal{D}_{T^*} . A questo proposito, vale il seguente

Teorema 10.1.7 Ad ogni $y \in \mathcal{D}_{T^*}$ corrisponde uno ed uno solo $y^* \in \mathcal{H}$ soddisfacente la condizione

$$(10.4) \quad \forall x \in \mathcal{D}_T, \langle Tx | y \rangle = \langle x | y^* \rangle$$

se e solo se T è densamente definito in \mathcal{H} .

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H}$. Se per $y \in \mathcal{D}_{T^*}$ esistessero y_1^* e $y_2^* \in \mathcal{H}$ tali che $\langle Tx | y \rangle = \langle x | y_1^* \rangle = \langle x | y_2^* \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T$, allora $\langle x | y_1^* - y_2^* \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T$. Essendo \mathcal{D}_T denso in \mathcal{H} , esiste una successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ tale

che $\lim x_n = y_1^* - y_2^*$. Perciò, utilizzando la continuità a sinistra del prodotto interno avremo che

$$\lim \langle x_n | y_1^* - y_2^* \rangle = \langle \lim x_n | y_1^* - y_2^* \rangle = \|y_1^* - y_2^*\|^2$$

mentre dal fatto che $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ segue che $\langle x_n | y_1^* - y_2^* \rangle = 0$ e perciò $\lim \langle x_n | y_1^* - y_2^* \rangle = 0$; da questi ultimi risultati segue che $y_1^* = y_2^*$.

Viceversa, supponiamo che $\overline{\mathcal{D}_T} \neq \mathcal{H}$; $\overline{\mathcal{D}_T}$ è un sottospazio proprio di \mathcal{H} . Allora, vedi (iv) teorema 8.4.3 a pag. 144 esisterà $y_0 \in (\overline{\mathcal{D}_T})^\perp$ con $y_0 \neq \underline{0}$. In particolare, questo vettore y_0 sarà tale che $\langle x | y_0 \rangle = 0$, per ogni $x \in \mathcal{D}_T$, e perciò $\langle Tx | \underline{0} \rangle = \langle x | y_0 \rangle$, per ogni $x \in \mathcal{D}_T$. Pertanto all'elemento $\underline{0} \in \mathcal{D}_{T^*}$ corrispondono i due elementi $\underline{0}, y_0 \in \mathcal{H}$ tali da soddisfare la relazione richiesta. \square

Osservazione 10.1.8 Se T è un operatore densamente definito in \mathcal{H} , considerata la varietà lineare \mathcal{D}_{T^*} di \mathcal{H} definita dalla (10.3) e utilizzando i risultati del teorema precedente che assicurano l'esistenza di un unico y^* di \mathcal{H} tale che

$$\langle Tx | y \rangle = \langle x | y^* \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}_T$$

la applicazione

$$T^* : \mathcal{D}_{T^*} \mapsto \mathcal{H}, y \rightarrow T^*(y) := y^*$$

è ben posta e definisce un operatore lineare da \mathcal{D}_{T^*} in \mathcal{H} , ove la linearità di T^* è conseguenza della linearità a destra del prodotto interno.

Definizione 10.1.9 Dato un operatore T densamente definito in \mathcal{H} , l'operatore lineare

$$T^* : \mathcal{D}_{T^*} \mapsto \mathcal{H}, y \rightarrow T^*(y) := y^*$$

definito nella osservazione precedente si chiama operatore aggiunto dell'operatore T .

Tra un operatore T , densamente definito in uno spazio di Hilbert, e il suo aggiunto T^* vale evidentemente la relazione

$$(10.5) \quad \langle Tx | y \rangle = \langle x | T^*y \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}_T \quad \text{e ogni } y \in \mathcal{D}_{T^*}.$$

Gli operatori che interessano la Meccanica Quantistica sono lineari, in generale non limitati e devono per lo meno ammettere l'operatore aggiunto. Quindi, per quanto visto nelle precedenti considerazioni, devono essere densamente definiti in \mathcal{H} .

Osservazione 10.1.10 Nella dimostrazione del teorema 10.1.7 e, quindi, nella conseguente definizione 10.1.9, non viene fatto alcun uso della linearità dell'operatore T . Però, pur non essendo T necessariamente lineare, il suo aggiunto è lineare. Inoltre, nulla assicura che il dominio di definizione dell'aggiunto in \mathcal{H} abbia una qualche relazione con il dominio di definizione di T . L'unica cosa che si può affermare è che \mathcal{D}_{T^*} è una varietà lineare di \mathcal{H} che, al limite, può contenere soltanto il vettore nullo.

Si tenga presente che fra T e T^* vi è il legame espresso dalla relazione (10.5) da cui si deduce che vale anche la relazione

$$(10.6) \quad \langle x | Ty \rangle = \langle T^*x | y \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}_{T^*} \quad \text{e ogni } y \in \mathcal{D}_T$$

Infatti, per ogni $x \in \mathcal{D}_{T^*}$ e $y \in \mathcal{D}_T$ avremo che

$$\langle x|Ty \rangle = \overline{\langle Ty|x \rangle} = \overline{\langle y|T^*x \rangle} = \langle T^*x|y \rangle.$$

Esempio 10.1.11 *Gli operatori di shift a destra e di shift a sinistra.*

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert complesso, separabile e infinito dimensionale. Indichiamo con $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sonc in \mathcal{H} . Introduciamo i due operatori definiti sull'intero spazio \mathcal{H} e espressi dalle leggi:

$$S_d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n|x \rangle u_{n+1}$$

$$S_s(y) = \sum_{n=2}^{\infty} \langle u_n|y \rangle u_{n-1}.$$

Questi operatori sono ben posti in virtù del teorema di Fisher-Riesz e si chiamano rispettivamente operatore di *shift a destra* e di *shift a sinistra*.

Gli operatori S_d e S_s sono uno l'aggiunto dell'altro, come ora verificheremo. In primo luogo osserviamo che per ogni $y \in \mathcal{H}$ esiste $y^* = S_s(y) \in \mathcal{H}$ tale che, per qualunque $x \in \mathcal{H}$, si abbia

$$\begin{aligned} \langle Sx|y \rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\langle u_j|x \rangle} \langle u_{j+1}|y \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} \langle u_n|y \rangle \langle x|u_{n-1} \rangle = \\ &= \left\langle x \left| \sum_{n=2}^{\infty} \langle u_n|y \rangle u_{n-1} \right. \right\rangle = \langle x|S_s y \rangle \end{aligned}$$

Pertanto, in virtù della (10.3), $\mathcal{D}_{S_d^*} = \mathcal{H}$ mentre dalla definizione di operatore aggiunto segue che $(S_d)^*(y) = y^* = S_s(y)$, per ogni $y \in \mathcal{H}$, ovvero l'aggiunto di S_d è S_s . In maniera analoga si dimostra che l'aggiunto di S_s è S_d . Tradizionalmente l'operatore S_d viene indicato semplicemente con S mentre l'operatore S_s viene indicato con S^* ; d'ora in avanti ci atterremo a questa notazione.

Ricordiamo che $\|Sx\| = \|x\|$, ovvero S è isometrico; però esso non è suriettivo in quanto, banalmente, non esiste alcun vettore $x \in \mathcal{H}$ tale che $S(x) = u_1$.

Per ciò che riguarda l'operatore S^* avremo che $\|S^*x\| \leq \|x\|$, per cui S^* è limitato ma non è isometrico. Facciamo osservare che valgono le relazioni

$$S^* \circ S = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad S \circ S^* \neq \mathbb{1}$$

Verifichiamo la prima delle due, mentre lasciamo per esercizio la dimostrazione della seconda.

$$\begin{aligned} (S^* \circ S)(x) &= S^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n|x \rangle u_{n+1} \right) = \sum_{j=2}^{\infty} \left\langle u_j \left| \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n|x \rangle u_{n+1} \right. \right\rangle u_{j-1} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_j|u_{n+1} \rangle \langle u_n|x \rangle u_{j-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n|x \rangle u_n = x \end{aligned}$$

■

Definizione 10.1.12 *Dati due operatori $T_1 : \mathcal{D}_1 \mapsto \mathcal{H}$ e $T_2 : \mathcal{D}_2 \mapsto \mathcal{H}$ nello stesso spazio di Hilbert \mathcal{H} , diremo che essi sono uguali, e scriveremo $T_1 = T_2$, sse $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ e $T_1(x) = T_2(x)$ per ogni $x \in \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.*

Diremo che T_2 è una estensione di T_1 , scritto $T_1 \leq T_2$, sse $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ e $T_1(x) = T_2(x)$ per ogni $x \in \mathcal{D}_1$; in tal caso si usa anche dire che T_1 è una restrizione di T_2 . Diremo che T_2 è una estensione stretta di T_1 , o che T_1 è una restrizione stretta di T_2 , scritto $T_1 < T_2$, sse $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ e $T_1(x) = T_2(x)$, per ogni $x \in \mathcal{D}_1$.

Esempio 10.1.13 Negli esempi visti prima si ha

$$(\mathcal{P}([a, b]), D) < (\mathcal{C}^\infty([a, b]), D) < (\mathcal{C}^1([a, b]), D)$$

analogamente

$$(\mathcal{D}(R^n), P_i) < (\mathcal{S}(R^n), P_i) \quad \text{e} \quad (\mathcal{D}(R^n), Q_i) < (\mathcal{D}(R^n), Q_i).$$

■

Definizione 10.1.14 Diremo che un operatore lineare A è simmetrico sse $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ e $A \leq A^*$, mentre diremo che esso è autoaggiunto sse $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{H}$ e $A = A^*$.

Ovviamente, ogni operatore lineare autoaggiunto è anche simmetrico. Inoltre, dalla definizione di operatore aggiunto segue facilmente che:

(i) Un operatore lineare A densamente definito in \mathcal{H} è simmetrico sse

$$\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{A^*} \quad \text{e} \quad \langle Ax|y \rangle = \langle x|Ay \rangle \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathcal{D}_A.$$

(ii) Un operatore lineare A densamente definito in \mathcal{H} è autoaggiunto sse

$$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A^*} \quad \text{e} \quad \langle Ax|y \rangle = \langle x|Ay \rangle \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathcal{D}_A.$$

Esempio 10.1.15 Operatori di moltiplicazione per funzioni in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Considerato lo spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R}^n)$ sia $k_\nu : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ una funzione di classe C^∞ a valori complessi. Possiamo introdurre l'operatore

$$Q_\nu : \mathcal{D}_\nu \mapsto L_2(\mathbb{R}^n)$$

definito da

$$(10.7) \quad (Q_\nu f)(\underline{x}) := k_\nu(\underline{x})f(\underline{x})$$

sul seguente dominio di definizione

$$(10.8) \quad \mathcal{D}_\nu = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) : Q_\nu f \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$$

Ovviamente \mathcal{D}_ν è una varietà lineare di $L_2(\mathbb{R}^n)$, densa in questo spazio di Hilbert, perché contiene la varietà lineare $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ costituita dalle funzioni prova a supporto compatto.

L'aggiunto di questo operatore è l'operatore, il cui dominio di definizione è ancora \mathcal{D}_ν

$$(Q_\nu)^* : \mathcal{D}_\nu \mapsto L_2(\mathbb{R}^n)$$

definito da

$$(10.9) \quad [(Q_\nu)^* f](\underline{x}) := \overline{k_\nu(\underline{x})}f(\underline{x})$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle Q_\nu f|g \rangle &= \int_{R^n} \overline{k_\nu(\underline{x})f(\underline{x})}g(\underline{x})d\underline{x} = \int_{R^n} \overline{f(\underline{x})} \left[\overline{k_\nu(\underline{x})}g(\underline{x}) \right] d\underline{x} \\ &= \left\langle f \mid (Q_\nu)^* g \right\rangle \end{aligned}$$

Da questo risultato segue che se k_ν è una funzione a valori reali allora Q_ν è un operatore autoaggiunto.

Se k_ν é una funzione a valori complessi, misurabile e limitata (non necessariamente di classe C^∞), allora l'operatore

$$Q_\nu : L_2(\mathbb{R}^n) \mapsto L_2(\mathbb{R}^n)$$

definito da

$$(Q_\nu f)(\underline{x}) := k_\nu(\underline{x})f(\underline{x})$$

ha dominio di definizione coincidente con l'intero spazio $L_2(\mathbb{R}^n)$ ed é limitato. Infatti

$$\|Q_\nu f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |k_\nu(\underline{x})|^2 |f(\underline{x})|^2 d\underline{x} \leq \|k_\nu\|_\infty^2 \|f\|^2$$

e quindi

$$\|Q_\nu\| \leq \|k_\nu\|_\infty$$

L'aggiunto di questo operatore é l'operatore

$$(Q_\nu)^* : L_2(\mathbb{R}^n) \mapsto L_2(\mathbb{R}^n)$$

definito da

$$[(Q_\nu)^* f](\underline{x}) = \overline{k_\nu(\underline{x})}f(\underline{x}).$$

■

Esempio 10.1.16 *Operatori di moltiplicazione classici in $L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Tra le funzioni di classe C^∞ su \mathbb{R}^n e a valori reali vi sono gli n proiettori canonici

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

In questi n casi gli operatori di moltiplicazione introdotti nell'esempio 10.1.15 si traducono negli n operatori di moltiplicazione *classici*

$$Q_i : \mathcal{D}_i \mapsto L_2(\mathbb{R}^n) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

definiti da

$$(Q_i f)(\underline{x}) := x_i f(\underline{x})$$

sul dominio di definizione

$$\mathcal{D}_i = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) : x_i f(\underline{x}) \in L_2(\mathbb{R}^n)\}$$

Per quanto visto nel caso generale questi operatori sono autoaggiunti. ■

Ritornando ora a considerare un generico operatore T , densamente definito in \mathcal{H} , abbiamo precedentemente visto che esso ammette l'operatore aggiunto T^* ; in generale non é possibile stabilire alcun legame fra i domini di definizione \mathcal{D}_T e \mathcal{D}_{T^*} e non é possibile dire nulla sulla limitatezza di T^* . A questo proposito premettiamo il seguente

Teorema 10.1.17 *Se $\{f_n\}$ é una successione di funzionali lineari e limitati, definiti su \mathcal{H} e a valori in \mathbb{C} , che soddisfa la condizione di limitatezza:*

per ogni $x \in \mathcal{H}$ esiste una costante $k_x \in \mathbb{C}$ tale che $|f_n(x)| \leq k_x$ per ogni $n = 1, 2, \dots$

allora

esiste una costante $k \in \mathbb{C}$ tale che $|f_n(x)| \leq k\|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{H}$ e ogni $n = 1, 2, \dots$

Dimostrazione. Verifichiamo in primo luogo che, sotto le ipotesi del teorema,

- esiste almeno una sfera aperta $S(x_0, r)$ e una costante k tale che $|f_n(x)| \leq k$ per ogni $x \in S(x_0, r)$ e ogni n .

Infatti, supposto che questa proposizione non sia vera, scelto $k = 1$ esisteranno $x_1 \in \mathcal{H}$ e n_1 tali che $|f_{n_1}(x_1)| \geq 1$. Dalla continuità di f_{n_1} segue che $|f_{n_1}(x)| \geq 1$ su una opportuna sfera $S^{(1)} \subset \mathcal{H}$ con centro in x_1 .

Se la negazione della proposizione di partenza viene applicata alla sfera $S^{(1)}$ relativamente alla scelta di $k = 2$ avremo che esisteranno $x_2 \in S^{(1)}$ e n_2 tali che $|f_{n_2}(x_2)| \geq 2$. Anche in questo caso la continuità di f_{n_2} assicura l'esistenza di una sfera $S^{(2)} \subseteq S^{(1)}$ tale che $|f_{n_2}(x)| \geq 2$ per ogni $x \in S^{(2)}$.

Procedendo in questo modo, riusciamo a costruire una successione di sfere

$$S^{(1)} \supseteq S^{(2)} \supseteq \dots \supseteq S^{(k)} \supseteq \dots$$

tali che:

- (\star) per ogni k esiste n_k per cui $|f_{n_k}(x)| > k$ per ogni $x \in S^{(k)}$.

Se $S^{(k)} = S_{c_k}(\rho_k)$ è la sfera di centro c_k e raggio ρ_k , possiamo pensare questo ultimo sempre $\rho_k < \frac{1}{k}$: infatti se $\rho_k > \frac{1}{k}$ e vale la (\star) possiamo restringere il raggio ρ_k ad un valore $\rho'_k < \frac{1}{k}$ in cui (\star) continua a valere.

Fissato un k , $\forall l \geq k$ abbiamo che il centro $c_k \in S^{(k)}$ e $c_l \in S^{(l)} \supseteq S^{(k)}$ sono tali che $\|c_l - c_k\| < \frac{1}{k}$. Ciò significa che la successione dei centri delle sfere $\{c_l\}_{l=1}^{\infty}$ è di Cauchy in uno spazio completo e quindi esiste il limite $c_{\infty} = \lim_{l \rightarrow \infty} c_l$. Concludiamo che $|f_{n_k}(c_{\infty})| = |f_{n_k}(\lim c_l)| = \lim |f_{n_k}(c_l)| > k$ contro l'ipotesi che la sequenza $\{f_{n_k}(c_{\infty})\}$ sia limitata.

In questo modo abbiamo dimostrato che esiste una sfera $S(x_0, r)$ e una costante k tali che $|f_n(x)| \leq k$ per ogni $x \in S(x_0, r)$ e ogni n .

Preso y di norma unitaria, $\|y\| = 1$, e costruito $(ry - x_0)$, avremo che $\|(ry - x_0) - x_0\| = \|ry\| < r$ ossia $(ry - x_0) \in S(x_0, r)$ da cui

$$|f_n(ry - x_0)| \leq k \quad \text{per ogni } n.$$

Tenendo presente la limitatezza delle f_n ricaviamo che

$$\|f_n(y)\| = \left\| \frac{1}{r} f_n(ry - x_0 + x_0) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|f_n(ry - x_0)\| + \|f_n(x_0)\|) \leq \frac{2k}{r}.$$

Pertanto possiamo concludere che esiste la costante $k_0 = 2k/r$ tale che

$$\|f_n(y)\| \leq k_0 \quad \text{per ogni } y \quad \text{con } \|y\| = 1 \quad \text{e ogni } n.$$

□

Osservazione 10.1.18 Questo teorema può essere enunciato sotto forma di *teorema di Banach-Steinhaus*: Se $\{f_n\}$ è una successione di funzionali lineari e limitati, definiti su \mathcal{H} e a valori in \mathbb{C} , che soddisfa la condizione di limitatezza:

$$\text{per ogni } x \in \mathcal{H} \text{ esiste una costante } k_x \in \mathcal{C} \text{ tale che } |f_n(x)| \leq k_x \\ \text{per ogni } n = 1, 2, \dots$$

allora

esiste una costante $k \in \mathbb{C}$ tale che la successione $\|f_n\| = \frac{|f_n(x)|}{\|x\|} \leq k$ per ogni $x \in \mathcal{H}$ e ogni $n = 1, 2, \dots$, ovvero è limitata.

Facciamo ora alcune osservazioni nel caso di operatori lineari definiti sull'intero spazio di Hilbert \mathcal{H} e diamo il seguente risultato preliminare.

Proposizione 10.1.19 *Sia T un operatore lineare definito sullo spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H} : \mathcal{D}_T = \mathcal{H}$. Allora $T = \mathbb{O}$ se e soltanto se $\langle Tx|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{H}$.*

Dimostrazione. Da fare □

Teorema 10.1.20 *Sia T un operatore lineare tale che $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$, allora il suo aggiunto T^* è un operatore lineare limitato definito sull'intero \mathcal{H} .*

Dimostrazione. Assumiamo che T^* non sia limitato. Dalla non limitatezza segue che esiste una successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$ con $\|x_n\| = 1$, tale che $\lim \|T^*x_n\| = \infty$. Per ogni fissato n , i funzionali

$$f_n : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}, x \mapsto f_n(x) := \overline{\langle Tx|x_n \rangle}$$

sono lineari e limitati in quanto

$$|f_n(x)| = |\langle Tx|x_n \rangle| = |\langle x|T^*x_n \rangle| \leq \|x\| \|T^*x_n\|$$

D'altra parte, siccome $\|x_n\| = 1$ la relazione

$$|f_n(x)| = |\langle Tx|x_n \rangle| \leq \|Tx\| \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

implica che per ogni x esiste la costante $k_x = \|Tx\|$ tale che $|f_n(x)| \leq k_x$ per $n = 1, 2, \dots$ e quindi, dal teorema 10.1.17, segue che esiste una costante k tale che

$$|f_n(x)| \leq k\|x\| \quad \text{per ogni } x \text{ e } n = 1, 2, \dots$$

Ma ponendo $x = T^*x_n$, la relazione precedente conduce al risultato che $\|T^*x_n\| \leq k$ per $n = 1, 2, \dots$, contro l'assunzione che $\lim \|T^*x_n\| = \infty$. □

Risulta spontaneo, visto le complicazioni introdotte dal dover considerare operatori con dominio di definizione non coincidente con \mathcal{H} , cercare di studiare gli operatori lineari, non limitati e autoaggiunti definiti sull'intero \mathcal{H} , eliminando così molte difficoltà della teoria. Ciò però non è possibile poiché, come dimostrerà il seguente teorema, non esistono operatori di questo tipo.

Corollario 10.1.21 *Sia A un operatore definito sull'intero \mathcal{H} , lineare e autoaggiunto, allora A è necessariamente limitato.*

Dimostrazione. Se A è definito sull'intero \mathcal{H} e lineare allora, dal teorema 10.1.20, si ha che A^* è lineare e limitato, ma dall'ipotesi che A è autoaggiunto ($A = A^*$), segue che pure A è limitato. □

10.2 Algebra degli operatori densamente definiti in \mathcal{H}

L'uso degli operatori definiti su sottoinsiemi di \mathcal{H} , anche se non densamente definiti in \mathcal{H} , costringe a porre particolare attenzione ai domini di definizione soprattutto per ciò che riguarda le operazioni algebriche fondamentali che si possono fare su tali operatori.

Per ovviare a eventuali confusioni, definiamo con precisione tali operazioni algebriche, qualora si considerino due operatori $T_1 : \mathcal{D}_1 \mapsto \mathcal{H}$ e $T_2 : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{H}$. Precisamente, avremo che rispetto ad essi si possono considerare le seguenti operazioni opportunamente definite:

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2) : (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2) &\mapsto \mathcal{H}, \quad x \rightarrow (T_1 + T_2)(x) := T_1(x) + T_2(x) \\ (T_1 \circ T_2) : \{x \in \mathcal{D}_{T_2} : T_2x \in \mathcal{D}_{T_1}\} &\mapsto \mathcal{H}, \quad x \rightarrow (T_1 \circ T_2)(x) := T_1(T_2(x)) \\ (\alpha T_1) : \mathcal{D}_{T_1} &\mapsto \mathcal{H}, \quad x \rightarrow (\alpha T_1)(x) := \alpha T_1(x). \end{aligned}$$

Potremo quindi affermare che fra i domini di definizione vi sono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{T_1+T_2} &= \mathcal{D}_{T_1} \cap \mathcal{D}_{T_2} \\ \mathcal{D}_{\alpha T} &= \mathcal{D}_T \\ \mathcal{D}_{T_1 \circ T_2} &= \{x \in \mathcal{D}_{T_2} : T_2(x) \in \mathcal{D}_{T_1}\}. \end{aligned}$$

Risulta facile verificare che questi tre insiemi sono delle varietà lineari di \mathcal{H} . Il problema diventa più complicato se gli operatori sono densamente definiti in \mathcal{H} e si vuole che anche $(T_1 + T_2)$ e $(T_1 \circ T_2)$ siano densamente definiti in \mathcal{H} , perché in questo caso nulla assicura che $\mathcal{D}_{T_1+T_2}$ e $\mathcal{D}_{T_1 \circ T_2}$ siano densi in \mathcal{H} . Esistono addirittura degli esempi in cui \mathcal{D}_{T_1} e \mathcal{D}_{T_2} sono densi in \mathcal{H} mentre $\mathcal{D}_{T_1} \cap \mathcal{D}_{T_2} = \{0\}$.

Come caso particolare facciamo osservare che se T ha dominio di definizione propriamente denso in \mathcal{H} e S ha dominio di definizione coincidente con \mathcal{H} allora $\mathcal{D}_{T+S} = \mathcal{D}_T$ mentre $\mathcal{D}_{S \circ T} = \mathcal{D}_T$.

Teorema 10.2.1 *Siano T, S due operatori in \mathcal{H} allora*

- (i) *se $\mathcal{D}_T \cap \mathcal{D}_S$ è denso in \mathcal{H} si ha $T^* + S^* \leq (T + S)^*$*
- (ii) *se $\alpha \in \mathbb{C}$ allora $\bar{\alpha}T^* \leq (\alpha T)^*$*
- (iii) *se $\mathcal{D}_{T \circ S}$ è denso in \mathcal{H} allora $S^* \circ T^* \leq (T \circ S)^*$*
- (iv) *se \mathcal{D}_{T^*} è denso in \mathcal{H} allora $T \leq T^{**}$*
- (v) *$T \leq S$ implica $S^* \leq T^*$.*

Dimostrazione. (i) Chiaramente $\langle (T + S)x | y \rangle = \langle x | (T^* + S^*)y \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{D}_{T+S}$ e ogni $y \in \mathcal{D}_{T^*} \cap \mathcal{D}_{S^*}$. Pertanto $\mathcal{D}_{T^*} \cap \mathcal{D}_{S^*} \subseteq \mathcal{D}_{(T+S)^*}$ e la (i) è dimostrata. La (ii) si dimostra in maniera analoga.

(iii) Consideriamo $\langle (T \circ S)x | y \rangle = \langle x | (S^* \circ T^*)y \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{D}_{T \circ S}$ e ogni $y \in \mathcal{D}_{S^* \circ T^*}$. Quindi $\mathcal{D}_{S^* \circ T^*} \subseteq \mathcal{D}_{(T \circ S)^*}$ e la (iii) è dimostrata.

- (iv) Essendo $\langle Tx|y \rangle = \langle x|T^*y \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T$ e ogni $y \in \mathcal{D}_{T^*}$ avremo che $\langle T^*y|x \rangle = \langle y|Tx \rangle$ per ogni $y \in \mathcal{D}_{T^*}$ e ogni $x \in \mathcal{D}_T$. Da ciò segue che $\mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_{T^{**}}$ e $Tx = T^{**}x$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T$.
- (v) Sia $T \leq S$ allora da $\langle Sx|y \rangle = \langle x|S^*y \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T$ e ogni $y \in \mathcal{D}_{S^*}$, segue che $\langle Tx|y \rangle = \langle x|S^*y \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{D}_T \subseteq \mathcal{D}_S$ e ogni $y \in \mathcal{D}_{S^*}$. Pertanto $\mathcal{D}_{S^*} \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$ e $T^*y = S^*y$ per ogni $y \in \mathcal{D}_{S^*}$. \square

Corollario 10.2.2 *Sia A un operatore simmetrico, allora l'operatore A^* ammette aggiunto $(A^*)^*$, indicato più semplicemente con A^{**} , e varrà la relazione*

$$A \leq A^{**} \leq A^*.$$

Dimostrazione. Se A è simmetrico varrà la relazione $A \leq A^*$ e se applichiamo la (v) teorema 10.2.1 avremo che $A^{**} \leq A^*$, infine dalla (iv) segue l'asserto. \square

Da quest'ultimo risultato segue che potremo classificare gli operatori simmetrici secondo i seguenti quattro casi:

- (10.10a) $A = A^{**} < A^*$ operatore simmetrico massimale
 (10.10b) $A < A^{**} = A^*$ operatore essenzialmente autoaggiunto
 (10.10c) $A < A^{**} < A^*$
 (10.10d) $A = A^{**} = A^*$ operatore autoaggiunto

10.3 Operatori lineari limitati

Abbiamo visto l'importanza degli operatori densamente definiti in \mathcal{H} per l'esistenza dell'operatore aggiunto. Se T è un operatore lineare densamente definito in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e se esso è anche limitato allora, per il principio dell'estensione 8.2.1 possiamo assumere senza perdere in generalità che il suo dominio di definizione sia l'intero \mathcal{H} .

Vediamo ora alcune proprietà specifiche per questa classe di operatori. Sia allora T un operatore lineare limitato definito sull'intero spazio di Hilbert \mathcal{H} , ricordiamo che la norma di tale operatore viene definita come

$$(10.11) \quad \|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Ovviamente tale norma può anche essere calcolata secondo la $\|T\| := \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

Supponiamo ora di aver fissato un vettore $y \in \mathcal{H}$ generico e consideriamo il funzionale $\mathcal{L}_y^T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, x \rightarrow \langle y|Tx \rangle$. Questo funzionale è ovviamente lineare, in quanto $\mathcal{L}_y^T(\alpha x + \beta z) = \langle y|T(\alpha x + \beta z) \rangle = \alpha \langle y|Tx \rangle + \beta \langle y|Tz \rangle = \alpha \mathcal{L}_y^T(Tx) + \beta \mathcal{L}_y^T(Tz)$. Inoltre \mathcal{L}_y^T è limitato, ossia continuo, in quanto

$$|\mathcal{L}_y^T(x)| = |\langle y|Tx \rangle| \leq \|y\| \cdot \|Tx\| \leq (\|T\| \|y\|) \|x\|$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Schwarz e la limitatezza di T .

Per il teorema della rappresentazione di Riesz 8.4.3 per i funzionali lineari limitati negli spazi di Hilbert possiamo dire che $\forall y, \exists !z : \forall x, \mathcal{L}_y^T = \langle z|x \rangle$, ovvero tale che

$$(10.12) \quad \langle y|Tx \rangle = \langle z|x \rangle$$

Siccome per ogni fissato vettore y , l'elemento z così ottenuto è unico qualunque sia x , denotiamo questo vettore z come T^*y . In altre parole, introduciamo la corrispondenza

$$(10.13) \quad y \xrightarrow{T^*} z := T^*y$$

che permette di considerare un operatore T^* definito sull'intero spazio \mathcal{H} che soddisfa la condizione

$$(10.14) \quad \langle y|Tx \rangle = \langle T^*y|x \rangle \text{ qualunque sia } x \text{ e } y \text{ appartenente a } \mathcal{H}$$

Questo operatore è lineare. Infatti presi y_1 e y_2 in \mathcal{H} con $z_1 = T^*y_1$ e $z_2 = T^*y_2$ avremo che

$$\begin{aligned} \langle y_1 + y_2|Tx \rangle &= \langle y_1|Tx \rangle + \langle y_2|Tx \rangle = \langle z_1|x \rangle + \langle z_2|x \rangle = \langle z_1 + z_2|x \rangle \\ &= \langle T^*y_1 + T^*y_2|x \rangle \end{aligned}$$

che tenendo conto dell'equazione (10.13) conduce all'identità $\langle T^*y_1 + T^*y_2|x \rangle = \langle T^*(y_1 + y_2)|x \rangle$, ovvero

$$\langle T^*y_1 + T^*y_2 - T^*(y_1 + y_2)|x \rangle = 0 \text{ qualunque sia } x \in \mathcal{H}$$

che, per la 1.2.3, implica che $T^*y_1 + T^*y_2 = T^*(y_1 + y_2)$.

Analogamente

$$\langle T^*\alpha y|x \rangle = \langle \alpha y|Tx \rangle = \bar{\alpha} \langle y|Tx \rangle = \bar{\alpha} \langle T^*y|x \rangle = \langle \alpha T^*y|x \rangle$$

per tutti gli $x \in \mathcal{H}$, che implica $T^*\alpha y = \alpha T^*y$.

Quindi abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 10.3.1 *Ogni operatore lineare limitato T su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ha un aggiunto T^* univocamente definito da (10.13) che è a sua volta un operatore lineare sull'intero \mathcal{H} .*

Dimostriamo adesso il seguente risultato

Proposizione 10.3.2 *L'aggiunto T^* di un operatore lineare e limitato T è anche limitato con*

$$(10.15) \quad \|T\| = \|T^*\|$$

Dimostrazione. Se nella (10.14) prendiamo $x = T^*y$ otteniamo

$$\|T^*y\|^2 = |\langle y|TT^*y \rangle| \leq \|y\| \cdot \|TT^*y\| \leq \|y\| \cdot \|T\| \cdot \|T^*y\|$$

da cui segue

$$\|T^*y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

Pertanto T^* è un operatore limitato con

$$(1) \quad \|T^*\| \leq \|T\|$$

Analogamente, se nella (10.14) prendiamo $y = Tx$, si ottiene

$$\|Tx\|^2 = |\langle T^*Tx|x \rangle| \leq \|x\| \cdot \|T^*Tx\| \leq \|x\| \cdot \|T^*\| \cdot \|Tx\|$$

da cui

$$\|Tx\| \leq \|T^*\| \cdot \|x\|$$

Pertanto abbiamo ottenuto

$$(2) \quad \|T\| \leq \|T^*\|$$

Mettendo insieme la (1) e la (2) abbiamo il risultato $\|T^*\| = \|T\|$. \square

Specializzando il teorema 10.2.1 al caso particolare degli operatori lineari limitati, abbiamo immediatamente il seguente

Teorema 10.3.3 *Siano T, S due operatori lineari e limitati su \mathcal{H} allora*

$$(i) \quad (T + S)^* = T^* + S^*$$

$$(ii) \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* \text{ per ogni } \alpha$$

$$(iii) \quad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*$$

$$(iv) \quad T^{**} := (T^*)^* = T$$

Osservazione 10.3.4 A questo punto, osserviamo che sulla classe $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ consistente di tutti gli operatori lineari limitati su \mathcal{H} sono definite le operazioni di somma, prodotto per uno scalare e composizione. Rispetto a queste operazioni $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ risulta essere un'algebra associativa con elemento unitario dato dall'operatore identità I , *non commutativa*.

Dimostriamo ora che tale algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ munita della norma 10.11, risulta essere un'algebra di Banach secondo la seguente definizione astratta.

Definizione 10.3.5 *Un'algebra di Banach è una classe \mathcal{B} che gode delle seguenti proprietà:*

1. è una algebra lineare complessa;
2. è definita una norma $\|\cdot\|$, rispetto alla quale, \mathcal{B} è uno spazio di Banach;
3. $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ per ogni $a, b \in \mathcal{B}$.

Dimostriamo ora ciò che è stato introdotto nell'osservazione, ovvero sia la

Proposizione 10.3.6 *La classe $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ consistente di tutti gli operatori lineari limitati su \mathcal{H} è una algebra di Banach.*

Dimostrazione. La 1 è una conseguenza dei teoremi già visti in questa sezione.

Dimostriamo la 2: sia $T_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una successione di Cauchy di operatori, allora, per ogni $x \in \mathcal{H}$

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \rightarrow 0$$

per ogni m e $n \in \mathbb{N}$. Quindi la successione $T_n(x) \in \mathcal{H}$ è di Cauchy, e siccome \mathcal{H} è completo, allora la successione converge a un vettore che indichiamo con $T(x)$, ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x)$, qualunque sia $x \in \mathcal{H}$. Utilizzando la linearità dei T_n si dimostra banalmente che T è un operatore lineare. Per dimostrare la limitatezza di T

$$(1) \quad \|Tx\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \|x\| \leq (\sup_n \{\|T_n\|\}) \|x\|$$

Dato che T_n è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, allora dalla ovvia maggiorazione $\left| \|T_n\| - \|T_m\| \right| \leq \|T_n - T_m\| \rightarrow 0$ segue che $\{\|T_n\|\}$ è una successione di Cauchy nello spazio metrico completo \mathbb{R}_+ ; pertanto essa converge in tale spazio. Come immediata conseguenza la quantità $\sup_n \{\|T_n\|\}$ è finita. Questo risultato applicato alla (1) dimostra che T è limitato. Da ultimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x - Tx \right\| = 0$$

dimostra che $T_n \rightarrow T$ nello spazio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Dimostriamo la 3: siano $T_1, T_2 \in \mathcal{H}$, allora $\|T_1 \circ T_2 x\| \leq \|T_1\| \|T_2 x\|$ dimostra che $T_1 \circ T_2$ è anch'esso un operatore limitato, e $\|T_1 \circ T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 \circ T_2 x\| \leq \|T_1\| \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\| = \|T_1\| \|T_2\|$ verifica la proprietà. \square

In questa classe si ha adesso un ulteriore operatore algebrico, definito dalla mappa $*$: $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ che associa ad ogni operatore T il suo aggiunto T^* . Prima di sviluppare questo concetto, introduciamo una definizione importante:

Definizione 10.3.7 *Sia \mathcal{A} una generica algebra complessa ed esista una mappa $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, denotata da $i(a) = a'$ per ogni $a \in \mathcal{A}$, con le seguenti proprietà:*

$$(i) \quad (a + b)' = a' + b',$$

$$(ii) \quad (\alpha a)' = \bar{\alpha} a',$$

$$(iii) \quad (ab)' = b' a',$$

$$(iv) \quad (a')' = a.$$

allora si dice che i è una involuzione su \mathcal{A} .

È facile dimostrare (dall'assioma (iv)), che una involuzione è biettiva. In particolare, se \mathcal{B} è un'algebra reale e commutativa, allora l'involuzione è un'automorfismo di \mathcal{B} .

Il teorema 10.3.3 asserisce proprio che la mappa di aggiunta $*$ è un'involuzione sull'algebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ di tutti gli operatori lineari limitati di un dato spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Adesso diamo un'altra

Definizione 10.3.8 *Una C^* -algebra è un'algebra di Banach \mathcal{A} sulla quale sia stata definita un'involuzione legata alla norma dalla condizione*

$$(v) \|a'a\| = \|a\|^2$$

per ogni $a \in \mathcal{A}$.

A questo punto dimostriamo che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ soddisfa la proprietà (v).

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$. Per la proprietà 3 definizione 10.3.5 dell'algebra di Banach, applicata agli operatori T^* e T avremo che $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2$.

Viceversa dimostriamo che $\|T^*T\| \geq \|T\|^2$. In primo luogo si ha che vale la seguente maggiorazione $\|Tx\|^2 = |\langle Tx|Tx \rangle| = |\langle T^*Tx|x \rangle| \leq \|T^*Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|^2$ per ogni vettore x . Da questa segue $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T^*T\|^{1/2}$ sempre per ogni $x \neq 0$. Pertanto a maggior ragione, $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T^*T\|^{1/2}$,

ovvero $\|T^*T\| \geq \|T\|^2$.

Questi due risultati dimostrano la tesi. \square

In sostanza, possiamo riassumere quanto visto fino ad ora attraverso il seguente

Teorema 10.3.9 *La classe $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ di tutti gli operatori lineari limitati su di un dato spazio di Hilbert \mathcal{H} è una C^* -algebra, rispetto all'involuzione naturale di prendere l'aggiunto.*

10.4 Operatori unitari ed antiunitari

Specializzando quanto abbiamo visto nel capitolo 7 al caso degli operatori unitari $U : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ con \mathcal{H} spazio di Hilbert, dalla proprietà (ii) del teorema 7.1.1 che definisce tali operatori, segue immediatamente che U è limitato con $\|U\| = 1$. Vale allora il seguente risultato.

Teorema 10.4.1 *Sia $U : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un operatore lineare definito sull'intero \mathcal{H} , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(U1) U è unitario;

(U2) U è limitato e $U^*U = UU^* = \mathbb{1}$ (ovvero, U è una biezione lineare limitata con $U^* = U^{-1}$)

In sintesi

$$(10.16) \quad (U1) \Leftrightarrow (U2)$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'implicazione (i) \Rightarrow (ii). Sia allora U un operatore unitario definito sull'intero spazio di Hilbert \mathcal{H} . Quindi si può procedere in tre passaggi:

1. Dalla condizione di isometria $\|Ux\| = \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{H}$ segue che $\|Ux\|^2 = \|x\|^2$ ovvero $\langle Ux|Ux \rangle = \langle x|x \rangle$. Allora si ha che $\langle U^*Ux|x \rangle = \langle x|x \rangle$ che implica $\langle (U^*U - \mathbb{1})x|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{H}$. Per la proposizione 10.1.19 si ha che

$$U^*U = \mathbb{1}$$

2. L'operatore unitario U , essendo biiettivo, è invertibile e quindi esiste U^{-1} e $UU^{-1} = \mathbb{1}$. Inoltre $U^* - U^{-1} = (U^* - U^{-1})UU^{-1} = (U^*U - \mathbb{1})U^{-1} = \mathbb{0}$. Abbiamo quindi ottenuto che

$$U^* = U^{-1}$$

3. Da $UU^{-1} = \mathbb{1}$ e $U^* = U^{-1}$ si ottiene

$$UU^* = \mathbb{1}$$

In conclusione

$$U^*U = UU^* = \mathbb{1}$$

Viceversa, sia U un operatore lineare limitato su \mathcal{H} , allora esiste il suo aggiunto lineare limitato U^* con norma $\|U^*\| = \|U\|$. Se U è anche biiettivo con $U^* = U^{-1}$, allora, in particolare, è suriettivo. Inoltre, per qualunque coppia di vettori $x, y \in \mathcal{H}$ vale che $\langle Ux|Uy \rangle = \langle x|U^*Uy \rangle = \langle x|y \rangle$, che è una versione equivalente della condizione di isometria. \square

Possiamo compendiare i risultati della proposizione 7.1.14 nel seguente risultato.

Teorema 10.4.2 *Sia U un operatore lineare su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . Consideriamo le seguenti tre asserzioni:*

- (U1) U unitario (equivalente alla (U2));
- (U3) ogni base ortonormale $\{u_n\}$ dello spazio \mathcal{H} è trasformata da U in un'altra base ortonormale $\{Uu_n\}$ dello stesso spazio;
- (U4) esiste una base ortonormale $\{u_n\}$ dello spazio \mathcal{H} che è trasformata da U in un'altra base ortonormale $\{Uu_n\}$ dello stesso spazio.

Allora vale il seguente canale di implicazioni

$$(U1) \implies (U3) \implies (U4)$$

La dimostrazione di questo teorema non richiede l'ipotesi che U sia un operatore limitato. Questa richiesta è invece essenziale nella dimostrazione di questo ulteriore risultato.

Proposizione 10.4.3 *Sia $U : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un operatore lineare limitato sulla spazio di Hilbert \mathcal{H} . Allora la condizione*

- (U4) *esiste una base ortonormale $\{u_n\}$ dello spazio \mathcal{H} che è trasformata da U in un'altra base ortonormale $\{Uu_n\}$ dello stesso spazio.*

implica che l'operatore U è unitario. Formalmente, sotto l'ipotesi che U sia limitato,

$$(U4) \implies (U1)$$

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ una base ortonormale di \mathcal{H} trasformata dall'operatore lineare limitato U in un'altra base ortonormale $\{Uu_n\}$, e consideriamo una coppia qualunque di vettori $\phi = \sum_n \alpha_n u_n$ e $\psi = \sum_n \beta_n u_n$ in \mathcal{H} , dove $\alpha_n = \langle u_n | \phi \rangle$ e $\beta_n = \langle u_n | \psi \rangle$. Allora

$$\begin{aligned} \langle U\phi | U\psi \rangle &= \left\langle U \sum_n \alpha_n | U \sum_m \beta_m u_m \right\rangle = \text{per la continuit\`a di } U \\ &= \left\langle \sum_n U\alpha_n | \sum_m U\beta_m u_m \right\rangle = \sum_{n,m} \alpha_n^* \beta_m \langle Uu_n | Uu_m \rangle \\ &= \sum_{n,m} \alpha_n^* \beta_m \delta_{n,m} = \sum_n \alpha_n^* \langle u_n | \psi \rangle \\ &= \left\langle \sum_n \alpha_n^* u_n | \psi \right\rangle = \langle \psi | \psi \rangle \end{aligned}$$

ovvero, U \u00e8 un'isometria.

Per ogni vettore fissato $y \in \mathcal{H}$, nella propria espansione in serie di Fourier $y = \sum \langle Uu_n | y \rangle Uu_n$ rispetto alla base ortonormale Uu_n , sappiamo che $\sum |\langle Uu_n | y \rangle|^2$ \u00e8 convergente in \mathbb{R} in virt\u00f9 dell'uguaglianza di Parseval (9.1.9) e quindi, facendo uso del teorema di Fisher-Riesz, sar\u00e0 convergente anche la serie $\sum \langle Uu_n | y \rangle u_n := x \in \mathcal{H}$. Da questo risultato segue che $Ux = U(\sum \langle Uu_n | y \rangle u_n) = \sum \langle Uu_n | y \rangle Uu_n = y$ dove la seconda uguaglianza \u00e8 conseguenza della continuit\u00e0 sequenziale dell'operatore limitato U . Abbiamo cos\u00ec dimostrato ch U \u00e8 surriettiva. \square

10.4.1 Il caso finito-dimensionale

Nel caso di uno spazio di Hilbert finito-dimensionale, possiamo prendere in esame alcuni risultati specifici. In primo luogo rigordiamo il seguente risultato standard di algebra lineare.

Proposizione 10.4.4 *Sia \mathcal{V} uno spazio lineare finito-dimensionale. Allora per ogni operatore lineare $L : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ le seguenti sono equivalenti:*

(L1) L \u00e8 iniettivo;

(L2) L \u00e8 surriettivo.

Un secondo risultato importante \u00e8 il teorema

Teorema 10.4.5 *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert finito-dimensionale. Allora la linearit\u00e0 di un operatore $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ implica che l'operatore \u00e8 anche limitato.*

Dimostrazione. Per ogni vettore $x \in \mathcal{H}$, nella sua espansione $x = \sum_{i=1}^N \langle u_i | x \rangle u_i$

rispetto ad una generica base ortonormale finita $\{u_i\}_{i=1,\dots,N}$ è

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| T \left(\sum_{i=1}^N \langle u_i|x \rangle u_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^N \langle u_i|x \rangle T(u_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \|\langle u_i|x \rangle T(u_i)\| = \sum_{i=1}^N |\langle u_i|x \rangle| \cdot \|T(u_i)\| \\ &\leq \max_{i=1,\dots,N} \{\|T(u_i)\|\} \cdot \sum_{i=1}^N |\langle u_i|x \rangle| \\ &\leq \max \{\|T(u_i)\|\} \cdot \sum_{i=1}^N \|u_i\| \|x\| = (\max \{\|T(u_i)\|\} N) \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Quindi esiste la costante $\alpha = \max \{\|T(u_i)\|\} N \geq 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale la maggiorazione $\|Tx\| \leq \alpha \|x\|$, ovvero che T è limitato. \square

Come conseguenza della proposizione 10.4.3.

Corollario 10.4.6 *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert finito-dimensionale e $U : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ un operatore lineare su di esso. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- (U1) U è un'isometria (e quindi, in quanto iniettivo, necessariamente unitario);
- (U2) $U^*U = UU^* = \mathbb{I}$ (ossia U invertibile con $U^* = U^{-1}$);
- (U3) ogni base ortonormale $\{u_n\}$ dello spazio \mathcal{H} è trasformata da U in un'altra base ortonormale $\{Uu_n\}$ dello stesso spazio;
- (U4) esiste una base ortonormale $\{u_n\}$ dello spazio \mathcal{H} che è trasformata da U in un'altra base ortonormale $\{Uu_n\}$ dello stesso spazio.

In particolare possiamo sottolineare il seguente risultato:

Condizione necessaria sufficiente affinché una trasformazione lineare U su uno spazio di Hilbert finito-dimensionale sia unitaria è che trasformi una base ortonormale in una base ortonormale.

Capitolo 11

Teoria spettrale per operatori in spazi normati

11.1 Spettro puntuale e spettro puntuale approssimato

In questo paragrafo indicheremo con X uno spazio lineare normato complesso e con $T : \mathcal{D} \mapsto X$ un operatore definito su di una varietà lineare \mathcal{D} di X .

Definizione 11.1.1 Diremo che

$$(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times \mathcal{D} / \{\underline{0}\}$$

costituisce una coppia autovalore–autovettore per l'operatore T sse

$$(11.1) \quad Tx = \lambda x$$

Equivalentemente si dice che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore dell'operatore T sse esiste un vettore $x \in \mathcal{D}$ non nullo tale che $Tx = \lambda x$.

I vettori x per cui la condizione (11.1) è soddisfatta si chiamano autovettori dell'operatore T associati all'autovalore λ . Ovviamente, $\underline{0}$ è un autovettore associato a qualsiasi autovalore di T ; però, se λ è un autovalore dell'operatore T esisterà un autovettore non nullo associato all'autovalore in questione.

Proposizione 11.1.2 Sia $T : \mathcal{D} \mapsto X$ un operatore lineare, le due seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (i) λ è un autovalore di T ;
- (ii) l'operatore $(T - \lambda\mathbb{I})$ non è iniettivo.

Dimostrazione. Se λ è un autovalore di T allora esiste $x \neq \underline{0}$ tale che $(T - \lambda\mathbb{I})x = \underline{0}$. D'altra parte è banale che $(T - \lambda\mathbb{I})\underline{0} = \underline{0}$ e perciò l'operatore $(T - \lambda\mathbb{I})$ non è iniettivo.

Viceversa, se $(T - \lambda\mathbb{I})$ non é iniettivo esistono due vettori diversi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 \neq x_2$, tali che

$$(T - \lambda\mathbb{I})x_1 = (T - \lambda\mathbb{I})x_2$$

Allora $x_1 - x_2 \neq \mathbf{0}$ e in piú $(T - \lambda\mathbb{I})(x_1 - x_2) = \mathbf{0}$ □

Esempio 11.1.3 *Autovalore di un operatore matriciale.*

Se X é uno spazio lineare normato sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} finito dimensionale con $\dim X = n$ sappiamo che $X \cong \mathbb{K}^n$, ossia che é identificabile con \mathbb{C}^n tramite un opportuno isomorfismo lineare U_α che preserva la norma e che ogni operatore $T : X \mapsto X$ può essere rappresentato tramite un operatore matriciale $M(T) = \{a_{ij}\}$, essendo $M(T) = U_\alpha \circ T \circ U_\alpha^{-1}$. Dalla Proposizione precedente si ricava che λ é un autovalore di T sse λ é un autovalore della matrice $M(T)$. D'ora in avanti, per ragioni di semplicità, indicheremo collo stesso simbolo T sia l'operatore che la matrice ad esso associata. ■

Proposizione 11.1.4 *Le seguenti due proposizioni sono equivalenti*

(i) λ é un autovalore di T

(ii) $\det(T - \lambda\mathbb{I}) = 0$.

Dimostrazione. λ é un autovalore di T sse esiste $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ non nullo tale che $(T - \lambda\mathbb{I})\underline{x} = \mathbf{0}$, ma per la regola di Kramer ciò é possibile sse $\det(T - \lambda\mathbb{I}) = 0$. □

Osserviamo che uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ é un autovalore dell'operatore $T : \mathcal{D} \mapsto X$ sse

(p) esiste un vettore $x \in \mathcal{D}$ con $\|x\| = 1$ tale che $\|(T - \lambda I)x\| = 0$.

Come vedremo piú avanti si possono dare esempi di operatori per cui non esistono autovalori. Una condizione meno restrittiva su λ di quella ora vista potrebbe essere la seguente:

(ap) per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un vettore $x_\varepsilon \in \mathcal{D}$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ e tale che $\|(T - \lambda\mathbb{I})x_\varepsilon\| < \varepsilon$

ovvero, equivalentemente

Definizione 11.1.5 *Diremo che $\lambda \in \mathbb{C}$ é un autovalore approssimato per l'operatore T sse esiste una successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ di vettori in \mathcal{D} tale che*

$$\|x_n\| = 1 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(T - \lambda\mathbb{I})x_n\| = 0$$

L'insieme degli autovalori approssimati costituisce lo *spettro puntuale approssimato*, che verrà indicato con $\sigma_{ap}(T)$. Chiaramente

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T).$$

L'aspetto rilevante di questa definizione é che per qualunque operatore (limitato) lo spettro puntuale approssimato é non vuoto. (S.K. Berberian, Introduction

to Hilbert spaces, Oxford University Press, 1961). Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T : \mathcal{D} \mapsto X$ un operatore lineare; d'ora in avanti indicheremo con T_λ l'operatore definito da

$$(11.2) \quad T_\lambda = T - \lambda \mathbb{I}$$

Esso é un operatore definito sullo stesso dominio dell'operatore T , ossia $T_\lambda : \mathcal{D} \mapsto X$. Pertanto, la condizione (11.1) può essere trascitta nel seguente modo.

$\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ sse esiste una successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{D} tale che

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \lim \|T_\lambda x_n\| = 0$$

Osservazione 11.1.6 Se $X = \mathcal{H}$, é uno spazio di Hilbert, sia \mathcal{D} una varietà lineare densa in \mathcal{H} e $T : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{H}$ un operatore lineare. Indicato con $T^* : \mathcal{D}^* \mapsto \mathcal{H}$ l'operatore aggiunto di T allora

$$(T_\lambda)^* = T^* - \bar{\lambda} \mathbb{I}$$

essendo

$$(T_\lambda)^* : \mathcal{D}^* \mapsto \mathcal{H}.$$

Definizione 11.1.7 Diremo che T_λ é inferiormente limitato sse esiste una costante positiva $k > 0$ tale che $k \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$ per ogni $x \in \mathcal{D}$.

Proposizione 11.1.8 Sia $T : \mathcal{D} \mapsto X$ le due seguenti proposizioni sono equivalenti:

- (i) $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.
- (ii) T_λ non é inferiormente limitato.

Dimostrazione. $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ implica che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in \mathcal{D}$ con $\|x_n\| = 1$ e tale che

$$\|T_\lambda x_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ tale che

$$(1) \quad \|T_\lambda x_n\| \leq \frac{1}{n} \|x_n\|$$

e ciò esclude la possibilità di trovare un $k > 0$ tale che

$$k \|x\| \leq \|T_\lambda x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D};$$

basterà prendere nella (1) n_o tale da risultare $\frac{1}{n_o} \leq k$.

Supponiamo ora che T_λ non sia inferiormente limitato. Allora per ogni $k > 0$, esiste $\hat{x}_k \in \mathcal{D}$ tale che $\|T_\lambda(\hat{x}_k)\| < k \|\hat{x}_k\|$, quindi necessariamente $\|\hat{x}_k\| \neq 0$. Posto $k = \varepsilon$ e $x_\varepsilon = \hat{x}_k / \|\hat{x}_k\|$ avremo che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{D}$ con $\|x_\varepsilon\| = 1$ e tale che $\|T_\lambda x_\varepsilon\| < \varepsilon$ e ciò significa che $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. \square

Proposizione 11.1.9 Sia $T : \mathcal{D} \mapsto X$ un operatore lineare, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) T_λ é inferiore limitato

(ii) T_λ é iniettivo e $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto X$ é limitato.

Dimostrazione. Sia T_λ inferiormente limitato, allora $T_\lambda x = \underline{0}$ e la condizione $k \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$ per ogni $x \in \mathcal{D}$, con $k \neq 0$, implicano che $\|x\| = 0$ da cui $x = \underline{0}$. Quindi T_λ é iniettivo con operatore inverso T_λ^{-1} definito su $T_\lambda(\mathcal{D})$. Inoltre, se $k \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$ per ogni $x \in \mathcal{D}$, posto $y = T_\lambda x$ avremo che $k \|T_\lambda^{-1} y\| \leq \|y\|$ per ogni $y \in T_\lambda(\mathcal{D})$ ossia $\|T_\lambda^{-1} y\| \leq h \|y\|$ per ogni $y \in T_\lambda(\mathcal{D})$ ove $h = \frac{1}{k} \neq 0$.

Viceversa, se T_λ^{-1} é limitato su $T_\lambda(\mathcal{D})$, per ogni $y \in T_\lambda(\mathcal{D})$ avremo che $\|T_\lambda^{-1}(y)\| \leq h \|y\|$ potremo ritenere che $h \neq 0$ in quanto se fosse $h = 0$ allora $\|T_\lambda^{-1}(y)\| = 0$ e quindi esisterà $h' > 0$ tale che $0 = \|T_\lambda^{-1}(y)\| \leq h' \|y\|$. Perciò, posto $y = T_\lambda(x)$ sarà allora $k \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ con $k = \frac{1}{h} \neq 0$. \square

Corollario 11.1.10 Sia $T : \mathcal{D} \mapsto X$ un operatore lineare, allora $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ sse é verificata una delle due alternative:

(ap-i) T_λ non é iniettivo

(ap-ii) T_λ é iniettivo ma $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto X$ non é limitato.

Dimostrazione. Nella proposizione 11.1.8 abbiamo visto che $[\lambda \in \sigma_{ap}(T)] \iff$ non $[T_\lambda$ inferiormente limitato]; ma dalla proposizione 11.1.9 segue che non $[T_\lambda$ inferiormente limitato] \iff non $[T_\lambda$ iniettivo e T_λ^{-1} limitato] = $[T_\lambda$ non iniettivo o T_λ^{-1} non limitato]. \square

Esempio 11.1.11 Sia Q l'operatore di moltiplicazione monodimensionale su $L_2(\mathbb{R})$. Il suo spettro puntuale é vuoto in quanto l'equazione agli autovalori per questo operatore $(Q\psi)(x) = \lambda\psi(x)$ si traduce nella seguente equazione, che deve essere risolta da almeno un vettore $\psi \in \mathcal{D}_Q$ non nullo,

$$(x - \lambda)\psi(x) = 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri la successione

$$\left\{ \hat{\delta}_n^{(\lambda)} = K_n \chi_{[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]} \right\}$$

ove vogliamo individuare le costanti K_n in modo che risulti

$$\|\hat{\delta}_n^{(\lambda)}\| = 1 \quad \text{e} \quad \|Q_\lambda \hat{\delta}_n^{(\lambda)}\| \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

Con rapidi calcoli si ottiene che queste condizioni sono soddisfatte da

$$\left\{ \hat{\delta}_n^{(\lambda)} = \sqrt{\frac{n}{2}} \chi_{[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]} \right\},$$

Pertanto, ogni numero reale appartiene allo spettro approssimato dell'operatore Q . \blacksquare

DISEGNO

11.2 Spettro di un operatore

Come abbiamo visto l'appartenenza di $\lambda \in \mathbb{C}$ allo spettro puntuale approssimato di un operatore $T : \mathcal{D} \mapsto X$ è legato alla proprietà dell'operatore

$$T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto \mathcal{D}.$$

In generale per ciò che riguarda il comportamento di T_λ^{-1} vi saranno i tre casi possibili:

T_λ^{-1}	non esiste	esiste non limitato	esiste limitato
------------------	------------	---------------------	-----------------

Inoltre per ciò che riguarda il suo dominio di definizione $T_\lambda(\mathcal{D})$ avremo i tre casi possibili:

$T_\lambda(\mathcal{D})$	$T_\lambda(\mathcal{D}) = X$	$\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} = X$	$\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} \not\subseteq X$
--------------------------	------------------------------	---	---

In Analisi Funzionale si usa decomporre il piano complesso \mathbb{C} in quattro regioni, in relazione al comportamento di $T_\lambda(\mathcal{D})$ e del comportamento dell'eventuale operatore T_λ^{-1} , secondo la seguente:

Definizione 11.2.1 Sia $T : \mathcal{D} \mapsto X$ un operatore lineare, diremo che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un elemento dello spettro di T , indicato con $\sigma(T)$, sse è verificata una delle tre alternative:

- (p) T_λ non è iniettivo;
- (c) T_λ è iniettivo, $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto X$ non è limitato e $\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} = X$;
- (r) T_λ è iniettivo, ma $\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} \neq X$ ($T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto X$ può essere limitato o non).

Gli elementi di \mathbb{C} soddisfacenti la condizione (p) costituiscono lo spettro puntuale di T , indicato con $\sigma_p(T)$, quelli soddisfacenti la (c) lo spettro continuo di T , indicato con $\sigma_c(T)$, mentre quelli soddisfacenti la (r) formano lo spettro residuo di T , indicato con $\sigma_r(T)$. Ovviamente,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

con $\sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$ a due a due disgiunti.

Gli elementi di \mathbb{C} non appartenenti allo spettro di T costituiscono l'insieme risolvente di T , indicato con $\rho(T)$, e vengono chiamati valori regolari di T . Pertanto

$$\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$$

con

$$\rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T_\lambda \text{ iniettivo, } \overline{T_\lambda(\mathcal{D})} = X, T_\lambda^{-1} \text{ limitato} \right\}$$

Per ciò che riguarda lo spettro, avremo che

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$$

Considerato l'operatore $T : \mathcal{D} \mapsto X$ e costruito per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ l'operatore $T_\lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, possiamo costruire la seguente tabella:

$T_\lambda : \mathcal{D} \mapsto X$	$T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto \mathcal{D}$	$T_\lambda(\mathcal{D}) = X$	$\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} = X$	$\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} \subset X$
non iniettivo	non esiste	σ_p	σ_p	σ_p
iniettivo	esiste non limitato	σ_{cI}	σ_{cII}	σ_{rI}
iniettivo	esiste limitato	ρ_I	ρ_{II}	σ_{rII}

Tabella 11.1: Comportamento complessivo spettrale per un operatore $T : \mathcal{D} \mapsto X$.

Rispetto alla tabella precedente, tutte le caselle indicate con σ costituiscono lo spettro, quelle con ρ , il risolvente. In particolare lo spettro σ_t consiste delle seguenti 3 parti mutuamente disgiunte:

- i) lo *spettro puntuale* σ_p ;
- ii) lo *spettro continuo* σ_c ;
- iii) lo *spettro residuo* σ_r che si divide in due parti sottoenumerate σ_{rI} e σ_{rII} , entrambe caratterizzate dalla condizione che T_λ non è denso in X ($\overline{T_\lambda(\mathcal{D})} \subset X$) e che T_λ è iniettivo.

Daremo una dimostrazione alternativa (G.E. Silov, *Analisi Matematica*, III parte, edizioni MIR) della seguente

Proposizione 11.2.2 *Per ogni $T : \mathcal{D} \mapsto X$ operatore lineare*

$$\begin{aligned}\sigma_{ap}(T) &= \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_{rI}(T) \\ \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T) &= \rho(T) \cup \sigma_{rII}(T)\end{aligned}$$

corrispondente alle prime due righe della tabella 11.1

Dimostrazione. Dimostreremo la seguente implicazione:

$$(11.3) \quad \lambda \in \rho(T) \cup \sigma_{rII}(T) \quad \text{implica} \quad \lambda \notin \sigma_{ap}(T)$$

Sia $\lambda \in \rho(T) \cup \sigma_{rII}(T)$ allora (vedi tabella 11.1) T_λ^{-1} esiste limitato. Da ciò segue che per *ogni* successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}$ si ha $x_n = T_\lambda^{-1} T_\lambda x_n$ da cui, se esistono $\lim \|x_n\|$ e $\lim T_\lambda x_n$ sarà necessariamente, per la continuità sequenziale della norma,

$$\lim \|x_n\| = \left\| \lim (T_\lambda^{-1} T_\lambda x_n) \right\| = \left\| T_\lambda^{-1} \left(\lim (T_\lambda x_n) \right) \right\|. \quad (*)$$

Pertanto, se fosse $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ avremmo che esiste una successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}$ tale che $\|x_n\| = 1$ e $\lim \|T_\lambda x_n\| = 0$, ovvero tale che $\lim \|x_n\| = 1$ e $\lim T_\lambda x_n = \underline{0}$; ma queste due condizioni sono incompatibili con la (*).

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\lambda \in \sigma_{ap} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_{rI}(T)$$

Dimostriamo ora il viceversa. A questo proposito abbiamo già visto che

$$(11.4) \quad \lambda \in \sigma_p(T) \quad \text{implica} \quad \lambda \in \sigma_{ap}(T)$$

facciamo vedere ora che

$$(11.5) \quad \lambda \in \sigma_c(T) \cup \sigma_{r_I}(T) \quad \text{implica} \quad \lambda \in \sigma_{ap}(T)$$

Sia λ tale che $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(\mathcal{D}) \mapsto \mathcal{D}$ esiste non limitato, allora per ogni $k > 0$ esiste $\psi_k \in T_\lambda(\mathcal{D})$ tale che

$$\|\psi_k\| > k \|T_\lambda^{-1}\psi_k\|.$$

Da questo segue che per ogni $k > 0$ esiste $\hat{\phi}_k = T_\lambda^{-1}\psi_k$ tale che $\|T_\lambda\hat{\phi}_k\| < k \|\hat{\phi}_k\|$, (da cui $\|\hat{\phi}_k\| \neq 0$). Preso in particolare, $k = 1/n$ e posto

$$\phi_n = \frac{\hat{\phi}_{1/n}}{\|\hat{\phi}_{1/n}\|}$$

avremo che $\|T_\lambda\phi_n\| < \frac{1}{n}$ e quindi esiste la successione $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ tale che $\|\phi_n\| = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_\lambda\phi_n\| = 0$, ossia $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. \square

Dalla proposizione segue quindi che

$$\sigma_{r_I}(T) = \emptyset \quad \text{implica} \quad \sigma_{ap}(T) = \sigma(T)$$

A volte useremo porre $\sigma_{cg}(T) := \sigma_c(T) \cup \sigma_{r_I}(T)$, questo insieme viene detto *spettro continuo generalizzato* di T , per cui $\sigma_{ap}(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{cg}(T)$, e definiremo $\rho_g(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(T)$, chiamata *risolvente generalizzato* di T .

Capitolo 12

Chiusura di un operatore

Operatori chiusi

12.1 Operatori chiusi

In quanto segue, tranne nei casi in cui sarà diversamente specificato,

- X è uno spazio lineare normato complesso;
- T è un operatore lineare da X in X ;
- \mathcal{D}_T è una varietà lineare di X , dominio di definizione dell'operatore T .

Le potenti proprietà di cui dispone la classe degli operatori limitati su di uno spazio normato (vedi sezione 1.1, capitolo 4), non sono sempre utilizzabili nelle applicazioni, dove si incontrano spesso operatori non limitati. Ad esempio, in Meccanica Quantistica intervengono massicciamente gli operatori di moltiplicazione e di derivazione che, come è noto, non sono limitati. Essi, come altri operatori, soddisfano comunque una sorta di continuità: sono cioè *operatori chiusi*.

Risulta senz'altro utile lo studio di tali operatori e delle connessioni tra le proprietà di chiusura e quelle di continuità, iniettività, ecc..

Definizione 12.1.1 Un operatore lineare $T : \mathcal{D}_T \mapsto X$ si dirà chiuso se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ convergente in X ad un vettore x , ossia tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$$

e per cui esiste in X il limite y della successione delle immagini

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y \in X$$

si ha che:

$$(C.1) \quad x \in \mathcal{D}_T$$

$$(C.2) \quad y = Tx$$

Osservazione 12.1.2 Da questa definizione si vede che gli operatori chiusi soddisfano ad una proprietà molto simile alla continuità sequenziale in spazi lineari normati. Ricordiamo però che in tali spazi la continuità sequenziale é equivalente alla continuità e, in più, per gli operatori lineari limitati la continuità é equivalente alla limitatezza degli operatori.

Come andremo ora a verificare, però, in generale non si può stabilire alcun legame fra la chiusura di un operatore lineare e la limitatezza.

Esempio 12.1.3 *Operatore chiuso non limitato.*

Sia \mathcal{D}_T la varietà lineare di l_2 definita da

$$\mathcal{D}_T := \left\{ \{\xi_k\} \in l_2 : \sum k^2 |\xi_k|^2 < +\infty \right\}$$

e sia T l'operatore lineare $T : \mathcal{D}_T \mapsto l_2$ definito da $T(\{\xi_k\}) = \{k\xi_k\}$. T non é limitato in quanto, considerata la base ortonormale canonica di l_2 , $e_j = \{\delta_{k,j}\}$, si ha $\|T(\{\delta_{k,j}\})\| = j$ con $\|\{\delta_{k,j}\}\| = 1$.

Prendiamo ora una successione $\{\underline{x}_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$, con $\underline{x}_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, tale che esista $\underline{x} = \lim \underline{x}_n$, con $\xi = \{\xi_k\} \in l_2$, e per cui esiste $\underline{y} = \lim T\underline{x}_n$, con $\underline{y} = \{\eta_k\} \in l_2$. Dal fatto che $\lim_n \underline{x}_n = \xi$ nello spazio di Hilbert l_2 segue che

$$\lim_n \|\underline{x}_n - \underline{x}\|^2 = \lim_n \left(\sum_k \|\xi_k^{(n)} - \xi_k\|^2 \right) = 0$$

e ciò é possibile sse $\lim_n |\xi_k^{(n)} - \xi_k| = 0$ per ogni k , ossia sse $\lim_n \xi_k^{(n)} = \xi_k$ per ogni k . Da questo risultato segue che $\underline{y} = \lim_n T\underline{x}_n$ implica

$$(12.1) \quad \eta_k = \lim_n k\xi_k^{(n)} = k\xi_k$$

Poiché $\underline{y} = \{\eta_k\}$ é un elemento di l_2 , abbiamo che $\sum_k |\eta_k|^2 < \infty$ e, quindi, per la (12.1), $\sum_k k^2 |\xi_k|^2 < \infty$, ottenendo che la successione $\underline{x} = \{\xi_k\}$ appartiene a \mathcal{D}_T . Infine, si osservi che la (12.1) si può scrivere come $\underline{y} = T\underline{x}$. ■

Esempio 12.1.4 *Operatore limitato non chiuso*

Sia \mathcal{D}_T la varietà lineare di l_2 delle successioni definitivamente nulle.

$$\mathcal{D}_T = \{ \{\xi_k\} \in l_2 : \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \xi_k = 0, \text{ per ogni } k > n \}$$

e sia T l'operatore definito su \mathcal{D}_T da $T(\{\xi_k\}) = \{\frac{1}{k}\xi_k\}$. T é ovviamente limitato ma non é chiuso.

Infatti presa la successione $\{\underline{x}_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$, $\underline{x}_n = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\}$, essa converge a $\underline{x} = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots\} \in l_2$; inoltre, la successione $T\underline{x}_n = \{1, \frac{1}{1^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, \dots\}$ é tale che

$$\lim T\underline{x}_n = \left\{ 1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{k^2}, \frac{3}{1}(k+1)^2, \dots \right\} \in l_2.$$

Ma, come é evidente $\underline{x} \notin \mathcal{D}_T$; dunque T non é chiuso. ■

Osservazione 12.1.5 Dall'esempio 12.1.4 risulta che se noi estendiamo per continuità l'operatore T alla chiusura $\overline{\mathcal{D}_T}$ della varietà lineare \mathcal{D}_T , ottenendo l'operatore $\overline{T} : \overline{\mathcal{D}_T} \mapsto l_2$ ($\overline{\mathcal{D}_T} = l_2!$):

$$\underline{x} \mapsto \overline{T}\underline{x} = \left\{ \frac{1}{k}\xi_k \right\}$$

ogni successione $\{\underline{x}_n\} \subseteq \overline{\mathcal{D}_T}$ convergente ad un $\underline{x} \in l_2$, avrà come successione immagine una successione $\{\overline{T}\underline{x}_n\}$ convergente in l_2 a causa della continuità di \overline{T} ; inoltre per la stessa ragione

$$\lim (\overline{T}\underline{x}_n) = \overline{T}(\lim \underline{x}_n).$$

Una generalizzazione di questo risultato ad ogni operatore limitato T in uno spazio normato X è possibile sotto la condizione che detto spazio sia completo, come è il caso dell'esempio 12.1.4. Vale infatti il seguente

Teorema 12.1.6 *Un operatore limitato $T : \mathcal{D}_T \mapsto X$, dove X è completo, è chiuso sse \mathcal{D}_T è una varietà lineare chiusa in X .*

Dimostrazione. (a) Sia T limitato e chiuso.

Presi una qualsiasi successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ convergente a $x \in X$ (quindi $x \in \overline{\mathcal{D}_T}$). Per la limitatezza dell'operatore, $\{Tx_n\}$ converge a $\tilde{T}x \in X$, dove \tilde{T} è l'estensione continua di T a $\overline{\mathcal{D}_T}$. Allora, per la chiusura $x \in \mathcal{D}_T$ e $(Tx = \tilde{T}x)$.

(b) Sia T limitato e \mathcal{D}_T chiusa in X .

Presi una successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ convergente a $x \in X$, si ha $x \in \mathcal{D}_T$ per la chiusura di quest'ultima, inoltre dalla limitatezza dell'operatore segue che $\{Tx_n\}$ converge a $Tx \in X$. □

Nota. Nella parte b della dimostrazione non interviene la completezza di X ; potremo quindi enunciare la

Proposizione 12.1.7 *Se T è un operatore limitato e \mathcal{D}_T una varietà lineare chiusa nello spazio non necessariamente completo X , allora T è chiuso.*

Osservazione 12.1.8 La proprietà di chiusura per un operatore è qualcosa che permette di attribuirgli una sorta di continuità. La chiusura infatti dà l'idea di un indebolimento della continuità, anche se a rigore non lo è in quanto esistono operatori limitati non chiusi (vedi esempio 12.1.4). Comunque, per un operatore continuo in uno spazio di Banach esiste un'unica possibilità di non essere chiuso: cioè quella di avere il dominio di definizione non chiuso; in questo caso l'operatore *non* può essere chiuso.

Teorema 12.1.9 *Se T è chiuso e iniettivo, allora T^{-1} è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $T(\mathcal{D}_T)$ l'immagine dell'operatore T . Presi una successione $\{y_n\} \subseteq T(\mathcal{D}_T)$ esiste (per la iniettività) un'unica successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ tale che la sua immagine Tx_n coincida con y_n . Supponiamo che

$$(a) \quad \lim y_n = y \in X \quad e$$

$$(b) \quad \lim T^{-1}y_n = x \in X$$

Le condizioni (a) e (b) sono equivalenti alle condizioni

$$(b') \quad \lim x_n = x \in X \quad e$$

$$(a') \quad \lim Tx_n = y \in X$$

Per la proprietà di chiusura dell'operatore si ha allora: $x \in \mathcal{D}_T$ e $\lim Tx_n = Tx = y$. Quindi $\lim y_n = y \in T(\mathcal{D}_T) \equiv D_{T^{-1}}$ e da $y = Tx$ segue, per la iniettività, $x = \lim T^{-1}y_n = T^{-1}y$. □

Passiamo ora a considerare il caso di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Teorema 12.1.10 *Se T é densamente definito in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , allora T^* é un operatore chiuso.*

Dimostrazione. Se T é densamente definito, l'operatore T^* esiste ed é unico. Sia $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_{T^*}$ t.c. $\lim x_n = x \in \mathcal{H}$ e $\lim T^*x_n = y^* \in \mathcal{H}$. Allora per ogni $y \in \mathcal{D}_T$ si ha

$$\langle Ty|x \rangle = \lim \langle Ty|x_n \rangle = \lim \langle y|T^*x_n \rangle = \langle y|y^* \rangle$$

cioé $x \in \mathcal{D}_{T^*}$ e $T^*x = y^*$. □

Corollario 12.1.11 *Un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert é chiuso.*

Dimostrazione. Banale. □

Esempio 12.1.12 Nello spazio di Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ l'operatore di moltiplicazione

$$Q : \mathcal{D}_Q \mapsto L_2(\mathbb{R}), \psi \mapsto (Q\psi)(x) := x\psi(x)$$

dove $\mathcal{D}_Q = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : x\psi(x) \in L_2(\mathbb{R})\}$, e l'operatore di derivazione

$$P : \mathcal{D}_P \mapsto L_2(\mathbb{R}), \psi \mapsto P\psi := -i\hbar \frac{d\psi}{dx}$$

dove $\mathcal{D}_P = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \exists \frac{d\psi}{dx} \in L_2(\mathbb{R})\}$, sono operatori autoaggiunti e, quindi, chiusi. ■

12.2 Teorema del grafo chiuso

Questo paragrafo é dedicato al teorema del *grafo chiuso* che permetterà di esplorare le interessanti connessioni che esistono in uno spazio di Banach tra le proprietà del dominio di definizione di un operatore lineare chiuso e la limitatezza dello stesso.

Iniziamo col considerare uno spazio lineare normato X . Costruito il prodotto cartesiano $X^2 = X \times X$, definiamo per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in X^2$, con $\underline{x} = (x_1, x_2), \underline{y} = (y_1, y_2)$, e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ le seguenti operazioni

$$(12.2) \quad \underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$(12.3) \quad \lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

e la seguente norma

$$(12.4) \quad \|\underline{x}\| = \left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \right)^{1/2}$$

Vale l'ovvio risultato che $\langle X^2, +, \cdot, \mathbb{C}, \|\cdot\| \rangle$ é uno spazio lineare normato.

Definizione 12.2.1 Sia \mathcal{D}_T un sottoinsieme (non necessariamente una varietà lineare) di X e $T : \mathcal{D}_T \mapsto X$ un operatore (non necessariamente lineare). Il sottoinsieme di X^2

$$\mathcal{G}(T) := \{\underline{x} \in X^2 : \underline{x} = (x, Tx), x \in \mathcal{D}_T\}$$

viene chiamato il grafo di T . Si verifica facilmente che se T è lineare, $\mathcal{G}(T)$, è una varietà lineare di X .

Lemma 12.2.2 Una successione $\{\underline{x}_n\} \subseteq X^2$, dove $\underline{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$, converge a $\underline{x} \in X^2$, con $\underline{x} = (x_1, x_2)$, sse convergono in X le due successioni $\{x_n^{(1)}\}$ e $\{x_n^{(2)}\}$ con limiti x_1 e x_2 rispettivamente.

Dimostrazione. Il risultato segue facilmente dall'uguaglianza

$$\|\underline{x}_n - \underline{x}\|^2 = \|x_n^{(1)} - x_1\|^2 + \|x_n^{(2)} - x_2\|^2.$$

□

Corollario 12.2.3 X^2 è uno spazio di Banach sse X è completo.

Teorema 12.2.4 Un'operatore lineare $T : \mathcal{D}_T \rightarrow X$ è chiuso sse il suo grafo $\mathcal{G}(T)$ è un sottoinsieme chiuso di X^2 .

Dimostrazione.

- (a) Presa una successione $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_T$ tale che $\lim x_n = x \in X$ e $\lim Tx_n = y \in X$, allora $\exists \lim(x_n, Tx_n)$. Se $\mathcal{G}(T)$ è chiuso $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$ e $(x, y) = (x, Tx)$.
- (b) Presa una successione $\{\underline{x}_n\} \subseteq \mathcal{G}(T)$, con $\underline{x}_n = (x_n, Tx_n)$ e $x_n \in \mathcal{D}$, tale che esiste $\underline{x} = (x, y) \in X^2$ per cui $\lim \underline{x}_n = \underline{x}$, si ha $\lim x_n = x$ e $\lim Tx_n = y$; se T è chiuso $x \in \mathcal{D}_T$ e $y = Tx : (x, y) \in \mathcal{G}(T)$.

□

Il precedente teorema fornisce una caratterizzazione per gli operatori chiusi che ci permette di dimostrare il seguente risultato, valido in spazi di Banach.

Teorema 12.2.5 Sia $T : \mathcal{D}_T \rightarrow X$ un operatore lineare chiuso, con X spazio di Banach. Allora T è limitato sse \mathcal{D}_T è chiuso in X .

Dimostrazione. Dal teorema 12.2.4, se T è limitato, per la proprietà (ii), \mathcal{D}_T è chiuso.

Viceversa, se T è chiuso, $\mathcal{G}(T)$ è chiuso in virtù del teorema 12.2.4 e, siccome X è uno spazio di Banach, (corollario precedente), $\mathcal{G}(T)$ è esso stesso uno spazio di Banach. Consideriamo ora l'operatore lineare

$$P : \mathcal{G}(T) \mapsto \mathcal{D}_T, (x_n, Tx) \rightarrow x$$

P è un operatore tra due spazi di Banach, limitato e biiettivo, donde segue che P^{-1} è pure esso limitato (teorema dell'inverso limitato); allora l'applicazione $P^{-1} : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{G}(T), x \rightarrow (x_1, Tx)$ ammette una costante $\alpha > 0$ tale che $\|P^{-1}(x)\| \leq \alpha \|x\|$, ma $P^{-1}(x) = (x, Tx)$, e quindi

$$\|Tx\| \leq \|(x, Tx)\| \leq \alpha \|x\|$$

Pertanto T è limitato. □

Come conseguenza di questo teorema e del teorema 12.2.4 osserviamo che in uno spazio di Banach bastano due qualsiasi delle tre proprietà:

1. T chiuso
2. T limitato
3. \mathcal{D}_T chiuso

affinché valga pure la terza rimanente proprietà.

Definizione 12.2.6 *Un operatore lineare $T : \mathcal{D}_T \rightarrow X$ è detto chiudibile sse esiste una estensione lineare T_1 di T che è un operatore chiuso.*

Un'estensione chiusa \bar{T} di un operatore T chiudibile si dice minima sse ogni altra estensione chiusa T_1 di T è un'estensione di \bar{T} .

La minima estensione chiusa di \bar{T} di T , se esiste, si chiama chiusura di T .

Proposizione 12.2.7 *Se la chiusura \bar{T} di un operatore T esiste allora è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista, oltre a \bar{T} , una minima estensione \bar{T}' di T . Allora valgono $\bar{T} \leq \bar{T}'$ e $\bar{T}' \leq \bar{T}$; cioè $\bar{T} = \bar{T}'$. \square

12.3 Operatori chiusi in spazi di Hilbert

Applichiamo ora i risultati così ottenuti al caso di uno spazio di Hilbert.

Proposizione 12.3.1 *Se T è un operatore densamente definito nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , allora introdotto l'operatore*

$$U : \mathcal{H}^2 \mapsto \mathcal{H}^2, (x, y) \rightarrow U(x, y) = (y, -x).$$

si ha

$$\mathcal{G}(T^*) = [U(\mathcal{G}(T))]^\perp$$

Dimostrazione. (a) Supponiamo che $x \in \mathcal{D}_{T^*}$ con $(x, T^*x) \in \mathcal{G}(T^*)$, allora per ogni $x \in \mathcal{D}_T$ si ha $\langle Ty|x \rangle = \langle y|T^*x \rangle$; questa uguaglianza equivale a

$$\langle U(y, Ty)|(x, T^*y) \rangle = 0 \quad \text{per ogni } (y, Ty) \in \mathcal{G}(T)$$

$$\text{ovvero } (x, T^*x) \in [U(\mathcal{G}(T))]^\perp.$$

(b) Supponiamo che $(x, y) \in [U(\mathcal{G}(T))]^\perp$, allora $\langle (x, y)|\mathcal{V}(z, Tz) \rangle = 0$ per ogni $z \in \mathcal{D}_T$, cioè $\langle Tz|x \rangle = \langle z|y \rangle$ per ogni $z \in \mathcal{D}_T$ concludendo che $(x, T^*x) = (x, y) \in \mathcal{G}(T^*)$. \square

Proposizione 12.3.2 *Per ogni sottospazio \mathcal{D} dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ si ha*

$$U(\mathcal{D}^\perp) = [U(\mathcal{D})]^\perp$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} U(\mathcal{D}^\perp) &= \left\{ (x, y) \in \mathcal{H}^2 : (x, y) = (v, -w) \text{ con } (w, v) \in \mathcal{D}^\perp \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathcal{H}^2 : \langle x|t \rangle = \langle y|z \rangle, \forall (z, t) \in \mathcal{D} \right\} \\ [U(\mathcal{D})]^\perp &= \left\{ (x, y) \in \mathcal{H}^2 : \langle (x, y)|U(z, t) \rangle = 0, \forall (z, t) \in \mathcal{D} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathcal{H}^2 : \langle x|t \rangle - \langle y|z \rangle = 0, \forall (z, t) \in \mathcal{D} \right\}. \end{aligned}$$

□

Teorema 12.3.3 *Se T é un operatore chiuso densamente definito in \mathcal{H} :*

- (a) T^* é densamente definito in \mathcal{H} .
 (b) $T^{**} = T$.

Dimostrazione. (a) Se T é chiuso, per il teorema 12.2.4, il suo grafo $\mathcal{G}(T)$ é un sottospazio dello spazio di Hilbert di \mathcal{H}^2 ; allora, utilizzando la proposizion 12.3.2 otteniamo

$$U(\mathcal{G}(T)) = \mathcal{G}(T^*)^\perp. \quad (1)$$

Se $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} \neq \mathcal{H}$, esiste $y_0 \in \mathcal{D}_{T^*}^\perp$, con $y_0 \neq \underline{0}$. Allora

$$\langle y_0|y \rangle = 0 \text{ per ogni } y \in \mathcal{D}_{T^*}.$$

La coppia $(y_0, \underline{0}) \in \mathcal{G}(T^*)^\perp$, infatti

$$\langle (y_0, \underline{0})|(y, T^*y) \rangle = \langle y_0|y \rangle + \langle \underline{0}|T^*y \rangle = 0.$$

Allora, per la relazione (1), $(y_0, \underline{0}) \in U(\mathcal{G}(T))$, ovvero esiste $x \in \mathcal{D}_T$ tale che $U(x, Tx) = (y_0, \underline{0}) = (Tx_0, x_0)$, cioè $x_0 = \underline{0}$ e $Tx_0 = T\underline{0} = y_0 \neq \underline{0}$.

- (b) Siccome T^* é densamente definito, esiste un unico T^{**} . Per la proposizione 12.3.2 si ha

$$\mathcal{G}(T^{**}) = [U(\mathcal{G}(T^*))]^\perp = \left[U([U(\mathcal{G}(T))^\perp]^\perp) \right]^\perp.$$

Possiamo utilizzare il lemma 12.2.2 perché $U(\mathcal{G}(T))$ é un sottospazio, in quanto $\mathcal{G}(T)$ é un sottoinsieme chiuso essendo T un operatore chiuso. Allora otteniamo:

$$\mathcal{G}(T^{**}) = \mathcal{V}\left(\mathcal{V}(\mathcal{G}(T))\right) = -\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}(T)$$

da $T \leq T^{**}$ e $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T^{**}}$ ricaviamo $T = T^{**}$.

□

In virtù del teorema 12.3.3 é vera la

Proposizione 12.3.4 *Un operatore lineare $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{H}$ densamente definito è chiuso se e solo se $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$ e $T = T^{**}$.*

Teorema 12.3.5 *Un operatore lineare $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{H}$, densamente definito in \mathcal{H} , ammette un'estensione chiusa se e soltanto se $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$.*

Dimostrazione. (a) Se $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$, allora esiste T^{**} che soddisfa la relazione $T \leq T^{**}$. L'operatore T^{**} è chiuso per il teorema 12.3.3.

(b) Se T ammette un'estensione chiusa T_1 , per il teorema 12.3.5, $\overline{\mathcal{D}_{T_1^*}} = \mathcal{H}$. D'altra parte $T \leq T_1$ implica $T_1^* \leq T^*$ e perciò $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}_{T_1^*}} \subseteq \overline{\mathcal{D}_{T^*}}$. \square

Teorema 12.3.6 *Se $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{H}$ è densamente definito e in più $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$, allora T ammette chiusura \overline{T} e si ha $\overline{T} = T^{**}$.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che T^{**} è la minima estensione chiusa di T . Supponiamo che T_1 sia un'estensione chiusa di T . Allora T_1 è densamente definito e chiuso; per il teorema 12.3.5 $\overline{\mathcal{D}_{T_1^*}} = \mathcal{H}$ e $T_1 = T_1^{**}$. Allora abbiamo che $T \leq T_1$ implica $T_1^* \leq T^*$ e perciò $\overline{\mathcal{D}_{T_1^*}} = \mathcal{H}$ e $T^{**} \leq T_1^*$. \square

Teorema 12.3.7 *Se T è chiuso e $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$, allora T è limitato e T^* è limitato.*

Dimostrazione. Per il teorema del grafo chiuso T è limitato. Un operatore limitato su \mathcal{H} ammette un aggiunto T^* , pure esso limitato. \square

Corollario 12.3.8 *Se $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{H}$ è chiuso, iniettivo e suriettivo allora T^{-1} è limitato.*

Dimostrazione. L'operatore $T^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è chiuso e \mathcal{H} è chiuso. Allora T^{-1} è limitato. \square

Teorema 12.3.9 *Se $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{H}$ è un operatore simmetrico, la sua chiusura esiste ed è $\overline{T} = T^{**}$.*

Dimostrazione. Se T è simmetrico, ammette un aggiunto T^* che è un'estensione di T stesso: $T \leq T^*$. Allora $\overline{\mathcal{D}_{T^*}} = \mathcal{H}$. Per il teorema 12.3.7 abbiamo $\overline{T} = T^{**}$. \square

Corollario 12.3.10 *La chiusura $\overline{T} = T^{**}$ di un operatore simmetrico è un operatore simmetrico.*

Teorema 12.3.11 *Un operatore T autoaggiunto definito su tutto \mathcal{H} è limitato.*

Dimostrazione. Se $T = T^*$ allora T è chiuso. Pertanto $\mathcal{D}_T = \mathcal{H}$ e quindi \mathcal{D}_T è chiuso in \mathcal{H} ; ora basta applicare il teorema del grafo chiuso 12.2.4 per ottenere la tesi. \square

Teorema 12.3.12 *Sia T un operatore simmetrico, allora $T \leq T^{**} \leq T^*$ con T^{**} chiuso.*

Capitolo 13

Operatori differenziali al secondo ordine

13.1 Operatori differenziali formalmente autoaggiunti

In questo paragrafo ci occuperemo dell'operatore differenziale alle derivate totali del secondo ordine

$$(13.1) \quad L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$$

con a_0, a_1, a_2 funzioni a valori reali definite su di un intervallo, limitato o non, $[\alpha, \beta]$ dell'asse reale e in particolare studieremo l'equazione agli autovalori

$$(13.2) \quad Ly = \lambda y$$

altrimenti scritta

$$(13.3a) \quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y$$

ovvero

$$(13.3b) \quad a_0(x)y'' + a_1(x)y' + [a_2(x) - \lambda]y = 0$$

che è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine dipendente dal parametro λ . In questo contesto l'operatore differenziale (13.1) è un *operatore "formale"* nel senso che non è esplicitato il dominio di definizione su cui esso agisce, riservandoci di volta in volta di precisarlo a seconda del particolare problema che dovremo affrontare.

Osservazione 13.1.1 Il dominio di definizione $\mathcal{D}(L)$ dell'operatore L , anche se non esplicitato, risulta comunque sottoposto al vincolo che le funzioni ad esso appartenenti, dovendo soddisfare la (13.3b) in ogni punto dell'intervallo $[\alpha, \beta]$, necessariamente debbono essere differenziabili due volte sull'intero intervallo; questa richiesta implica che tali funzioni sono per lo meno di classe $C^1([\alpha, \beta])$.

Pertanto, il dominio di definizione deve essere contenuto nello spazio lineare delle funzioni doppiamente differenziabili su $[\alpha, \beta]$. D'ora in avanti noi supporremo che $\mathcal{D}(L)$ sia in effetti una varietà lineare in tale spazio.

Esempio 13.1.2 Se $a_0 \neq 0$ e $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$ allora necessariamente $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{C}^2([\alpha, \beta])$. Questo risultato è immediata conseguenza di quanto detto nella precedente osservazione e della

$$y'' = -\frac{a_1(x)y' + [a_2(x) - \lambda]y}{a_0(x)} \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$$

In particolare ciò accade quando si ha a che fare con un operatore differenziale (13.1) a coefficienti costanti. ■

Ricordiamo che un autovalore dell'operatore L si dice *non degenero* se l'autospazio ad esso associato ha dimensione 1; in tutti gli altri casi l'autovalore si chiama *degenero*.

Noi saremo particolarmente interessati al caso in cui L è un operatore formale definito in una varietà lineare, in generale non esplicitata, dello spazio di Hilbert $\mathcal{L}_2([\alpha, \beta])$. In prima approssimazione tale varietà lineare potrà anche essere ritenuta non densa in $L_2([\alpha, \beta])$,

A questo proposito introdurremo ora uno spazio di Hilbert che sarà particolarmente utile nello studio dell'operatore differenziale formale L definito dalla (13.1). Una funzione $w : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}$ si dirà *funzione "peso"* per $L_2([\alpha, \beta])$ se soddisfa le condizioni

(p-i) $w(x) > 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$;

(p-ii) $w \in \mathcal{C}^1(\alpha, \beta)$;

(p-iii) esistono, finiti o infiniti, i limiti $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} w(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \beta^-} w(x)$;

(p-iv) $w \cdot f \in L_2([\alpha, \beta])$ per ogni $f \in L_2([\alpha, \beta])$.

Osservazione 13.1.3 Si noti che anche nel caso di un intervallo limitato $[a, b]$ non è richiesto che la funzione peso sia definita sugli estremi dell'intervallo stesso. Se però esistono finiti i limiti richiesti dalla (p-iii) allora si estende la funzione w per continuità sull'intero $[a, b]$ ponendo $w(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} w(x)$ e $w(b) := \lim_{x \rightarrow b^-} w(x)$.

Esempio 13.1.4 Una funzione peso per l'intervallo limitato $[-1, 1]$, ove p, q sono due costanti reali non negative, è la seguente

$$w(x) = (1-x)^p(1+x)^q$$

Infatti, $w(x)$ è strettamente positiva e continua nell'intervallo aperto $(-1, 1)$. Per $p > 0$ e $q > 0$ esistono i limiti $\lim_{x \rightarrow -1^+} (1-x)^p(1+x)^q = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1-x)^p(1+x)^q = 0$ e quindi in questi casi si può estendere per continuità la funzione $w(x)$ ponendo $w(-1) = w(1) = 0$; per $p = q = 0$ la funzione peso è la funzione $w(x) = 1$, per ogni $x \in (-1, 1)$, e anche in questo caso la si può estendere per continuità ponendo $w(-1) = w(1) = 1$. Infine, in tutti gli altri casi i limiti in esame divergono a $+\infty$.

Per $p \geq 0$ e $q \geq 0$ le funzioni (estese) $w(x)$ sono continue sul compatto $[-1, 1]$ e quindi soddisfano immediatamente la condizione (p-iv). ■

Esercizio 13.1.5 Determina per esercizio i casi $p, q < 0$ per cui è soddisfatta la condizione (p-iv).

Proposizione 13.1.6 Se w è una funzione peso per $L_2[\alpha, \beta]$ allora $w^{\frac{1}{2n}}$, ($n = 1, 2, \dots$), è una funzione peso per il medesimo spazio.

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione per il solo caso di $w^{\frac{1}{2}}$; la validità per ogni n si prova per induzione. Ovviamente, dalle condizioni (p-i) e (p-ii) che definiscono una funzione peso si ha che $w^{\frac{1}{2}} > 0$ e $w^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}^1$. Se esistono finiti i $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} w(x)$ e $\lim_{x \rightarrow \beta^-} w(x)$ allora esistono anche i $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} w(x)^{\frac{1}{2}}$ e $\lim_{x \rightarrow \beta^-} w(x)^{\frac{1}{2}}$. Infine, dalla continuità della funzione $w^{\frac{1}{2}}$ segue che anche $w^{\frac{1}{2}} \cdot f$ è misurabile secondo Lebesgue per ogni f misurabile secondo Lebesgue. Infine, se $f \in L_2$ allora, per la proprietà (p-iv) delle funzioni peso, anche $w \cdot \bar{f} \in \mathcal{L}_2$ per cui

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\sqrt{w} \cdot f|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (w \cdot f) \cdot \bar{f} = \langle f | w \cdot f \rangle < \infty$$

Pertanto per ogni $f \in L_2[\alpha, \beta]$ anche $\sqrt{w}f \in L_2[\alpha, \beta]$ □

Se w è una funzione peso per lo spazio di Hilbert $L_2[\alpha, \beta]$, indicheremo con $L_2[\alpha, \beta]_w$ l'insieme di tutte le funzioni $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ misurabili secondo Lebesgue e tali che

$$\int_{\alpha}^{\beta} w |f|^2 < \infty$$

Sotto queste condizioni è immediato verificare la seguente

Proposizione 13.1.7 *Se w è una funzione peso per $L_2[\alpha, \beta]$ allora*

$$\langle f | g \rangle_w := \int_{\alpha}^{\beta} w \bar{f} g$$

è un prodotto interno su $L_2([\alpha, \beta])_w$.

In particolare si ha che valgono le relazioni:

$$(13.4) \quad \langle f | g \rangle_w = \langle \sqrt{w}f | \sqrt{w}g \rangle$$

$$(13.5) \quad \|f\|_w = \|\sqrt{w}f\|.$$

Proposizione 13.1.8 *La seguenti equivalenze logiche sono vere:*

$$(i) \quad f \in \mathcal{L}_{2_w} \quad \text{sse} \quad \sqrt{w}f \in \mathcal{L}_2$$

$$(ii) \quad g \in \mathcal{L}_2 \quad \text{sse} \quad \frac{g}{\sqrt{w}} \in \mathcal{L}_{2_w}$$

Dimostrazione. Banali conseguenze delle uguaglianze

$$\int_{\alpha}^{\beta} w |f|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |\sqrt{w}f|^2$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |g| = \int_{\alpha}^{\beta} w \left| \frac{g}{\sqrt{w}} \right|^2$$

□

Dalla (i) di quest'ultima proposizione 13.1.8 segue che

Proposizione 13.1.9 *l'operatore lineare*

$$U_w : L_2[\alpha, \beta]_w \rightarrow L_2[\alpha, \beta]$$

definito da

$$U_w(f) = \sqrt{w}f$$

è ben posto e unitario.

Dimostrazione. Dalla (13.5) si ha che questo operatore è isometrico. Esso in effetti è unitario in quanto la suriettività dell'operatore U_w è conseguenza del fatto che per ogni $g \in L_2[\alpha, \beta]$ la funzione g/\sqrt{w} appartiene allo spazio $L_2[\alpha, \beta]_w$ in virtù delle (ii), proposizione 13.1.8, e che $U_w(\frac{g}{\sqrt{w}}) = g$.

Come conseguenza di questo risultato abbiamo che pure $L_2[\alpha, \beta]_w$, che a volte indicheremo più semplicemente con $(L_2)_w$, è uno spazio di Hilbert. \square

Inoltre, grazie alla unitarietà dell'operatore U_w , si ha il seguente risultato

Corollario 13.1.10 $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un *sonc* in $L_2[\alpha, \beta]$ sse $\{\sqrt{w}u_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un *sonc* in $L_2[\alpha, \beta]_w$.

Osservazione 13.1.11 Da quanto ora visto, se w è una funzione peso per $L_2[\alpha, \beta]$ allora gli spazi di Hilbert $L_2[\alpha, \beta]$ e $L_2[\alpha, \beta]_w$ sono unitariamente equivalenti tramite l'operatore U_w , e quindi identificabili come spazi con prodotto interno.

Ovviamente, questa identificazione non significa che $L_2[\alpha, \beta]$ e $L_2[\alpha, \beta]_w$ siano identici come insiemi.

Esempio 13.1.12 Nello spazio di Hilbert $L_2(-\infty, \infty)$ la funzione $w_H(x) := e^{-\frac{1}{2}x^2}$ è una funzione peso. Si osservi che la famiglia libera delle funzioni $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ appartiene a $L_2(-\infty, \infty)_{w_H}$ ma non appartiene a $L_2(-\infty, \infty)$. \blacksquare

Esempio 13.1.13 Analogamente, nello spazio di Hilbert $L_2(0, \infty)$ la funzione $w_L(x) := e^{-\frac{1}{2}x}$ è una funzione peso rispetto alla quale la famiglia libera delle funzioni $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ appartengono a $L_2(0, \infty)_{w_L}$, ma non a $L_2(0, \infty)$. \blacksquare

In generale, nei problemi di Fisica Matematica e di Meccanica Quantistica, i valori del parametro λ nella (13.2) (o nelle (13.3a) o (13.3b)) vengono interpretati come risultati numerici della osservazione di una qualche grandezza fisica e perciò si richiede che essi siano espressi da numeri reali. Se in più si vuole che le eventuali soluzioni della (13.2) siano vettori dello spazio di Hilbert $L_2([\alpha, \beta])_w$ rispetto ad una funzione peso w , ossia che L sia un operatore opportunamente definito su di una varietà lineare in $L_2([\alpha, \beta])_w$, il requisito che gli autovalori siano reali è soddisfatto nel caso in cui L sia un operatore *formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso w* , ossia sia tale da soddisfare la condizione

$$(13.6) \quad \langle L\psi | \varphi \rangle_w = \langle \psi | L\varphi \rangle_w \quad \text{per ogni } \psi, \varphi \in \mathcal{D}(L)$$

Infatti, verifichiamo a questo proposito che vale il seguente importante risultato.

Teorema 13.1.14 *Se l'operatore differenziale L con dominio di definizione formale $\mathcal{D}(L)$ è formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso w allora tutti i suoi autovalori sono reali. Inoltre, ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali.*

Dimostrazione. Infatti, $\lambda \in \sigma_p(L)$ implica che esiste $f_\lambda \in \mathcal{D}(L)$, con $f_\lambda \neq \underline{0}$, per cui si ha $Lf_\lambda = \lambda f_\lambda$. Da ciò segue

$$\begin{aligned}\langle Lf_\lambda | f_\lambda \rangle_w &= \bar{\lambda} \|f_\lambda\|_w^2 \\ \langle f_\lambda | Lf_\lambda \rangle_w &= \lambda \|f_\lambda\|_w^2\end{aligned}$$

Ma essendo L formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso w avremo che in particolare $\langle Lf_\lambda | f_\lambda \rangle_w = \langle f_\lambda | Lf_\lambda \rangle_w$ da cui, la condizione $f \neq \underline{0}$ impone che $\lambda = \bar{\lambda}$.

Siano ora λ_1 e λ_2 due autovalori distinti e $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(L)$ tali che $Lf_1 = \lambda_1 f_1$ e $Lf_2 = \lambda_2 f_2$. Allora da $\langle Lf_1 | f_2 \rangle = \langle f_1 | Lf_2 \rangle$ segue che $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle f_1 | f_2 \rangle$, da cui $\langle f_1 | f_2 \rangle = \underline{0}$. \square

Teorema 13.1.15 *Sotto le ipotesi che $a_0, a_1 \in C^1$, l'operatore differenziale L è formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso w su un dominio di definizione $\mathcal{D}(L) \subseteq C^2 \cap (L_2)_w$ non esplicitato sse le seguenti condizioni sono soddisfatte :*

- (i) $(w(x)a_0(x))' = w(x)a_1(x)$;
- (ii) per ogni coppia di vettori $f, g \in \mathcal{D}(L)$ si ha

$$\left[w(x)a_0(x) \left(\bar{f}(x)g'(x) - g(x)\bar{f}'(x) \right) \right]_\alpha^\beta = 0.$$

In questo caso se $\frac{a_1}{a_0} \in L_1$ oppure $\frac{a_0' - a_1}{a_0} \in L_1$ allora necessariamente

$$w(x) = \frac{c}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} = c e^{-\int \frac{a_0'(x) - a_1(x)}{a_0(x)} dx}.$$

Dimostrazione. Consideriamo

$$\begin{aligned}\langle f | Lg \rangle_w &= \int \bar{f}w(a_0g'' + a_1g' + a_2g) \\ &= \int \bar{f}wa_0g'' + \int \bar{f}wa_1g' + \int \bar{f}wa_2g\end{aligned}\quad (1)$$

Integrando per parti i due primi integrali otteniamo

$$\begin{aligned}\langle f | Lg \rangle_w &= [\bar{f}wa_0g']_\alpha^\beta - \int [(wa_0)' \bar{f} + (wa_0)\bar{f}'] g' + [\bar{f}wa_1g]_\alpha^\beta \\ &\quad - \int [(wa_1)' \bar{f} + (wa_1)\bar{f}'] g + \int \bar{f}wa_2g\end{aligned}\quad (2)$$

Essendo $\langle Lf | g \rangle_w = \overline{\langle g | Lf \rangle_w} = \int gw(a_0\bar{f}'' + a_1\bar{f}' + a_2\bar{f})$, dal confronto di quest'ultima colla (1) e tenuto conto che a_0, a_1, a_2 sono a valori reali, si ha che $\langle Lf | g \rangle_w$ si può ottenere dalla (2) scambiando i ruoli di g e di \bar{f} . Pertanto

$$\begin{aligned}\langle Lf | g \rangle_w &= [gwa_0\bar{f}']_\alpha^\beta - \int [(wa_0)'g + (wa_0)g']\bar{f}' + [gwa_1\bar{f}]_\alpha^\beta \\ &\quad - \int [(wa_1)'g + (wa_1)g']\bar{f} + \int gwa_2\bar{f}\end{aligned}\quad (3)$$

Dalla (2) e (3) segue che

$$\begin{aligned} \langle f|Lg\rangle_w - \langle Lf|g\rangle_w &= \left[wa_0(\bar{f}g' - g\bar{f}') \right]_\alpha^\beta - \int (wa_0)'(\bar{f}g' - g\bar{f}') \\ &\quad - \int (wa_1)(\bar{f}'g - g'\bar{f}) \\ &= \left[wa_0(\bar{f}g' - g\bar{f}') \right]_\alpha^\beta - \int [(wa_0)' - wa_1](\bar{f}g' - g\bar{f}') \end{aligned}$$

Pertanto la condizione $\langle f|Lg\rangle_w - \langle Lf|g\rangle_w = 0$ implica le due condizioni (i) e (ii) della tesi e viceversa.

In particolare dalla condizioni (i) otteniamo

$$\frac{d(w(x)a_0(x))}{w(x)a_0(x)} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx$$

e quindi

$$\log(w(x)a_0(x)) = \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx + \log(c)$$

e ciò implica

$$w(x) = \frac{c}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

D'altra parte sempre dalla (i) si ottiene anche

$$w'a_0 + wa'_0 - wa_1 = 0$$

ovvero

$$w'a_0 = w(a_1 - a_0)$$

e quindi

$$\frac{dw}{w} = -\frac{a_0 - a_1}{a_0} dx.$$

che conduce al risultato voluto. \square

Osservazione 13.1.16 Dal teorema precedente si ha che se l'operatore

$$L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$$

deve essere formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso w allora necessariamente la funzione w è soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine.

$$(w(x)a_0(x))' = w(x)a_1(x)$$

Questa equazione differenziale dipende esclusivamente dalla forma dell'operatore L e da nessun'altra condizione, per cui una volta assegnato l'operatore L è univocamente assegnata l'equazione differenziale (i) cui deve soddisfare la funzione peso.

Dato l'operatore formale

$$L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$$

soddisfacente le condizioni che $a_0, a_1 \in C^1$, questa osservazione suggerisce di procedere nel seguente modo

1) Si considera l'equazione differenziale nell'incognita w :

$$(i) \quad (w(x)a_0(x))' = w(x)a_1(x)$$

Questa equazione differenziale non è detto che ammetta soluzione in quanto l'ammettere o meno soluzione dipende dal comportamento delle funzioni a_0 e a_1 .

Nel caso in cui queste funzioni siano tali che l'equazione differenziale (i) sia risolubile, non è detto in generale che la soluzione w ottenuta soddisfi a tutte le condizioni che la qualificano come funzione peso.

Se però la funzione w soluzione della equazione differenziale (i) è una funzione peso diremo che *l'operatore L ammette funzione peso*.

2) Si tratta ora di individuare un dominio di definizione $\mathcal{D}(L)$ per l'operatore L , con $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{C}^2 \cap (L_2)_w$, in modo tale che per ogni coppia di funzione f, g appartenenti a $\mathcal{D}(L)$ sia soddisfatta la *condizione al contorno*

$$(ii) \quad \left[w(x)a_0(x) \left(\bar{f}(x)g'(x) - g(x)\bar{f}'(x) \right) \right]_{\alpha}^{\beta} = 0$$

Osservazione 13.1.17 Quindi mentre la condizione (i) è rigidamente vincolata dalla forma dell'operatore L , il dominio $\mathcal{D}(L)$ presenta una maggior elasticità di scelta.

Ricordando la definizione di *Wronskiano* di due funzioni

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ g(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

potremo mettere la (ii) nella forma equivalente

$$(ii - a) \quad [w(x)a_0(x)W(\bar{f}, g)(x)]_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{D}(L)$$

Proposizione 13.1.18 *Se l'operatore differenziale L è formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso w , vale l'uguaglianza*

$$(13.7) \quad wL = \frac{d}{dx} \left(w(x)a_0(x) \frac{d}{dx} \right) + w(x)a_2(x)$$

Dimostrazione. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(w(x)a_0(x) \frac{d}{dx} \right) w(x)a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} (w(x)a_0(x)) \frac{d}{dx} &= \\ &= w(x) \left[a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} \right] \end{aligned}$$

ove nell'ultima uguaglianza si è utilizzata la (i) teorema 13.1.15. □

Esempio 13.1.19 *Caso $[a, b]$ compatto e funzione peso $w(x) = 1$.*

In questo esempio considereremo l'operatore differenziale formale L definito dalla (13.1), relativamente ad un intervallo compatto $[a, b]$ dell'asse reale, senza esplicitare la forma concreta delle funzioni a_0, a_1, a_2 che ne formano i coefficienti. Supporremo soltanto che queste funzioni siano tali che la soluzione della equazione differenziale (i) fornisca come funzione peso la funzione identicamente 1 su $[a, b]$. In questo caso la

(13.7), che è immediata conseguenza della (i), impone che l'operatore differenziale L abbia la forma

$$(13.8) \quad L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a'_0(x) \frac{d}{dx} + a_2(x) = \frac{d}{dx} \left(a_0(x) \frac{d}{dx} \right) + a_2(x)$$

A sua volta, la condizione (ii) impone che il dominio di definizione dell'operatore differenziale L deve essere tale che per ogni coppia di vettori f, g appartenente ad esso valga la relazione

$$a_0(a)W(\bar{f}, g)(a) = a_0(b)W(\bar{f}, g)(b)$$

Quest'ultima condizione include come casi particolari:

(I) *Le condizioni al contorno separate*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{con } \alpha_1 \beta_2 \neq \alpha_2 \beta_1.$$

(II) *Le condizioni al contorno periodiche*

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$$

Pertanto, sotto queste condizioni l'operatore differenziale L è formalmente autoaggiunto rispetto al naturale prodotto interno di $L_2[a, b]$ e tutti i suoi autovalori sono reali.

Nella teoria delle vibrazioni delle corde elastiche vengono usate delle condizioni al contorno separate ulteriormente particolarizzate.

Per esempio

$$\begin{array}{lll} \text{(I-1)} & y(a) = 0 & \text{e } y(b) = 0 & \text{(corda con estremi fissati)} \\ \text{(I-2)} & y'(a) = 0 & \text{e } y'(b) = 0 & \text{(estremi liberi)} \\ \text{(I-3)} & h_0 y(a) = y'(a) & \text{e } -h_1 y(b) = y'(b) & \text{(estremi fissati elasticamente).} \end{array}$$

Proposizione 13.1.20 *Nel caso delle condizioni al contorno separate vale l'importante risultato che tutti gli autovalori sono non degeneri.*

Dimostrazione. Siano y_0 e y due autovettori non nulli corrispondenti all'autovalore λ . Entrambi questi vettori debbono soddisfare le condizioni al contorno separate; in particolare nel punto a:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_0(a) + \alpha_2 y'_0(a) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) = 0 \end{cases}$$

poichè la condizione $\alpha_1 \beta_2 \neq \alpha_2 \beta_1$ impone che uno dei due numeri α_1, α_2 sia diverso da zero, il precedente sistema deve soddisfare la condizione

$$0 = \begin{vmatrix} y_0(a) & y'_0(a) \\ y(a) & y'(a) \end{vmatrix} = W(y_0, y)(a)$$

Poichè y_0 e y sono due soluzioni della equazione differenziale $Ly = \lambda y$ avremo che il Wronskiano si manterrà nullo in ogni altro punto di $[a, b]$ e quindi y_0 e y sono linearmente indipendenti. \square

■

13.2 Esempi. L'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ con condizioni al contorno

In questo esempio vogliamo studiare il problema degli autovalori per l'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ sotto opportune condizioni al contorno che ne assicurano l'autoaggiuntezza formale.

Prescindendo dallo specificare queste condizioni al contorno, si tratterà di risolvere la seguente equazione agli autovalori

$$(13.9a) \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)y = \lambda y$$

essendo $y \in \mathcal{D}(l) \subseteq \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$, $[a, b]$ un intervallo compatto di \mathbb{R} e $\lambda \in \mathbb{C}$.

La precedente equazione agli autovalori diviene

$$(13.9b) \quad y'' + \lambda y = 0$$

il cui integrale generale è espresso da

$$(13.10) \quad y(x) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

Però, come abbiamo osservato, ci interessa risolvere la equazione agli autovalori (13.9a), ovvero l'equazione differenziale (13.9b), sotto opportune condizioni al contorno che assicurino che l'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ sia formalmente autoaggiunto rispetto ad una funzione peso. Come abbiamo visto nel teorema 13.1.15 del precedente paragrafo, le funzioni peso sono determinate dalla forma dell'operatore differenziale in esame in quanto debbono soddisfare l'equazione differenziale (i). Nel nostro caso particolare, questa equazione differenziale assume la forma $(-w)' = 0$, che ammette come soluzione generale la funzione $w(x) = c$, con c costante arbitraria. Si osservi che la funzione $w(x) = c$ è una funzione peso sse $c > 0$. Noi considereremo il caso della funzione peso $w(x) = 1$.

Per quanto abbiamo visto nell'esempio 13.1.19 vi sono due casi particolari di condizioni al contorno che assicurano l'autoaggiuntezza formale dell'operatore differenziale in esame: le condizioni separate e quelle periodiche. Noi studieremo i seguenti due casi particolari

$$(I) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$$

Si noti che lo studio dell'equazione differenziale (13.9b) con le condizioni al contorno (I) equivale allo studio dell'equazione agli autovalori (13.9a) per l'operatore differenziale $\left(-\frac{d^2}{dx^2}, \mathcal{D}(l)_I\right)$, essendo $\mathcal{D}(l)_I$ il dominio di definizioni dell'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ definito da

$$\mathcal{D}(l)_I := \{\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$$

Analogamente per l'equazione differenziale con condizioni al contorno (II) si tratta di prendere in esame l'operatore differenziale $\left(-\frac{d^2}{dx^2}, \mathcal{D}(l)_{II}\right)$ definito su

$$\mathcal{D}(l)_{II} = \{\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b), \varphi'(a) = \varphi'(b)\}$$

Analizziamo ora i due casi separatamente

Caso I: $y(a) = y(b) = 0$.

In questo caso si considera l'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ definito su

$$(l)_I = \left\{ \varphi \in C^2([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \right\}$$

e vogliamo dimostrare che esso

- (i) è densamente definito in $L_2([a, b])$;
- (ii) è lineare non limitato simmetrico;
- (iii) ammette la seguente successione di autovalori non degeneri

$$\left\{ \lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} : n = 1, 2, \dots \right\}$$

- (iv) gli autovettori corrispondenti sono

$$\left\{ \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right) : n = 1, 2, \dots \right\}$$

- (v) e costituiscono un sonc in $L_2([a, b])$.

Per dimostrare ciò teniamo presente che dobbiamo risolvere il seguente problema: individuare $\lambda \in \mathbb{R}$ e $y \in C^2([a, b], \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tali da

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

Imponendo alla soluzione generale (13.10) le condizioni al contorno richieste avremo che

$$\begin{cases} C_1 e^{i\sqrt{\lambda}b} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}b} = 0 \\ C_1 e^{i\sqrt{\lambda}a} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}a} = 0. \end{cases}$$

Se la funzione (13.10) deve essere un autovettore corrispondente all'autovalore λ , non potrà essere $C_1 = C_2 = 0$ e ciò è possibile sse

$$0 = \begin{vmatrix} e^{i\sqrt{\lambda}b} & e^{-i\sqrt{\lambda}b} \\ e^{i\sqrt{\lambda}a} & e^{-i\sqrt{\lambda}a} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}(b-a)} - e^{-i\sqrt{\lambda}(b-a)} = 2i \sin \sqrt{\lambda}(b-a)$$

Pertanto il problema agli autovalori è soddisfatto per

$$\sin \sqrt{\lambda}(b-a) = 0$$

ossia per tutti i valori di λ espressi dalla relazione

$$\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

col che si è dimostrata la (iii). Vediamo ora di individuare gli autovettori corrispondenti, imponendo alla (13.10) la condizione $y_n(a) = 0$. Si ha che

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{e^{-i\sqrt{\lambda_n}a}}{e^{+i\sqrt{\lambda_n}a}}$$

da cui possiamo porre

$$C_1 = C_n e^{-i\sqrt{\lambda_n}a} \quad \text{e} \quad C_2 = -C_n e^{i\sqrt{\lambda_n}a}$$

essendo $C_n \in \mathbb{C}$ una costante opportuna, e perciò l'autovettore associato all'autovalore λ_n è espresso da

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= C_n \left(e^{i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} - e^{-i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} \right) = \\ &= C_n 2i \sin \sqrt{\lambda_n}(x-a) = \\ &= K_n \sin \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \end{aligned}$$

ove K_n è una opportuna costante arbitraria. Il sistema di vettori

$$\left\{ \varphi_n(x) = K_n \sin \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right) : n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

di $\mathcal{D}(l)_I$ è ortonormale qualora si assuma $K_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$, come si può facilmente verificare. Inoltre abbiamo già visto nel capitolo 6.1 che questa famiglia di autovettori è un sonc in $L_2([a, b])$ per cui

$$\overline{\mathcal{D}(l)_I([a, b], \mathbb{C})} = L_2([a, b])$$

Caso II: $y(a) = y(b)$ e $y'(a) = y'(b)$

L'operatore $-\frac{d^2}{dx^2}$ definito su

$$\mathcal{D}(l)_{II} = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]) : \varphi(a) = \varphi(b), \varphi'(a) = \varphi'(b) \right\}$$

- (i) è densamente definito in $L_2([a, b])$
- (ii) è lineare non limitato e simmetrico
- (iii) ammette la seguente successione di autovalori

$$\left\{ \lambda_n = 4n^2 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} : n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

- (iv) se si esclude l'autovalore 0 ciascuno di questi autovalori è duplicemente degenere. Fissato l'autovalore $\lambda_n \neq 0$ il suo corrispondente autospazio possiede il sonc

$$(a) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \left(\frac{x-a}{b-a} \right)}, \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{-2\pi i n \left(\frac{x-a}{b-a} \right)} \right\}.$$

Oppure, alternativamente, il sonc

$$(b) \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \left[2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{(b-a)}} \sin \left[2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right] \right\}.$$

L'autovalore 0 non è degenero e ad esso corrisponde l'autovettore

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

(v) l'insieme degli autovettori di tipo (a) costituisce il sonc esponenziale in $L_2([a, b])$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a} \right)} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

mentre l'insieme degli autovettori di tipo (b) costituisce il sonc trigonometrico in $L_2([a, b])$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos 2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a} \right) : n = 1, 2, \dots \right\} \\ \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin 2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a} \right) : n = 1, 2, \dots \right\}$$

Esplicitando nella (2) le condizioni al contorno otteniamo:

$$\begin{cases} C_1 e^{i\sqrt{\lambda}a} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}a} = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}b} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}b} \\ C_1 e^{i\sqrt{\lambda}a} - C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}a} = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}b} - C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}b} \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} C_1 \left(e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{i\sqrt{\lambda}b} \right) + C_2 \left(e^{-i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}b} \right) = 0 \\ C_1 \left(e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{i\sqrt{\lambda}b} \right) - C_2 \left(e^{-i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}b} \right) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzione non banale sse non accade che $C_1 = C_2 = 0$, ovvero sse

$$\begin{aligned} & - \left(e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{i\sqrt{\lambda}b} \right) \left(e^{-i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}b} \right) - \\ & - \left(e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{i\sqrt{\lambda}b} \right) \left(e^{-i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}b} \right) = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\left(e^{i\sqrt{\lambda}a} - e^{i\sqrt{\lambda}b} \right) \left(e^{-i\sqrt{\lambda}a} - e^{-i\sqrt{\lambda}b} \right) = 0$$

ovvero

$$e^{i\sqrt{\lambda}(b-a)} - e^{-i\sqrt{\lambda}(b-a)} = 2$$

ottenendo infine

$$\cos \sqrt{\lambda}(b-a) = 1.$$

Pertanto, i valori possibili di λ che soddisfano le condizioni al contorno in esame sono espresse da

$$\sqrt{\lambda_n}(b-a) = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

da cui

$$\lambda_n = n^2 \frac{4\pi^2}{(b-a)^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Quindi, anche in questo caso gli autovalori formano una successione discreta, divergente a $+\infty$ per $n \rightarrow -\infty$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$\varphi_n(t) = C_1 e^{i\sqrt{\lambda_n}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda_n}t}$$

Ricordando il sonc esponenziale in $L_2([a, b])$ (vedi cap. 6.1) potremo modificare leggermente la forma degli autovettori φ_n ponendo $C_1 = \eta_1 e^{-i\sqrt{\lambda_n}a}$, $C_2 = \eta_2 e^{i\sqrt{\lambda_n}a}$ da cui otteniamo

$$\varphi_n(t) = \eta_1 e^{i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} + \eta_2 e^{-i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Vogliamo vedere se la famiglia di autovettori $\{\varphi_n\}$ è un sistema ortonormale per un'opportuna scelta di η_1, η_2 . A questo scopo consideriamo che per $m \neq n$ si ha che $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = 0$ mentre per $m = n$ si ha che

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle &= \int_a^b \left\{ \bar{\eta}_1 e^{-i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} + \bar{\eta}_2 e^{i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} \right\} \left\{ \eta_1 e^{i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} + \eta_2 e^{-i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} \right\} dx \\ &= \int_a^b (\bar{\eta}_1 \eta_1 + \bar{\eta}_2 \eta_2) dx + \int_a^b \bar{\eta}_1 \eta_2 e^{-2i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} dx + \int_a^b \bar{\eta}_2 \eta_1 e^{2i\sqrt{\lambda_n}(x-a)} dx \\ &= (b-a) (\bar{\eta}_1 \eta_1 - \bar{\eta}_2 \eta_2) \end{aligned}$$

Pertanto $\{\varphi_n\}$ è un sistema ortonormale di autovettori per una qualsiasi scelta η_1, η_2 soddisfacente la condizione

$$\bar{\eta}_1 \eta_1 - \bar{\eta}_2 \eta_2 = \frac{1}{b-a}$$

diamo qui sotto una tabella corrispondente a opportune scelte di η_1, η_2 .

η_1	η_2	$\varphi_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$
$\frac{1}{\sqrt{b-a}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)}$
0	$\frac{1}{\sqrt{b-a}}$	$\frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n \left(\frac{x-a}{b-a}\right)}$
$\frac{1}{\sqrt{b-a}}$	$\frac{1}{2\sqrt{b-a}}$	$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos 2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad (n \neq 0)$
$\frac{1}{\sqrt{b-a}}$	$\frac{1}{2i\sqrt{b-a}}$	$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin 2\pi n \left(\frac{x-a}{b-a}\right) \quad (n \neq 0)$

Capitolo 14

Problemi di Sturm–Liouville di tipo polinomiale

14.1 Problemi di Sturm–Liouville Polinomiali

Nella sezione precedente abbiamo visto quali condizioni debbono essere imposte affinché l'operatore differenziale L ammetta funzione peso rispetto alle quali risulti essere formalmente autoaggiunto, e quindi abbia autovalori reali. La ricerca di questi autovalori per l'operatore L così opportunamente definito corrisponde a quello che in letteratura viene chiamato *problema di Sturm–Liouville*.

Vogliamo ora vedere quali ulteriori condizioni devono essere imposte relativamente al cosiddetto *problema di Sturm–Liouville polinomiale*, ossia

quali condizioni bisogna imporre all'operatore differenziale L affinché, oltre a risultare formalmente autoaggiunto, la corrispondente equazione agli autovalori ammetta soluzioni che siano polinomi di grado qualsiasi.

Affronteremo questo problema in due passi successivi.

Primo passo

Nel primo passo analizzeremo alcune importanti conseguenze della sola condizione di autoaggiuntezza formale ((i) del teorema 13.1.14) dell'operatore differenziale formale

$$L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x), \quad a_0, a_1 \in \mathcal{C}^1$$

Dato l'operatore L , possiamo scrivere immediatamente l'equazione differenziale ad esso associata

(i)
$$(w(x)a_0(x))' = w(x)a_1(x)$$

Questa equazione differenziale può oppure no ammettere soluzione $w(x)$ che sia una funzione peso, e ciò dipende dal comportamento delle funzioni $a_0(x)$ e $a_1(x)$.

Definizione 14.1.1 Diremo che l'operatore differenziale formale L ammette funzione peso per problemi polinomiali sse esso ammette funzione peso soluzione della (i) e questa funzione peso soddisfa l'ulteriore condizione

$$(p - v) \quad x^n \in L_2([\alpha, \beta])_w, \text{ per ogni } n = 0, 1, \dots$$

Quanto richiesto sino ad ora riguarda la struttura intrinseca dell'operatore formale L ; una volta che questi è dato, e in particolare sono date le funzioni $a_0(x)$ e $a_1(x)$, non resta altro che risolvere la (i) sperando che la funzione $w(x)$ ottenuta soddisfi tutti i requisiti richiesti. Se l'operatore differenziale formale L ammette funzione peso per problemi polinomiali, il problema di Sturm-Liouville polinomiale consiste nel determinare quali ulteriori condizioni bisogna imporre all'operatore L affinché ammetta una successione di autovalori reali distinti $\{\lambda_n : n = 0, 1, \dots\}$ tali che per ogni n esista un polinomio di grado n , indichiamolo con Q_n , soddisfacente la equazione agli autovalori $LQ_n = \lambda_n Q_n$.

Proposizione 14.1.2 Il dominio di definizione formale $\mathcal{D}_L \in \mathcal{C}^2 \cap (L_2)_w$ dell'operatore differenziale L per un problema di Sturm-Liouville polinomiale deve contenere il sistema libero di vettori $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ e, quindi, tutti i polinomi in x .

Inoltre, ogni x^n deve essere una combinazione lineare dei primi $n+1$ polinomi Q_n ,

$$(14.1) \quad x^n = \sum_{i=0}^n \beta_{ni} Q_i(x) \quad \beta_{nn} \neq 0$$

Dimostrazione. Il dominio \mathcal{D}_L è una varietà lineare di $\mathcal{C}^2 \cap (L_2)_w$ che deve contenere tutti i polinomi $Q_n(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(n)} x^{n-j}$, con $\alpha_n^{(0)} \neq 0$, che siano soluzioni della equazione agli autovalori $LQ_n = \lambda_n Q_n$.

Se \mathcal{D}_L è una varietà lineare, allora per ogni n oltre a contenere Q_n conterrà anche il polinomio di grado n ,

$$Q_n^{(1)} = \frac{1}{\alpha_0^{(n)}} Q_n = x^n + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-j}$$

Prendiamo in esame ora

$$\frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} Q_{n-1}^{(1)} = \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} \frac{\alpha_j^{(n-1)}}{\alpha_0^{(n-1)}} x^{n-1-j}$$

Ma \mathcal{D}_L , sempre per la proprietà di essere una varietà lineare, sarà tale da

contenere

$$\begin{aligned} Q_n^{(2)} &= Q_n^{(1)} - \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} Q_{n-1}^{(1)} \\ &= x^n + \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-j} - \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} \frac{\alpha_j^{(n-1)}}{\alpha_0^{(n-1)}} x^{n-1-j} \\ &= x^n + \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-1} - \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-1} + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_j^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} x^{n-j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_0^{(n)}} \frac{\alpha_j^{(n-1)}}{\alpha_0^{(n-1)}} x^{n-1-j} \end{aligned}$$

, che è un polinomio di grado n del tipo $Q_n^{(2)} = x^n + \sum_{j=2}^n \frac{\beta_j^{(n)}}{\alpha_0^{(n)} \alpha_0^{(n-1)}} x^{n-j}$, in cui è stato eliminato il termine di grado $n-1$. Continuando con questa tecnica di eliminare via via i termini di grado $n-2, \dots, 1, 0$ si arriva al risultato cercato che $x^n \in \mathcal{D}_L$ per ogni n , ove x^n è una combinazione lineare $x^n = \sum_{i=0}^n \beta_{ni} Q_i(x)$, con $\beta_{nn} \neq 0$. \square

Teorema 14.1.3 *Affinchè l'operatore differenziale formale*

$$L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$$

si riferisca ad un problema di Sturm–Liouville polinomiale è necessario che a_0, a_1, a_2 abbiano le seguenti forme:

$$\begin{aligned} a_0(x) &= \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 \\ a_1(x) &= \beta_0 x + \beta_1 \\ a_2(x) &= \gamma_0 \end{aligned}$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0$ costanti reali. (Si ricordi che le funzioni a_0, a_1, a_2 devono essere a valori reali).

Dimostrazione. Sia Q_0 il polinomio di grado zero soluzione della equazione $LQ_0 = \lambda_0 Q_0$. Tenendo presente che un polinomi di grado zero è una costante, avremo che $LQ_0 = a_2(x)Q_0 = \lambda_0 Q_0$ da cui segue che $a_2(x) = \text{costante reale}$.

Sia Q_1 il polinomio di primo grado tale che $LQ_1 = \lambda_1 Q_1$, allora $a_1(x)Q_1' + a_2(x)Q_1 = \lambda_1 Q_1$ e quindi

$$a_1(x) = \frac{\lambda_1 - \gamma_0}{Q_1'} Q_1 = \beta_0 x + \beta_1$$

In quanto Q_1' è una costante non nulla e Q_1 è di primo grado.

Sia Q_2 il polinomio di secondo grado soluzione dell'equazione $LQ_2 = \lambda_2 Q_2$ altrimenti scritta $a_0(x)Q_2'' + a_1(x)Q_2' + a_2(x)Q_2 = \lambda_2 Q_2$ con Q_2'' costante non nulla, e quindi

$$a_0(x) = \frac{\lambda_2 - \gamma_0}{Q_2''} Q_2 - \frac{\beta_0 x + \beta_1}{Q_2''} Q_2' = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

\square

Corollario 14.1.4 *L'eventuale funzione peso associata all'operatore differenziale formale*

$$(14.2) \quad (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2) \frac{d^2}{dx^2} + (\beta_0 x + \beta_1) \frac{d}{dx} + \gamma_0$$

è data dalla formula

$$(14.3) \quad w(x) = c \exp \left\langle \int \frac{(\beta_0 - 2\alpha_0)x + (\beta_1 - \alpha_1)}{\alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2} dx \right\rangle$$

ove c è una costante positiva che, d'ora in avanti, supporremo uguale a 1.

Dimostrazione. Banale conseguenza della (i). □

Teorema 14.1.5 *Se l'operatore differenziale formale (14.2) è tale che le costanti α_0 e β_0 soddisfano le seguenti condizioni:*

- (i) α_0 e β_0 non sono entrambe nulle;
- (ii) se α_0 e β_0 sono entrambe non nulle allora sono dello stesso segno.

Allora la seguente funzione

$$(14.4) \quad P_n(x) = \frac{1}{k_n w} \frac{d^n}{dx^n} (a_0^n w)$$

è un polinomio di grado n , per qualunque $n = 0, 1, \dots$. La (14.4) è chiamata formula generale di Rodrigues.

Dimostrazione. Dimostreremo un risultato preliminare. Se $f(x) = a_0^k(x)w(x)r(x)$, ove $k \geq 1$ e $r(x) = r_0 x^l + \dots$ è un polinomio di grado l , ($l = 0, 1, \dots$), allora

$$f'(x) = a_0^{k-1}(x)w(x)s_{l+1}(x)$$

ove $s_{l+1}(x)$ è un polinomio di grado $l + 1$.

Per dimostrare questa affermazione deriviamo $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_0^{k-1})'(a_0 w)r + a_0^{k-1}(a_0 w)'r + a_0^{k-1}(a_0 w)r' = \\ &= (k-1)a_0^{k-2}a_0'(a_0 w)r + a_0^{k-1}(a_1 w)r + a_0^{k-1}(a_0 w)r' = \\ &= a_0^{k-1}w(a_1 r + (k-1)a_0' r + a_0 r') = \\ &= a_0^{k-1}w \{ r_0 \langle \beta_0 + (2(k-1) + l)\alpha_0 \rangle x^{l+1} + \dots \} \end{aligned}$$

Poichè $r_0 \neq 0$ e poichè α_0 e β_0 hanno lo stesso segno se $\alpha_0 \neq 0$ e $\beta_0 \neq 0$, avremo che la espressione in parentesi è un polinomio di grado $l + 1$.

Da questo risultato, applicato n volte a $a_0^n(x)w(x)$, (corrispondente al caso particolare $r(x) = 1$), deduciamo che

$$\frac{d^n}{dx^n} (a_0^n w) = (a_0(x))^0 w(x)t_n(x) = w(x)t_n(x)$$

ove $t_n(x)$ è un polinomio di grado n e perciò la (14.4) è un polinomio di grado n . □

Teorema 14.1.6 *Nelle ipotesi del teorema precedente, i polinomi*

$\{P_n : n = 0, 1, \dots\}$ *espressi dalla (14.4) sono soluzione del problema di Sturm–Liouville per l'operatore L , ossia*

$$LP_n = \lambda_n P_n \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \dots$$

con

$$(14.5) \quad \lambda_n = \alpha_0 n(n+1) + \beta_0 n + \gamma_0$$

Dimostrazione. Applicando direttamente la formula di Leibniz, ricordando che $a_0(x)$ è un polinomio al più di grado 2 e scrivendo per semplicità D al posto di $\frac{d}{dx}$, avremo

$$\begin{aligned} D^{n+1} \langle a_0 D \langle wa_0^n \rangle \rangle &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k(a_0) D^{n+1-k} \langle D \langle wa_0^n \rangle \rangle \\ &= a_0 D^{n+2} \langle wa_0^n \rangle + (n+1) a_0' D^{n+1} \langle wa_0^n \rangle + \binom{n+1}{2} a_0'' D^n \langle wa_0^n \rangle \\ &= a_0 k_n D^2(wP_n) + (n+1) a_0' k_n D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2} a_0'' k_n (wP_n) \end{aligned}$$

D'altra parte si può ottenere

$$\begin{aligned} D^{n+1} \langle a_0 D \langle wa_0 \rangle \rangle &= D^{n+1} \langle a_0 D \langle (wa_0) a_0^{n-1} \rangle \rangle \\ &= D^{n+1} \langle a_0^n D(wa_0) + (n-1) a_0^n a_0' w \rangle \\ &= D^{n+1} \langle a_0^n (wa_1) + (n-1) a_0' a_0^n w \rangle \\ &= D^{n+1} \{ wa_0^n \langle a_1 + (n-1) a_0' \rangle \} \\ &= \sum_0^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k \langle a_1 + (n-1) a_0' \rangle D^{n+1-k} (wa_0^n) \\ &= \langle a_1 + (n-1) a_0' \rangle D^{n+1} (wa_0^n) + (n+1) \langle a_1' + (n-1) a_0'' \rangle D^n (wa_0^n) \\ (2) \quad &= \langle a_1 + (n-1) a_0' \rangle D(wk_n P_n) + (n+1) \langle a_1' + (n-1) a_0'' \rangle (k_n w P_n) \end{aligned}$$

Mettendo assieme questi due risultati otteniamo

$$\begin{aligned} &a_0 k_n D^2(wP_n) + (n+1) a_0' k_n D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2} a_0'' k_n (wP_n) \\ &= \langle a_1 + (n-1) a_0' \rangle D(wk_n P_n) + (n+1) \langle a_1' + (n-1) a_0'' \rangle (k_n w P_n) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0 D^2(wP_n) + \langle 2a'_0 - a_1 \rangle D(wP_n) - (n+1) \left\langle \frac{n-2}{2} a''_0 - a'_1 \right\rangle (wP_n) \\
 &= a_0 (wP''_n + 2w'P'_n + w''P_n) + [2a'_0 - a_1] (wP'_n + P_n w') \\
 &\quad - (n+1) \left\langle \frac{n-2}{2} a''_0 - a'_1 \right\rangle wP_n \\
 &= (a_0 w) P''_n + \langle 2a_0 w' + \langle 2a'_0 - a_1 \rangle w \rangle P'_n + \\
 &\quad + \left\langle a_0 w'' + \langle 2a'_0 - a_1 \rangle w' - (n+1) w \left\langle \frac{n-2}{2} a''_0 - a'_1 \right\rangle \right\rangle P_n \\
 &= a_0 P''_n + \left\langle 2a_0 \frac{w'}{w} + 2a'_0 - a_1 \right\rangle P'_n \\
 (3) \quad &+ \left\langle a_0 \frac{w''}{w} + (2a'_0 - a_1) \frac{w'}{w} - (n+1) \left\langle \frac{n-2}{2} a''_0 - a'_1 \right\rangle \right\rangle P_n
 \end{aligned}$$

La (14.4), nel caso particolare di $n = 1$, fornisce la relazione

$$(4) \quad D(a_0 w) = k_1 w P_1$$

per cui, da un lato si ha

$$(5) \quad a'_0 w + a_0 w' = k_1 w P_1$$

ovvero $a'_0 + a_0 \frac{w'}{w} = k_1 P_1$, da cui segue $2a'_0 + 2a_0 \frac{w'}{w} - k_1 P_1 = k_1 P_1$; ma, per la (4), $k_1 P_1 = \frac{1}{w} (a_0 w)' = \frac{1}{w} (a_1 w) = a_1$, concludendo che

$$(6) \quad 2a'_0 + 2a_0 \frac{w'}{w} - a_1 = a_1$$

D'altro lato, derivando la (5) ulteriormente segue che $a_0 w'' + 2a'_0 w' + a''_0 w = k_1 (w' P_1 + w P'_1)$, da cui si ottiene

$$(7) \quad a_0 \frac{w''}{w} + (2a'_0 - k_1 P_1) \frac{w'}{w} = k_1 P'_1 - a''_0 = a_1 - a''_0$$

Pertanto la (3), tenuto conto della (6) e della (7), diviene

$$a_0 P''_n + a_1 P'_n + \left(a'_1 - a''_0 - (n+1) \left(\frac{n-2}{2} a''_0 - a_1 \right) \right) P_n + \gamma_0 P_n = \gamma_0 P_n$$

concludendo che

$$a_0 P''_n + a_1 P'_n + \gamma_0 P_n = \left(n a'_1 + \frac{n(n-1)}{2} a''_0 + \gamma_0 \right) P_n$$

che è la tesi, una volta ricordato che $a'_1 = \beta_0$ e $a''_0 = 2\alpha_0$. □

Sino ad ora ci siamo occupati delle conseguenze della sola condizione (i) di autoaggiuntezza formale per l'operatore differenziale formale L in relazione al problema di Sturm–Liouville polinomiale; ora analizzeremo alcune conseguenze delle condizioni al contorno

$$(ii) \quad w(x) a_0(x) [f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]_a^b = 0 \quad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{D}_L$$

utili nell'individuare un dominio di definizione \mathcal{D}_L tale che in esso L risulti formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso soddisfacente la (i).

Ricordiamo che dalla autoaggiunzione formale dell'operatore L segue che se λ_n e λ_m sono due autovalori distinti e Q_n e Q_m i corrispondenti autovettori di tipo polinomiale allora essi sono ortogonali in L_2_w , valendo la

$$\langle Q_n | Q_m \rangle_w = \int \overline{Q_n}(x) Q_m(x) w(x) dx = c_{n,m} \delta_{n,m}$$

ove le quantità $c_{n,n}$, che più semplicemente indicheremo con c_n , sono delle opportune costanti di normalizzazione.

Da ciò segue che

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{c_n}} \sqrt{w} Q_n : n = 0, 1, \dots \right\}$$

è un son in $L_2[\alpha, \beta]$.

Osservazione 14.1.7 Da quanto visto sino ad ora, sappiamo che

$\{x^n\}_{n=0,1,\dots}$ è una famiglia libera di vettori di $(L_2)_w$. Inoltre, la famiglia di polinomi $\{Q_i\}_{i=0,1,\dots}$, soluzioni della equazione agli autovalori $LQ_i = \lambda_i Q_i$ per un problema di Sturm-Liouville polinomiale, soddisfa le seguenti proprietà

- (i) $\{Q_i\}_{i=0,1,\dots}$ è un sistema ortonormale in $(L_2)_w$;
- (ii) ogni elemento del son Q_n è combinazione lineare dei primi $n+1$ elementi della famiglia $\{x^n\}$, $Q_n(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_{nj} x^j$ con $\alpha_{nn} \neq 0$;
- (iii) ogni elemento della famiglia libera x^n è combinazione lineare dei primi $n+1$ elementi del son $\{Q_i\}$, $x^n = \sum_{i=0}^n \beta_{ni} Q_i(x)$ con $\beta_{nn} \neq 0$. (vedi (??) proposizione (??)).

Pertanto, a meno di fattori di fase unitari, il son $\{Q_n\}$ è l'unico che si ottiene a partire dalla famiglia libera di vettori $\{x^n\}$ tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Teorema 14.1.8 *Nel caso dei problemi di Sturm–Liouville polinomiali relativi ad un intervallo compatto $[a, b]$ le condizioni di autoaggiuntezza formale (ii) implicano necessariamente che $\lim_{x \rightarrow a^+} w(x) a_0(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} w(x) a_0(x)$ siano finiti e che valga la uguaglianza*

$$(14.6) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} w(x) a_0(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} w(x) a_0(x)$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che \mathcal{D}_L contiene tutte le funzioni $\{x^n : n = 0, 1, \dots\}$ e quindi la (ii) deve essere vera nel caso in cui $f(x) = 1$ e $g(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ fornendo il risultato

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (w(x) a_0(x) x^n) - \lim_{x \rightarrow a^+} (w(x) a_0(x) x^n) = 0$$

La quale, nel caso particolare di $n = 0$, diviene

$$\lim_{x \rightarrow b^-} (w(x) a_0(x)) - \lim_{x \rightarrow a^+} (w(x) a_0(x)) = 0$$

che conduce alla tesi. \square

Osservazione 14.1.9 Nella (14.6) i limiti per $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow b^-$ di $a_0(x)$ esistono e sono finiti, in quanto $a_0(x)$ è un polinomio al più di secondo grado in x . Ciò non implica che necessariamente devono essere finiti i $\lim_{x \rightarrow a^+} w(x)$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} w(x)$; anzi si può dare il caso in cui questi limiti della funzione $w(x)$ siano entrambi infiniti pur risultando $\lim_{x \rightarrow a^+} w(x)a_0(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} w(x)a_0(x) = 0$. (In effetti, in un esempio che tratteremo più diffusamente nel prossimo paragrafo, si tratterà di una forma di indecisione del tipo $\infty \cdot 0$ risolta a favore dello 0).

Corollario 14.1.10 *Nelle condizioni del teorema precedente, se esistono finiti i limiti*

$$w(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} w(x) \text{ e } w(b) := \lim_{x \rightarrow b^-} w(x)$$

e si ha che

$$w(a) \neq 0 \text{ e } w(b) \neq 0,$$

allora deve necessariamente essere

$$a_0(x) = k(x - a)(x - b).$$

Dimostrazione. Sotto queste condizioni la (14.6) si può scrivere nella forma

$$w(b)a_0(b)b^n - w(a)a_0(a)a^n = 0$$

che nei casi di $n = 0$ e $n = 1$ conduce al sistema

$$\begin{cases} w(b)a_0(b) = w(a)a_0(a) \\ w(b)a_0(b)b = w(a)a_0(a)a \end{cases}$$

Il quale, essendo $a \neq b$, è consistente sse $w(a)a_0(a) = w(b)a_0(b) = 0$. Tenuto conto delle ipotesi $w(a) \neq 0$ e $w(b) \neq 0$, da quest'ultima segue $a_0(a) = a_0(b) = 0$ e quindi la tesi. \square

Teorema 14.1.11 *Nel caso dei problemi di Sturm–Liouville polinomiali relativi ad un intervallo $[\alpha, \beta]$ illimitato le condizioni di autoaggiuntezza formale implicano che*

(i) *non esistono soluzione polinomiale se a_1 è la funzione identicamente nulla su $[\alpha, \beta]$;*

(ii) *sugli estremi infiniti deve essere*

$$(14.7) \quad \lim_x x^n w(x) = 0 \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \dots$$

(iii) *sull'eventuale estremo finito deve essere*

$$(14.8) \quad \lim_x w(x)a_0(x) = 0$$

Dimostrazione. Ricordando che la funzione peso w si ottiene come soluzione della equazione differenziale $(wa_0)' = wa_1$ la condizione $a_1 = 0$ implica $w(x)a_0(x) =$

k , con k costante. Inoltre dovendo essere soddisfatta la seconda condizione di autoaggiuntezza formale

$$(1) \quad w(x)a_0(x) [f(x)g'(x) - g(x)f'(x)]|_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{D}_L$$

poichè i polinomi divergono all'infinito, questa condizione non potrà essere soddisfatta nel caso in cui $wa_0 = k$, $f = 1$ e $g = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. Inoltre, questa particolare scelta delle funzioni f e g conduce alla tesi (ii), una volta osservato che $a_0(x)$ è un polinomio al più di secondo grado in x .

Nell'eventuale estremo finito, diciamo e_f , dell'intervallo $[\alpha, \beta]$, deve valere la (1) nel caso particolare di $f(x) = 1$ e $g(x) = x$, ossia

$$w(x)a_0(x)|_{\alpha}^{\beta} = 0$$

che si traduce nella $w(e_f)a(e_f) = \lim w(x)a_0(x) = 0$, tenuto conto di quanto ora dimostrato. \square

Riassumendo, se L è un operatore differenziale formale per il problema di Sturm-Liouville polinomiale tale da soddisfare le condizioni (i) e (ii) del teorema 14.1.5, allora i polinomi $\{P_n\} n = 0, 1, \dots$ espressi dalla formula di Rodrigues generalizzata (14.4) sono soluzioni della equazione agli autovalori $LP_n = \lambda_n P_n$, con gli autovalori λ_n dati dalla (14.5).

Se L è anche formalmente autoaggiunto nel dominio di definizione formale \mathcal{D}_L rispetto alla funzione peso w , allora la famiglia $\{P_n\}$ è costituita da vettori mutualmente ortogonali in L_{2_w} . D'ora in avanti supporremo di aver scelto la costante k_n nella (14.4) in modo tale che i vari polinomi P_n siano normalizzati in tale spazio. Pertanto, $\{P_n\}$ risulta essere un son in L_{2_w} mentre $\{\sqrt{w}P_n\}$ è un son in L_2 . Questo risultato è però ulteriormente rafforzato dal seguente

Teorema 14.1.12 *Il sistema ortonormale dei polinomi di Sturm–Liouville $\{P_n(x)\}$ è completo nello spazio di Hilbert $L_2([a, \beta])_w$.*

Dimostrazione. Supponiamo esista una qualche funzione $f \in L_2([a, \beta])_w$ tale che $\langle f|P_n \rangle_w = 0$ e per ogni n . Poichè x^m può essere scritto come combinazione lineare finita dei P_n , per essere esatti dei primi $m+1$, otteniamo immediatamente che $\langle x^m|f \rangle_w = 0$ per ogni m . Introduciamo le funzioni

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \forall x \notin [\alpha, \beta] \end{cases} \quad \text{e} \quad \hat{w}(x) = \begin{cases} w(x) & \forall x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \forall x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Ovviamente, se $f \in L_{2_w}$ allora $\hat{f} \in L_2[-\infty, \infty]_{\hat{w}}$ e, per la proprietà (p-iv) delle funzioni peso, $\hat{w}\hat{f} \in L_2[-\infty, \infty]$. Da ciò segue che $\langle x^n|\hat{f} \rangle_{\hat{w}} = 0$ per ogni n .

Consideriamo ora l'applicazione dell'operatore di Fourier-Plancherel \mathcal{F} su L_2 al caso della funzione $\hat{f}\hat{w}$

$$g(k) = \mathcal{F}(\hat{f}\hat{w}) = \mathfrak{B}2 - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \hat{f}(x)\hat{w}(x)e^{-ikx} dx$$

La funzione $g(k)$ appartiene allo spazio di Hilbert L_2 , per una nota proprietà dell'operatore di Fourier-Plancherel. Ora, se sviluppiamo e^{-ikx} secondo la serie

$$e^{-ikx} = \sum \frac{(-ik)^m}{m!} x^m$$

e usiamo le relazioni $\langle x^m | \hat{f} \rangle_{\hat{w}} = 0$, per un corollario del teorema di Lebesgue, abbiamo che

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{w} \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} x^n dx \\ &= \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \hat{w}(x) x^n dx \\ &= \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n | \hat{f} \rangle = 0 \end{aligned}$$

In notazione operatoriale potremo scrivere $\mathcal{F}(\hat{f}\hat{w}) = \underline{0}$. Ma \mathcal{F} è un operatore invertibile, in particolare è iniettivo. Quest'ultima proprietà equivale ad affermare che l'equazione $\mathcal{F}(\hat{f}\hat{w}) = \underline{0}u$ ammette quale unica soluzione $\hat{f}\hat{w} = \underline{0}u$, ovvero che $\hat{f}(x)\hat{w}(x) = 0$ quasi dappertutto su $[-\infty, \infty]$. Ciò implica che $f(x)w(x) = 0$ q.d. su $[\alpha, \beta]$, ed essendo $w(x) > 0$ su (α, β) , non potrà che essere $f(x) = 0$ q.d. su $[\alpha, \beta]$, cosicchè il sistema ortonormale $\{P_n\}$ è completo in L_2 .

Come conseguenza di questo risultato abbiamo che $\{\sqrt{w}P_n\}$ è un sistema ortonormale completo in L_2 . □

Verifichiamo ora la seguente proprietà:

Teorema 14.1.13 *Sia L un operatore differenziale formalmente autoaggiunto rispetto alla funzione peso associata w e soddisfacente le condizioni*

- (i) a_0 mantiene sempre lo stesso segno su $[\alpha, \beta]$ e si annulla su di un insieme di misura nulla di tale intervallo;
- (ii) L soddisfa le condizioni (i) e (ii) del teorema 14.1.5 che assicurano l'esistenza di una soluzione del problema di Sturm–Liouville polinomiale data dalla formula generalizzata di Rodrigues.

Se $\{P_n : n = 0, 1, \dots\}$ è il sistema ortonormale completo soluzione del problema di Sturm–Liouville polinomiale per L rispetto alla funzione peso w allora $\{P'_n : n = 1, 2, \dots\}$ è un sistema ortonormale completo soluzione del problema di Sturm–Liouville polinomiale per un nuovo operatore differenziale formale \hat{L} rispetto alla funzione peso $\tilde{w} = w \cdot a_0$. Dall'ipotesi

$$a_0 D^2 P_n + a_1 D P_n + a_2 P_n = \lambda_n P_n$$

segue che

$$D(a_0 D^2 P_n + a_1 D P_n + a_2 P_n) = D(\lambda_n P_n)$$

ovvero

$$a_0 D^2(P'_n) + (a'_0 + a_1)D(P'_n) + (a'_1 + a_2)P'_n = \lambda_n P'_n$$

ove

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 \\ a'_0 + a_1 = (2\alpha_0 + \beta_0)x + (\alpha_1 + \beta_1) \\ a'_1 + a_2 = \beta_0 + \gamma_0 \end{cases}$$

Abbiamo pertanto ottenuto il seguente risultato preliminare

Se l'equazione differenziale

$$(\alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2)y'' + (\beta_0 x + \beta_1)y' + \gamma_0 y = \lambda y$$

ammette come soluzioni i polinomi P_n , (\mathbb{N}), corrispondenti agli autovalori

$$\lambda_n = \alpha_0 n(n-1) + \beta_0 n + \gamma_0$$

allora l'equazione differenziale

$$(\alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2)y'' + ((2\alpha_0 + \beta_0)x + (\alpha_1 + \beta_1))y' + (\beta_0 + \gamma_0)y = \lambda y$$

ammette come soluzioni i polinomi P'_n , ($n = 1, 2, \dots$), corrispondenti ai medesimi autovalori.

Considerato l'operatore differenziale formale

$$(14.9) \quad \tilde{L} = (\alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2) \frac{d^2}{dx^2} + ((2\alpha_0 + \beta_0)x + (\alpha_1 + \beta_1)) \frac{d}{dx} + (\beta_0 + \gamma_0)$$

l'eventuale funzione peso associata ad esso è data da

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) &= c \exp \int \frac{(2\alpha_0 + \beta_0 - 2\alpha_0)x + (\alpha_1 + \beta_1) - \alpha_1}{a_0} \\ &= c \exp \int \frac{\beta_0 x + \beta_1}{a_0} = c \exp \int \frac{a_1}{a_0} \\ &= c \exp \int \frac{(wa_0)'}{wa_0} = cwa_0 \end{aligned}$$

Quanto ora visto conduce al seguente secondo risultato

Se a_0 mantiene sempre lo stesso segno su $[\alpha, \beta]$ e si annulla soltanto su di un insieme di misura nulla di $[\alpha, \beta]$ allora $\tilde{w}(x) = w(x)a_0(x)$ è la funzione peso associata all'operatore differenziale formale (14.9).

Supposto che L soddisfi le condizioni (i) e (ii) del teorema 14.1.5, allora anche \hat{L} soddisfa le corrispondenti condizioni (i) e (ii). Sotto queste condizioni, se applichiamo all'operatore \hat{L} i risultati generali visti in questo paragrafo, otteniamo che esisterà un sistema di polinomi $\{\hat{P}_n\}$ ortonormale completo nello spazio di Hilbert L_{2_w} e soddisfacente il problema di Sturm-Liouville polinomiale. Questo sonc sarà dato dall'espressione

$$(14.10) \quad \hat{P}_n(x) = \frac{1}{\hat{k}_n wa_0} \frac{d^n}{dx^n} (a_0^{n+1} w)$$

L'autovalore corrispondente secondo la (14.5) al polinomio \hat{P}_n è

$$(14.11) \quad \begin{aligned} \hat{\lambda}_n &= \alpha_0 n(n-1) + (2\alpha_0 + \beta_0)n + (\beta_0 + \gamma_0) \\ &= \alpha_0 n(n+1) + \beta_0(n+1) + \gamma_0 \end{aligned}$$

Da quanto ora ricavato si ottiene che

Sotto l'ipotesi che $w(x)a_0(x)$ sia la funzione peso associata all'operatore differenziale formale \hat{L} , sia P'_{n+1} che \hat{P}_n sono polinomi di grado n , entrambi corrispondenti al medesimo autovalore $\hat{\lambda}_n$ di \hat{L} .

Ricaviamo ora l'ultimo risultato utile al nostro scopo

Sotto le ipotesi precedenti, la famiglia di polinomi $\{P'_n : n = 1, 2, \dots\}$ è un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert $L2_{\hat{w}}$.

Integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} P'_n P'_m w a_0 &= P_n P'_m (w a_0) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} P_n (P''_m w a_0 + P'_m (w a_0)') \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P_n (P''_m w a_0 + P'_m w a_1) = \int_{\alpha}^{\beta} P_n (\lambda_m - \gamma_0) P_m = \delta_{n,m} \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere che le due famiglie $\{P'_{n+1}\} \mathbb{N}$ e $\{\hat{P}_n\} \mathbb{N}$ sono costituite da polinomi di grado n ed entrambe soddisfano le medesime condizioni del procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt nello spazio di Hilbert $L2_{\hat{w}}$ a partire dalla famiglia libera di vettori $\{x^n : \mathbb{N}\}$. Da ciò segue che il polinomio P'_{n+1} differisce dal polinomio \hat{P}_n per un opportuno fattore di fase unitario e, quindi,

La famiglia di polinomi $\{P'_{n+1}\} \mathbb{N}$ è un sistema ortonormale completo in $L2_{\hat{w}}$. Essi sono soluzione del problema di Sturm-Liouville polinomiale per l'operatore differenziale formale (14.9), i cui corrispondenti autovalori sono dati dalla (14.11). A meno di fattori di fase unitari, tali polinomi sono espressi dalla formula generalizzata di Rodrigues (14.10).

14.2 Equazioni e polinomi di Jacobi, Legendre, Laguerre, Hermite

In questo paragrafo applicheremo i risultati ottenuti sino ad ora al caso di alcuni operatori differenziali formali per problemi polinomiali di frequente utilizzo nelle applicazioni.

14.2.1 Equazioni e polinomi di Jacobi: intervallo $[-1, 1]$: Caso $a_0(x) = 1 - x^2$.

Considerato l'intervallo $[-1, 1]$, introduciamo la seguente notazione di convenienza

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -(p + q + 2) \\ \beta_1 &= q - p \end{aligned}$$

ove p, q sono due numeri reali non necessariamente interi. In questo caso la funzione peso si ottiene dalla formula

$$\begin{aligned} w(x)a_0(x) &= \exp\left(\int \frac{-(p+q+2)x+q-p}{1-x^2} dx\right) \\ &= \exp\left(\int \frac{q+1}{1+x} dx - \int \frac{p+1}{1-x} dx\right) \\ &= (1+x)^{q+1}(1-x)^{p+1} \end{aligned}$$

ovvero

$$w(x) = (1+x)^q(1-x)^p$$

Facciamo osservare che nell'intervallo $[-1, 1]$ la condizione del teorema 14.1.5, paragrafo precedente, che sugli estremi dell'intervallo siano finiti i limiti della funzione $w(x)a_0(x)$ è soddisfatta sotto le condizioni:

$$q+1 > 0 \quad p+1 > 0$$

Infatti sotto queste condizioni avremo che

$$\lim_{x \rightarrow -1} w(x)a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 1} w(x)a_0(x) = 0 \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \dots$$

Condizioni $p > -1, q > -1$

Nelle ipotesi che queste condizioni siano soddisfatte, l'operatore L è formalmente autoaggiunto in $L_2[-1, 1]_w$ ed ha la forma

$$L = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} + \left[(q-p) - (p+q+2)x \right] \frac{d}{dx} + \gamma_0$$

Cui corrisponde l'equazione agli autovettori, chiamata *equazione di Jacobi* di indici p, q ,

$$(1-x^2)y'' + \left[(q-p) - (p+q+2)x \right] y' + \gamma_0 y = \lambda y$$

Gli autovalori di questo problema di Sturm-Liouville polinomiale sono espressi dalla relazione

$$\lambda_n = -n(n-1) - (p+q+2)n + \gamma_0$$

e a ciascun di questi autovalori corrisponde un autovettore polinomiale, indicato col simbolo $J_n^{(p,q)}(x)$, di grado n e espresso dalla formula di Rodrigues

$$J_n^{(p,q)}(x) = A_n^{(p,q)} (1-x)^{-p} (1+x)^{-q} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n (1+x)^p (1-x)^q \right]$$

chiamato *polinomio di Jacobi* di grado n , ove $A_n^{(p,q)}$ è una opportuna costante dipendente da n, p, q .

14.2.2 (2) Equazione e polinomi di Legendre: caso $a_0(x) = 1 - x^2$, $p = q = 0$, $\gamma_0 = 0$.

Il caso particolare della equazione di Jacobi corrispondente alla scelta di $p = q = 0$ e $\gamma_0 = 0$ si riferisce alla funzione

$$a_0(x)w(x) = (1 - x^2)$$

da cui segue che la funzione peso in esame è

$$w(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in [-1, 1]$$

In questo caso avremo che l'operatore differenziale definito su $L_2([-1, 1])$ è espresso dall'operatore formalmente autoaggiunto, detto operatore di Legendre:

$$L = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$$

cui corrisponde l'equazione agli autovalori $(1 - x^2)y'' - 2xy' = \mu y$, la quale per $\lambda = -\mu$ diviene l'equazione di Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' - \lambda y = 0$$

I polinomi $J_n^{(0,0)}$ vengono indicati più brevemente con $P_n(x)$ e sono chiamati *polinomi di Legendre*. I polinomi di Legendre sono anche chiamati *polinomi sferici* e costituiscono un sonc in $L_2([-1, 1])$. Il polinomio $P_n(x)$ è l'autovettore dell'operatore di Legendre corrispondente all'autovalore $\lambda_n = -\mu_n = n(n-1) - 2n = n(n+1)$.

Applicando il teorema 14.1.13 al caso dei polinomi di Legendre ora visti avremo che

- $\frac{dP_n}{dx}$ è un sonc di polinomi rispetto a $(1 - x^2)$ con $n = 1, 2, \dots$
- $\frac{d^2P_n}{dx^2}$ è un sonc di polinomi rispetto a $(1 - x^2)^2$ con $n = 2, 3, \dots$
- $\frac{d^lP_n}{dx^l}$ è un sonc di polinomi rispetto a $(1 - x^2)^l$ con $l = n, n+1, \dots$

(3) Equazione e polinomi ultrasferici: caso $a_0(x) = 1 - x^2$, $p = q = m$, $\gamma_0 = 0$. Fissato un numero reale $m > 1$, consideriamo ora il caso dell'equazione di Jacobi per $p = q = m$. Sotto queste condizioni avremo che la funzione peso è

$$w^{(m)}(x) = (1 - x^2)^m$$

L'operatore differenziale formalmente autoaggiunto è

$$L^{(m)} = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{d}{dx}$$

cui corrisponde l'equazione agli autovalori, chiamata *equazione ultrasferica*

$$(1 - x^2)y'' - 2(m+1)xy' + \lambda y = 0$$

Perciò $\{J_n^{(m,m)}(x) : \mathbb{N}\}$ è un sonc di polinomi in L_2 rispetto alla funzione peso $w^{(m)}(x) = (1 - x^2)^m$, corrispondente agli autovalori $\lambda_n = n(n+1+2m)$.

Se il numero fissato m è un intero, $m = \mathbb{N}$, potremo scrivere il precedente sonc di polinomi nella forma $J_{l-m}^{(m,m)}$, con $l = m, m+1, \dots$, ove $J_{l-m}^{(m,m)}$ è un polinomio di grado $l-m$. Per l'unicità dei sistemi ortonormali di polinomi ottenuto in $L_2[-1, 1]_{w(m)}$ tramite il procedimento di Gram-Schmidt a partire dalla famiglia libera x^n , si ottiene che

$$J_{l-m}^{(m,m)}(x) = \frac{d^m P_l}{dx^m} \quad (m = \mathbb{N}, l = m, m+1, \dots)$$

da cui ricaviamo che per ogni intero $m = \mathbb{N}$ la seguente famiglia di funzioni

$$P_l^m(x) := (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{dx^m} \quad (l = m, m+1, \dots)$$

chiamate *funzioni associate di Legendre*, è un sonc in $L_2[-1, 1]$. (4) *Equazione e polinomi di Laguerre associati: intervallo $[0, \infty]$, caso $a_0(x) = x, \beta_0 = -1, \beta_1 > 0$* Sotto queste condizioni avremo che

$$\begin{aligned} w(x)a_0(x) &= \exp\left(\int \frac{\beta_0 x + \beta_1}{x} dx\right) = e^{\beta_0 x} e^{\beta_1 \log x} = \\ &= x^{\beta_1} e^{-x} \end{aligned}$$

Pertanto la funzione peso in esame è

$$w(x) = x^{\beta_1-1} e^{-x}$$

La scelta di $\beta_0 = -1$ permette di soddisfare la condizione (14.7) sull'estremo infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n w(x)) = 0 \quad \text{per ogni } n$$

in quanto per $x \rightarrow +\infty$ si ha $(x^n w(x)) \sim e^{-x}$. Osservato che per $\beta_1 > 0$ si ha che nel punto $x = 0$, $w(0)a_0(0) = 0$, la condizione (3.8) sarà soddisfatta nell'intervallo $[0, +\infty)$.

In particolare, prendendo $\beta_1 = s+1$, con $s > -1$, la funzione peso corrispondente sarà:

$$w(x) = x^s e^{-x} \quad \text{per } 0 \leq x$$

In questo caso l'equazione differenziale in esame sarà:

$$xy'' + (1-x+s)y' + (\gamma_0 + \lambda)y$$

chiamata equazione di *Laguerre associata*. Gli autovalori di questa equazione differenziale sono

$$\lambda_n = n - \gamma_0$$

Il corrispondente autovettore polinomiale viene chiamato *polinomio di Laguerre* di grado n e di ordine s (con $s > -1$) ed è indicato con $L_n^s(x)$, la cui formula di Rodrigues è

$$L_n^s(x) := \frac{1}{k_m^s} x^{-s} e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{s+1} e^{-x})$$

Quindi, in $L_2[0, +\infty)$, le funzioni

$$l_n^s(x) := x^{s/2} e^{-(x/2)} L_n^s(x)$$

chiamate *funzioni di Laguerre associate*, costituiscono un sonc.

14.2.3 (3) Equazioni e polinomi di Hermite: intervallo
 $[-\infty, \infty]$, caso $a_0(x) = 1$, $\beta_0 = -2$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_0 = -1$

In questo caso l'equazione differenziale è

$$y'' - 2xy' - y = \mu y.$$

Se nella precedente equazione poniamo $\mu = -\lambda$ otteniamo la classica *equazione di Hermite*

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0.$$

La funzione peso di questa equazione differenziale è

$$w(x) = e^{-x^2}$$

e la condizione (14.7) è soddisfatta in entrambi i punti infiniti $-\infty, +\infty$. Gli autovalori di questa equazione differenziale sono $-\lambda_n = \mu_n = -2n - 1$ ovvero

$$\lambda_n = 2n + 1$$

I corrispondenti autovettori polinomiali si chiamano *polinomi di Hermite* e vengono indicati con $H_n(x)$ e si ottengono dalla formula di Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Le funzioni

$$h_n(x) := e^{-(x^2/2)} H_n(x)$$

sono chiamate *funzioni di Hermite* e costituiscono un sonc in $L_2(\mathbb{R})$.

nome	operatore	intervallo	λ_n	$w(x)$
Hermite	$\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$	\mathbb{R}	$2n + 1$	e^{-x^2}
Legendre	$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}$	$[-1, 1]$	$n(n + 1)$	1
Laguerre	$x \frac{d^2}{dx^2} + (1 - x) \frac{d}{dx}$	$[0, +\infty)$	n	$x^{-s} e^{-x}$

Modulo III

OPERATORI IN SPAZI PRE-HILBERTIANI

Capitolo 15

Operatori Normali ed Hermitiani

15.1 Operatori definiti su coppie Hilbertiane

Citando P. Kristensen, L. Mejlbo e E. Thue Poulsen, *Comm. Math. Phys.*, 1 (1965) 175: “Una delle principali difficoltà della teoria quantistica consiste nel fatto che se anche la teoria degli spazi di Hilbert è estremamente ben sviluppata e sotto molti aspetti molto semplice, gli operatori sono in generale non limitati e densamente definiti. Di conseguenza quando si ha a che fare con diversi operatori di tal tipo sorgono difficili problemi riguardanti il loro comune dominio di definizione. (...)”.

D'altra parte, sia per ciò che riguarda l'attuale investigazione quanto per gli scopi della teoria quantistica in generale, lo spazio di Hilbert sembra essere una struttura eccessivamente ricca.

Ne segue che la scelta di uno spazio supporto, in un certo senso più piccolo di uno spazio di Hilbert, offre un vantaggio addizionale nella facilitazione delle manipolazioni algebriche sugli operatori”.

Citando J. E. Roberts, *J. Math. Phys.*, 7 1907 (1966): “Una delle principali difficoltà che sorgono nella formulazione della meccanica quantistica in spazi di Hilbert è che, a causa della non limitatezza degli operatori che rappresentano quantità fisiche, non è sempre possibile eseguire operazioni algebriche su queste quantità fondamentali. allo scopo di essere matematicamente rigorosi è necessario essere sempre molto attenti al dominio di definizione di un operatore”.

Analogamente A. Bohn, *Lecture notes in Physics*, n.78, Springer-Verlag, (1978), afferma che “una delle principali difficoltà che sorgono nella formulazione della meccanica quantistica in spazi di Hilbert consiste nella impossibilità di compiere sempre le operazioni algebriche sugli operatori, in generale non limitati, che rappresentano le grandezze fisiche fondamentali.

Fortunatamente, se si adotta il punto di vista dei fisici e si agisce felicemente sugli operatori non limitati senza alcun riguardo per il problema dei domini di definizione non accade alcun reale disastro.

In questo modo sorge il sospetto che gli operatori in uno spazio di Hilbert non siano i più semplici oggetti matematici interpretabili come osservabili fisiche

e siamo tentati di cercare un'altra struttura matematica in cui sia permessa ogni operazione algebrica di rilevanza fisica."

Per ovviare a queste difficoltà noi adotteremo il seguente punto di vista consistente nel fissare una volta per tutte una coppia

$$(\mathcal{S}, \mathcal{H})$$

ove \mathcal{S} é una varietà lineare densa nello spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} , ovvero \mathcal{H} é il completamento di uno spazio con prodotto interno complesso \mathcal{S} .

L'introduzione della varietà lineare \mathcal{S} nella coppia Hilbertiana risponde alla necessità di permettere le operazioni algebriche sugli operatori, almeno relativamente ad \mathcal{S} , senza che ci si debba preoccupare dei loro domini di definizione, come invece accadrebbe se ci si limitasse al solo spazio di Hilbert \mathcal{H} . A questo scopo introduciamo l'insieme $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ di tutti gli operatori T soddisfacenti le condizioni:

$$(op-1) \quad \overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H} \quad (\text{e quindi esiste un unico operatore } (\mathcal{D}_{T^*}, T^*), \text{ aggiunto di } (\mathcal{D}_T, T))$$

$$(op-2) \quad \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_T \cap \mathcal{D}_{T^*}$$

$$(op-3) \quad T(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}, \quad T^*(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}.$$

Le condizioni (op-2) (op-3) si possono scindere nelle due condizioni separate

$$\begin{array}{ll} (op-2a) & \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_T \\ (op-3a) & T(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} (op-2b) & \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_{T^*} \\ (op-3b) & T^*(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}. \end{array}$$

Queste, a loro volta, implicano che si possono considerare le restrizioni di T e T^* a \mathcal{S} ottenendo i due operatori, che indicheremo ancora con gli stessi simboli,

$$T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \quad \text{e} \quad T^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}.$$

Quindi potremo porre

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) := \{T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{H} \text{ con } \overline{\mathcal{D}_T} = \mathcal{H} \mid T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, T^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}\}.$$

Diremo che due operatori T_1 e $T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ sono \mathcal{S} -uguali, indicato con $T_1 =_{\mathcal{S}} T_2$, sse $T_1(x) = T_2(x)$ per ogni $x \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{L}(\mathcal{S})$ é un'algebra associativa con unità rispetto alle usuali operazioni su operatori intesi come definiti su \mathcal{S} :

$$\begin{array}{ll} (T_1 + T_2)(x) := T_1x + T_2x & \text{per ogni} & x \in \mathcal{S} \\ (\alpha T)(x) := \alpha T_1(x) & \text{per ogni} & x \in \mathcal{S} \\ (T_1 \circ T_2)(x) := T_1(T_2(x)) & \text{per ogni} & x \in \mathcal{S} \end{array}$$

Tale algebra non é \mathcal{S} -commutativa nel senso che in generale non é vero che per due generici operatori di $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ vale la condizione che per ogni $x \in \mathcal{S}$, $(T_1 \circ T_2)(x) = (T_2 \circ T_1)(x)$.

Ha quindi senso introdurre l'ulteriore operazione di parentesi di commutazione relativamente a \mathcal{S} , intesa come l'operatore definito su \mathcal{S} dalla:

$$[T_1, T_2]_{\mathcal{S}} = T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1.$$

Diremo che gli operatori T_1 e T_2 \mathcal{S} -commutano sse $[T_1, T_2]_{\mathcal{S}} = \mathbb{0}_{\mathcal{S}}$.

L'insieme $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ munito delle operazioni $+$, $\cdot_{\mathbb{C}}$ e delle parentesi di commutazione $[\ ,]_{\mathcal{S}}$ é un'algebra di Lie; questa algebra é non vuota perché contiene almeno due elementi, l'operatore nullo $\mathbb{0}_{\mathcal{S}}$ e l'operatore identico $\mathbb{I}_{\mathcal{S}}$.

Alla luce di questi discorsi, nel seguito studieremo alcune proprietà degli operatori da \mathcal{S} in \mathcal{S} a se stanti, ossia indipendentemente dallo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Pertanto, nel contesto delle coppie Hilbertiane, d'ora in avanti ometteremo di fare esplicito riferimento nelle notazioni al simbolo \mathcal{S} ogni qualvolta ciò non comporti ambiguità; per esempio scriveremo più semplicemente $T_1 = T_2$, $\mathbb{0}$, \mathbb{I} , $[\ ,]$ al posto di $T_1 =_{\mathcal{S}} T_2$, $\mathbb{0}_{\mathcal{S}}$, $\mathbb{I}_{\mathcal{S}}$, $[\ ,]_{\mathcal{S}}$ e così via.

Lemma 15.1.1 *Sia $T : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ allora $T(x) = \underline{0}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ sse $\langle Tx|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$.*

Dimostrazione. Se $T(x) = \underline{0}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ avremo che $\langle Tx|x \rangle = \langle \underline{0}|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$.

Viceversa, sia $\langle Tx|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$. Essendo \mathcal{S} una varietà lineare, se $x \in \mathcal{S}$ allora pure $x + y \in \mathcal{S}$ e dalla ipotesi si ha

$$(15.1) \quad 0 = \langle T(x+y)|x+y \rangle = \langle Tx|x \rangle + \langle Tx|y \rangle + \langle Ty|x \rangle + \langle Ty|y \rangle = \\ = \langle Tx|y \rangle + \langle Ty|x \rangle$$

ove si é tenuto presente che $\langle Tx|x \rangle = \langle Ty|y \rangle = 0$.

Analogamente, se x e $y \in \mathcal{S}$ allora $ix + y \in \mathcal{S}$ per cui

$$(15.2) \quad 0 = \langle T(ix+y)|ix+y \rangle = \langle T(ix)|ix \rangle + \langle T(ix)|y \rangle + \langle Ty|ix \rangle + \langle Ty|y \rangle = \\ = i(\langle Ty|x \rangle - \langle Tx|y \rangle)$$

Moltiplicando quest'ultima per i avremo che

$$(15.3) \quad \langle Tx|y \rangle - \langle Ty|x \rangle = 0$$

Sommando membro a membro la (15.1) e la (15.3) si ottiene $2\langle Tx|y \rangle = 0$ da cui segue che $\langle Tx|y \rangle = 0$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$; in particolare si può assumere $y = Tx$ per avere $\langle Tx|Tx \rangle = 0$ da cui si deduce $Tx = \underline{0}$. \square

Osservazione 15.1.2 Il lemma precedente non é vero nel caso di spazi con prodotto interno reali. Si consideri infatti lo spazio reale \mathbb{R}^2 . L'operatore

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \rightarrow T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

rappresenta una rotazione in senso orario di $\pi/2$ del vettore $\underline{x} = (x^1, x^2)$. Chiaramente $\langle T\underline{x}|\underline{x} \rangle = \langle (x_2, -x_1)|(x_1, x_2) \rangle = 0$ per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$, ma T é diverso dall'operatore nullo.

Pertanto la formulazione corretta del lemma precedente é la seguente:

Lemma 15.1.3 Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno complesso, T un operatore lineare da \mathcal{S} in \mathcal{S} allora $\langle Tx|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ implica $T = \mathbb{O}$.

Proposizione 15.1.4 Siano dati gli operatori $T_1, T_2 : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ allora $T_1 = T_2$ sse $\langle T_1 x|x \rangle = \langle T_2 x|x \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione. Se $T_1 = T_2$ per definizione risulta $T_1 x = T_2 x$ per ogni $x \in \mathcal{S}$, da cui segue ovviamente che $\langle T_1 x|x \rangle = \langle T_2 x|x \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{S}$. Viceversa, sia $\langle T_1 x|x \rangle = \langle T_2 x|x \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ da esso segue che $\langle (T_1 - T_2)x|x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ e dal precedente lemma si ottiene che $(T_1 - T_2)x = \underline{0}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ ovvero $T_1 = T_2$. \square

Proposizione 15.1.5 Sia $T : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, se esiste un operatore $T^* : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ soddisfacente l'uguaglianza $\langle Tx|y \rangle = \langle x|T^*y \rangle$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$ allora tale operatore è unico e viene chiamato l'operatore \mathcal{S} -aggiunto dell'operatore T .

Dimostrazione. Supponiamo che gli operatori T_1^* e T_2^* soddisfino le uguaglianze $\langle Tx|y \rangle = \langle x|T_1^*y \rangle = \langle x|T_2^*y \rangle$; da ciò risulta che $\langle x|T_1^*y \rangle = \langle x|T_2^*y \rangle$ ossia $\langle T_1^*x|y \rangle = \langle T_2^*x|y \rangle$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$; considerando $x = y$ si ha $\langle T_1^*x|x \rangle = \langle T_2^*x|x \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ e quindi $T_1^* = T_2^*$. \square

Osservazione 15.1.6 Proprio per come è stato definito, l'insieme $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ è caratterizzato dalla proprietà che ogni suo elemento (inteso come operatore da \mathcal{S} in \mathcal{S}), $T : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, ammette l'operatore \mathcal{S} -aggiunto $T^* : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, che per quanto abbiamo ora visto è unico relativamente a \mathcal{S} .

D'ora in avanti riterremo gli elementi $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ come operatori da \mathcal{S} in \mathcal{S} e analogamente i corrispondenti operatori aggiunti verranno ritenuti come operatori da \mathcal{S} in \mathcal{S} . In ogni caso, poiché la varietà lineare \mathcal{S} è fissata una volta per tutte, nel proseguimento del discorso useremo un formalismo in cui ometteremo ogni riferimento ad essa.

Esempio 15.1.7 Sia $\{\psi_1, \psi_2\}$ una coppia di vettori di \mathcal{S} . L'operatore $T_{\psi_2, \psi_1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$, che agisce sul generico vettore $x \in \mathcal{S}$ secondo la

$$T_{\psi_2, \psi_1}(x) := \langle \psi_1|x \rangle \psi_2$$

è lineare, per la linearità a destra del prodotto interno, e ammette come operatore aggiunto $(T_{\psi_2, \psi_1})^* = T_{\psi_1, \psi_2}$. Infatti,

$$\langle T_{\psi_2, \psi_1}(x)|y \rangle = \left\langle \langle \psi_1|x \rangle \psi_2 \mid y \right\rangle = \overline{\langle \psi_1|x \rangle} \langle \psi_2|y \rangle;$$

mentre

$$\langle x|T_{\psi_1, \psi_2}(y) \rangle = \left\langle x \mid \langle \psi_2|y \rangle \psi_1 \right\rangle = \langle \psi_2|y \rangle \langle x|\psi_1 \rangle.$$

■

Osservazione 15.1.8 Nell'uso della Fisica Teorica, il precedente operatore, utilizzando la cosiddetta notazione di Dirac, viene anche scritto nella forma

$$T_{\psi_2, \psi_1} = |\psi_2\rangle\langle\psi_1|$$

intendendo di applicarlo ad un vettore $\text{ket } |x\rangle \in \mathcal{S}$ per ottenere

$$T_{\psi_2, \psi_1} |x\rangle = (|\psi_2\rangle\langle\psi_1|) |x\rangle = \langle\psi_1|x\rangle |\psi_2\rangle.$$

Rispetto a questa notazione si ha

$$\left(|\psi_2\rangle\langle\psi_1|\right)^* = |\psi_1\rangle\langle\psi_2|.$$

Proposizione 15.1.9 *La classe di operatori $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ è chiusa rispetto alle operazioni algebriche di somma, di prodotto per scalari complessi e di composizione ed in più risulta:*

$$(i) \quad (T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$$

$$(ii) \quad (\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

$$(iii) \quad (T_1 \circ T_2)^* = T_1^* \circ T_2^*$$

$$(iv) \quad (T^*)^* = T.$$

Dimostrazione. (i) $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$: si ha

$$\begin{aligned} \langle (T_1 + T_2)x | y \rangle &= \langle T_1 x | y \rangle + \langle T_2 x | y \rangle = \\ &= \langle x | T_1^* y \rangle + \langle x | T_2^* y \rangle = \langle x | (T_1^* + T_2^*) y \rangle \end{aligned}$$

pertanto vale l'eguaglianza $\langle (T_1^* + T_2^*)x | y \rangle = \langle x | (T_1^* + T_2^*) y \rangle$ per ogni x, y e quindi $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ per la proprietà dell'unicità dell'aggiunto.

(ii) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$: avremo che

$$\langle (\lambda T)x | y \rangle = \bar{\lambda} \langle Tx | y \rangle = \langle x | (\bar{\lambda} T^*) y \rangle$$

e perciò $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$.

(iii) $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$: risulterà che

$$\langle (T_1 \circ T_2)x | y \rangle = \langle T_2 x | T_1^* y \rangle = \langle x | (T_2^* \circ T_1^*) y \rangle$$

da cui segue $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$.

(iv) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$: esiste T^* e per esso vale

$$\langle T^* x | y \rangle = \overline{\langle y | T^* y \rangle} = \overline{\langle T y | x \rangle} = \langle x | T y \rangle$$

ovvero $\langle T^* x | y \rangle = \langle x | T y \rangle$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$ e ciò prova che esiste l'aggiunto T^{**} di T e che questo è proprio T . □

Osservazione 15.1.10 La proprietà (iv) assicura che se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ pure $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ e quindi si può considerare l'applicazione $\mathcal{L}(\mathcal{S}) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{S}), T \mapsto T^*$ la quale, in quanto soddisfacente le proprietà (i) – (iv), è una *involuzione* di algebra. Pertanto, la classe di operatori $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ è un'algebra (associativa con unità) con involuzione, in generale non commutativa, o **-algebra non commutativa*.

Proposizione 15.1.11 *Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ allora valgono le due uguaglianze:*

$$(i) \ker(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$$

$$(ii) \ker(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$$

Dimostrazione. Poiché $T^*(y) = 0$ sse $\langle x|T^*y \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ sse $\langle Tx|y \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathcal{S}$, la (i) é dimostrata. D'altra parte, se nella (i) sostituiamo T^* al posto di T otteniamo $\ker(T^{**}) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$, e questa é la (ii). \square

Corollario 15.1.12 *Per ogni $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, $\ker(T)$ e $\ker(T^*)$ sono entrambi sottospazi di \mathcal{S} .*

Dimostrazione. Tenuto conto che il nucleo di un operatore é una variet  lineare, l'enunciato é una banale conseguenza del fatto che l'annichilatore A^\perp di un qualsiasi sottoinsieme A di \mathcal{S} é un chiuso di \mathcal{S} . \square

Proposizione 15.1.13 *Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, allora*

$$\mathcal{R}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp.$$

Dimostrazione. Da $\mathcal{R}(T) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}$ segue che $\overline{\mathcal{R}(T)}^\perp \subseteq \mathcal{R}(T)^\perp$. Sia $x \in \mathcal{R}(T)^\perp$, allora risulta che $\langle Ty|x \rangle = 0$ per ogni $y \in \mathcal{S}$. Se prendiamo un generico $z \in \overline{\mathcal{R}(T)}$, esiste una successione $\{y_n\}$ in \mathcal{S} tale che $z = \lim Ty_n$, da cui otteniamo $\langle z|x \rangle = \langle \lim Ty_n|x \rangle = \lim \langle Ty_n|x \rangle = 0$, ovvero $x \in \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$ concludendo che $\mathcal{R}(T)^\perp \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$. \square

Proposizione 15.1.14 *Nel caso di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , per ogni operatore limitato $T \in \mathcal{L}_B(\mathcal{H})$ avremo che*

$$\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \text{Ker}(T)^\perp$$

Dimostrazione. Dalla (ii), Proposizione 15.1.11 si ha che $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \text{Ker}(T)$ e dalla Proposizione 15.1.13 $\overline{\mathcal{R}(T^*)}^\perp = \text{Ker}(T)$; questi risultati implicano (tenuto presente che in uno spazio di Hilbert, per ogni sottospazio M si ha $M = M^{\perp\perp}$) $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \overline{\mathcal{R}(T^*)}^{\perp\perp} = \text{Ker}(T)^\perp$. \square

15.2 Operatori normali e Hermitiani

In questo paragrafo studieremo una particolare classe di operatori, secondo la seguente

Definizione 15.2.1 *Un operatore $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ si dice \mathcal{S} -normale (o semplicemente normale) sse risulta*

$$[T, T^*] = T \circ T^* - T^* \circ T = \mathbb{O}.$$

Col simbolo $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ denoteremo la classe di tutti gli operatori normali.

Proposizione 15.2.2 *Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ allora $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$ sse, qualunque sia $x \in \mathcal{S}$ si ha che $\|Tx\| = \|T^*x\|$.*

Dimostrazione. Sia $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$, allora per qualsiasi $x \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle Tx|Tx \rangle = \langle T^*x|x \rangle = \langle T^*Tx|x \rangle = \\ &= \langle TT^*x|x \rangle = \langle T^*x|T^*x \rangle = \|T^*x\|^2.\end{aligned}$$

Viceversa se per un qualsiasi $x \in \mathcal{S}$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$, risulta che

$$\langle TT^*x|x \rangle = \langle T^*x|T^*x \rangle = \|T^*x\|^2 = \|Tx\|^2 = \langle Tx|Tx \rangle = \langle T^*Tx|x \rangle.$$

La tesi segue quindi dalla Prop. 15.1.4 □

Proposizione 15.2.3 *Sia $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$, allora*

$$\ker(T) = \ker(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)^\perp.$$

Dimostrazione. Se $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$, da cui $\|Tx\| = 0$ sse $\|T^*x\| = 0$, ossia $Tx = \underline{0}$ sse $T^*x = 0$ e ciò prova la relazione $\ker(T) = \ker(T^*)$. Le ultime due uguaglianze seguono dalla Prop.15.1.11 □

Corollario 15.2.4 *Sia $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$; allora risulta*

$$\ker(T) = \ker(T)^{\perp\perp} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}(T) \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)} \subseteq \mathcal{R}(T)^{\perp\perp}.$$

Dimostrazione. In generale, per qualunque T , $\ker(T) \subseteq \ker(T)^{\perp\perp}$; inoltre, $\overline{\mathcal{R}(T)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)^{\perp\perp}} = \left(\overline{\mathcal{R}(T)^\perp}\right)^\perp = \mathcal{R}(T)^{\perp\perp}$, ove l'ultima uguaglianza segue dalla Prop.15.1.11. Quest'ultima maggiorazione, tenuto conto della Prop.15.2.3, conduce alla maggiorazione $\overline{\mathcal{R}(T)} \subseteq \ker(T)^\perp$, da cui si ottiene $\ker(T)^{\perp\perp} \subseteq \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp = \mathcal{R}(T)^\perp = \ker(T)$. Sempre dalla Prop.15.2.3 si ha $\ker(T)^\perp = \mathcal{R}(T)^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{R}(T)^{\perp\perp}}$. □

Riassumendo. Per ogni operatore normale $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$, i sottospazi di \mathcal{S} , $\overline{\mathcal{R}(T)}$ e $\ker(T)$ sono mutuamente ortogonali:

- (i) $\ker(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$;
- (ii) $\mathcal{R}(T) \subseteq \ker(T)^\perp$.

e inoltre varranno le relazioni

- (i) $\ker(T) = \ker(T)^{\perp\perp}$;
- (ii) $\overline{\mathcal{R}(T)} \subseteq \ker(T)^{\perp\perp}$.

In particolare, $\ker(T)$ é un ortospazio di \mathcal{S} .

Proposizione 15.2.5 *Nel caso di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , per ogni operatore limitato e normale $T \in \mathcal{N}_B(\mathcal{H})$ si ha che*

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \text{Ker}(T)^\perp$$

Dimostrazione. Dalla Proposizione 15.1.13 abbiamo che $\mathcal{R}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$ mentre dalla Proposizione 15.2.3 che $\mathcal{R}(T)^\perp = \text{Ker}(T)$; da questi risultati segue che $\overline{\mathcal{R}(T)}^\perp = \text{Ker}(T)$, i.e., $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(T)}^{\perp\perp} = \text{Ker}(T)^\perp$. \square

Esempio 15.2.6 Sia

$$\mathcal{C}_{//}^\infty[a, b] = \{\varphi : [a, b] \mapsto \mathbb{C} \mid \varphi \in \mathcal{C}^\infty[a, b], \forall n, \varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0\}$$

allora l'operatore di derivazione

$$\frac{d}{dx} : \mathcal{C}_{//}^\infty[a, b] \mapsto \mathcal{C}_{//}^\infty[a, b], \varphi \mapsto \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$$

ammette come operatore aggiunto

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx}\varphi \mid \psi \right\rangle &= \int_a^b \overline{\varphi'(x)} \psi(x) dx = \overline{\varphi(x)} \psi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \overline{\varphi(x)} \psi'(x) dx = \\ &= \left\langle \varphi \mid -\frac{d}{dx}\psi \right\rangle. \end{aligned}$$

L'operatore di derivazione $\frac{d}{dx}$ é normale in quanto

$$\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^* \circ \left(\frac{d}{dx}\right).$$

■

Esempio 15.2.7 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione fissata di classe \mathcal{C}^∞ , di buon comportamento all'infinito, ossia tale che $f(x)\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora l'operatore di moltiplicazione per f ,

$$\begin{aligned} Q_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(\underline{x}) &\mapsto (Q_f\varphi)(\underline{x}) = f(\underline{x})\varphi(\underline{x}) \end{aligned}$$

é ben posto e ammette come operatore aggiunto l'operatore

$$\begin{aligned} Q_f^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(\underline{x}) &\mapsto (Q_f^*\varphi)(\underline{x}) = \overline{f(\underline{x})}\varphi(\underline{x}) \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \langle Q_f\varphi \mid \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\underline{x})\varphi(\underline{x})} \psi(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\underline{x})} \left[\overline{f(\underline{x})}\varphi(\underline{x}) \right] d\underline{x} = \\ &= \langle \varphi \mid Q_f^*\psi \rangle \end{aligned}$$

Ovviamente Q_f é normale in quanto

$$(Q_f \circ Q_f^*)\varphi(\underline{x}) = f(\underline{x})\overline{f(\underline{x})}\varphi(\underline{x}) = \overline{f(\underline{x})}f(\underline{x})\varphi(\underline{x}) = (Q_f^* \circ Q_f)\varphi(\underline{x}).$$

■

Definizione 15.2.8 Un'operatore $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ si dice *Hermitiano* se risulta $A^* = A$.

Esempio 15.2.9 Procedendo come nel caso dell'esempio 15.2.6 si verifica che l'operatore

$$-i \frac{d}{dx} : \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty[a, b] \mapsto \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^\infty[a, b], \quad \varphi \mapsto -i \frac{d\varphi}{dx} = -i\varphi'$$

è hermitiano. Per abuso di linguaggio, in Meccanica Quantistica, questo operatore viene chiamato *operatore di derivazione*. ■

Esempio 15.2.10 Se nel caso dell'esempio 15.2.7 si prendono in esame funzioni a valori reali $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ allora gli operatori di moltiplicazione Q_f sono hermitiani. ■

La classe di tutti gli operatori Hermitiani è indicata col simbolo $\mathcal{O}(\mathcal{S})$. Ogni operatore Hermitiano è un operatore normale in quanto $[A, A^*] = [A, A] = \mathbb{O}$. Pertanto

$$\mathcal{O}(\mathcal{S}) := \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}) : A = A^*\} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{S}).$$

L'insieme $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ è non vuoto in quanto appartengono ad esso l'operatore nullo \mathbb{O} e l'operatore identico \mathbb{I} .

Dalle proprietà (i) - (iv), Prop. 15.1.9, si deducono le seguenti proprietà algebriche relative agli operatori hermitiani:

1. $(A_1 + A_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ per ogni $A_1, A_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$;
2. sia $A \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ allora $(\alpha A) \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ se e solo se $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. se $A_1, A_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ allora $(A_1 \circ A_2) \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ se e solo se $[A_1, A_2] = \mathbb{O}$.

Da queste proprietà segue che se A è un operatore hermitiano pure A^n , per qualunque intero positivo n , è un operatore hermitiano e quindi se $p(\lambda)$ è un qualunque polinomio a coefficienti reali nella indeterminata λ , anche $p(A)$ è un operatore hermitiano.

Abbiamo visto che l'operatore di commutazione $[A_1, A_2] = A_1 \circ A_2 - A_2 \circ A_1$ in generale non fornisce come risultato un operatore hermitiano. Un'operazione che risulta chiusa rispetto alla classe degli operatori hermitiani è l'operazione di *anticommutazione*; precisamente se A_1 e A_2 sono due operatori hermitiani si definisce *anticommutatore* dei due operatori l'operatore

$$[A_1, A_2]_+ := \frac{1}{2}(A_1 \circ A_2 + A_2 \circ A_1)$$

che è un operatore hermitiano come si può facilmente verificare. Se i due operatori A_1 e A_2 commutano, il loro anticommutatore è esattamente la composizione degli operatori in esame:

$$[A_1, A_2] = \mathbb{O} \quad \text{sse} \quad [A_1, A_2]_+ = A_1 \circ A_2.$$

In questo modo si ottiene facilmente che:

La struttura

$$(\mathcal{O}(\mathcal{S}), +, \cdot, \mathbb{R}, [\ , \]_+)$$

consistente dell'insieme $\mathcal{O}(\mathcal{S})$ degli operatori hermitiani munito delle usuali operazioni di somma, di prodotto per scalari reali e del prodotto di anticommutazione, è un'algebra associativa con unità \mathbb{I} abeliana.

Introdurremo ora un'altra operazione fra operatori, la *parentesi di Poisson*, che associa ad ogni coppia di operatori hermitiani un operatore che é ancora hermitiano. Precisamente l'operatore

$$\{A_1, A_2\} := -\frac{i}{\hbar}[A_1, A_2].$$

Verifichiamo infatti che esso é hermitiano

$$\begin{aligned} \{A_1, A_2\}^* &= \left(-\frac{1}{\hbar}[A_1, A_2]\right)^* = -\frac{\bar{i}}{\hbar}(A_1 \circ A_2 - A_2 \circ A_1)^* = \\ &= \frac{i}{\hbar}(A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2) = \{A_1, A_2\}. \end{aligned}$$

Inoltre é abbastanza facile verificare che l'insieme degli operatori hermitiani munito della operazione di somma, della operazione di moltiplicazione per scalari reali e della operazione parentesi di Poisson, é un'algebra di Lie reale:

$$(\mathcal{O}(\mathcal{S}), +, \cdot_{(\mathcal{R})}, \{, \}) .$$

Valgono le seguenti proprietà

1. $[A_1, A_2]_+ = \mathbb{O}$ sse $A_1 \circ A_2 = -A_2 \circ A_1$;
2. $\{A_1, A_2\} = \mathbb{O}$ sse $A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1$.

Nel primo caso diremo che i due operatori *anticommutano* mentre nel secondo caso diremo che essi *commutano*.

Pertanto, due operatori commutano sse la loro parentesi di Poisson é nulla, e ciò é equivalente a chiedere che la loro parentesi di commutazione sia nulla; mentre essi anticommutano sse la loro parentesi di anticommutazione é nulla.

Esempio 15.2.11 Dall'esempio precedente segue che gli operatori

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \cdot \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sono hermitiani in quanto

$$-\hbar \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \circ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Da ciò segue che se $m \neq 0$ é una costantew reale allora pure

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sono operatori hermitiani e quindi, in conclusione risulta essere hermitiano anche l'operatore Laplaciano su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x})$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$$

Infine se $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione a valori reali e di buon comportamento all'infinito, l'operatore

$$H : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x})$$

definito da

$$(H\psi)(\underline{x}) = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(\underline{x})\psi(\underline{x})$$

é hermitiano. ■

Proposizione 15.2.12 Sia $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, allora $A \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ sse $\langle Ax|x \rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione. Se $A \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$, per ogni $x \in \mathcal{S}$ risulta $\langle Ax|x \rangle = \langle x|Ax \rangle = \overline{\langle Ax|x \rangle}$ dunque $\langle Ax|x \rangle \in \mathbb{R}$.

Viceversa sia $\langle Ax|x \rangle \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathcal{S}$, dall'esistenza dell'aggiunto segue che $\langle Ax|x \rangle = \langle x|A^*x \rangle =$ (essendo per ipotesi $\langle Ax|x \rangle \in \mathbb{R}$) $= \langle A^*x|x \rangle$ per ogni $x \in \mathcal{S}$ da cui si deduce $A = A^*$. \square

Proposizione 15.2.13 Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, allora gli operatori

$$\frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

sono hermitiani.

Dimostrazione. Questa proposizione é una banale conseguenza delle proprietà (i)– (iv) della aggiunzione. \square

Da questo risultato e da quello che andremo ora a dimostrare, si può ritenere per analogia, che gli operatori hermitiani svolgano nei confronti degli operatori di $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ il ruolo svolto da numeri reali nei confronti dei numeri complessi.

Teorema 15.2.14 Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ esistono due operatori hermitiani A_1 e A_2 tali che

$$T = A_1 + iA_2$$

e tali operatori hermitiani sono univocamente determinati dall'operatore T dalle

$$A_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto che per ogni $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ i due operatori $\frac{1}{2}(T + T^*)$ e $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ sono hermitiani e quindi, indicandoli rispettivamente con A_1 e A_2 , si ha ovviamente $T = A_1 + iA_2$.

Supponiamo ora che $A_1 + iA_2 = B_1 + iB_2$ con A_1, A_2, B_1, B_2 hermitiani allora $(A_1 - B_1) = i(B_2 - A_2)$ cosicché si ha che

$$(1) \quad i \langle (B_2 - A_2)x|x \rangle \text{ é un numero reale per ogni } x \in \mathcal{S}.$$

Ma dalla hermitianità degli operatori B_2 e A_2 segue pure

$$(2) \quad \langle (B_2 - A_2)x|x \rangle \text{ é un numero reale per ogni } x \in \mathcal{S}.$$

La (1) e la (2) implicano necessariamente che per ogni $x \in \mathcal{S}$

$$\langle (B_2 - A_2)x|x \rangle = 0$$

da cui si ottiene $B_2 - A_2 = 0$, ovvero $B_2 = A_2$, da cui segue $A_1 = B_1$. \square

Osservazione 15.2.15 Dato un generico operatore $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, seguendo i risultati del precedente teorema, possiamo costruire i due operatori

$$A_1 = \frac{T + T^*}{2} \quad A_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

per i quali valgono le proprietà:

- (i) A_1 e A_2 sono hermitiani,
- (ii) A_1 e A_2 sono univocamente determinati da T ,
- (iii) $T = A_1 + iA_2$ e $T^* = A_1 - iA_2$.

Per questi motivi, e per le analogie vista sopra con i numeri complessi, l'operatore A_1 si chiama *parte reale* di T e l'operatore A_2 *parte immaginaria* di T , e a volte li denoteremo con $T^{(r)}$ e $T^{(i)}$ rispettivamente.

Esempio 15.2.16 L'operatore di derivazione $\frac{d}{dx}$ dell'esempio 15.2.6 ammette come parte reale e parte immaginaria gli operatori hermitiani

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{(r)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} - \overline{\frac{d}{dx}} \right] = \mathbb{O} \\ (d\overline{dx})^{(i)} &= \frac{1}{2i} \left[\frac{d}{dx} + \overline{\frac{d}{dx}} \right] = -id\overline{dx}. \end{aligned}$$

■

Esempio 15.2.17 Gli operatori di moltiplicazione dell'esempio 15.2.7 ammettono come parte reale e parte immaginaria rispettivamente

$$\begin{aligned} (Q_f)^{(r)} &= \frac{1}{2} [f(x)\mathbb{1} + \overline{f(x)}\mathbb{1}] = \text{Re}(f)\mathbb{1} \\ (Q_f)^{(i)} &= \frac{1}{2i} [f(x)\mathbb{1} - \overline{f(x)}\mathbb{1}] = \text{Im}(f)\mathbb{1}. \end{aligned}$$

■

Proposizione 15.2.18 Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ allora T é normale sse la sua parte reale e la sua parte immaginaria commutano.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} T \circ T^* &= (A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) = A_1^2 + A_2^2 - i[A_1, A_2] \\ T^* \circ T &= (A_1 - iA_2)(A_1 + iA_2) = A_1^2 + A_2^2 + i[A_1, A_2] \end{aligned}$$

pertanto $[T, T^*] = \mathbb{O}$ sse $[A_1, A_2] = \mathbb{O}$. □

Esempio 15.2.19 L'operatore di derivazione $\frac{d}{dx}$ dell'esempio 15.2.6 é normale in quanto la sua parte reale $\left(\frac{d}{dx}\right)^{(r)} = \mathbb{O}$ e la sua parte immaginaria $\left(\frac{d}{dx}\right)^{(i)} = -i\frac{d}{dx}$ commutano. ■

Esempio 15.2.20 Gli operatori di moltiplicazione Q_f dell'esempio 15.2.7 sono normali in quanto la loro parte reale $(Q_f)^{(r)} = \text{Re}(f)\mathbb{1}$ e quella immaginaria $(Q_f)^{(i)} = \text{Im}(f)\mathbb{1}$ commutano. ■

Proposizione 15.2.21 Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ allora

$$(i) \quad T \circ T^* \in \mathcal{O}(\mathcal{S});$$

(ii) $\ker(T^*) = \ker(T \circ T^*)$.

Dimostrazione. Si ha che $(T \circ T^*)^* = T^{**} \circ T^* = T \circ T^*$ e questo dimostra la (i).

Verifichiamo ora che $\ker(T^*) = \ker(T \circ T^*)$. La condizione $T^*x = \underline{0}$ implica $TT^*x = \underline{0}$ e viceversa se $TT^*x = \underline{0}$ allora $\|T^*x\|^2 = \langle T^*x | T^*x \rangle = \langle TT^*x | x \rangle = 0$.
□

Corollario 15.2.22 Se $A \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ allora $A^{2n} \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e in più, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\ker(A) = \ker(A^2) = \ker(A^{2n}).$$

Dimostrazione. Ovvvia conseguenza del punto (ii) del teorema precedente.
□

Esempio 15.2.23 Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno e siano ψ_1, ψ_2 due vettori fissati di \mathcal{S} . Facendo riferimento all'operatore T_{ψ_2, ψ_1} dell'esempio 15.1.7, il cui aggiunto é l'operatore $(T_{\psi_2, \psi_1})^* = T_{\psi_1, \psi_2}$, esso ha come parte reale l'operatore hermitiano $T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)} = \frac{1}{2}(T_{\psi_2, \psi_1} + T_{\psi_1, \psi_2})$, la cui azione sul generico vettore $x \in \mathcal{S}$ é data da

$$T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)}(x) := \frac{1}{2}(\langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 + \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1).$$

La parte immaginaria é l'operatore hermitiano $T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)} = \frac{1}{2i}(T_{\psi_2, \psi_1} - T_{\psi_1, \psi_2})$, la cui azione sul generico vettore $x \in \mathcal{S}$ é data da

$$T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)}(x) := \frac{1}{2i}(\langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 - \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1).$$

Questi due operatori in generale non commutano. Infatti, posto per semplicità $T^{(r)} = T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)}$ e $T^{(i)} = T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)}$, avremo che

$$\begin{aligned} (T^{(r)} \circ T^{(i)})(x) &= T^{(r)} \left[\frac{1}{2i} (\langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 - \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1) \right] = \\ &= \frac{1}{4i} \left[\langle \psi_1 | \langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 - \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1 \rangle \psi_2 + \langle \psi_2 | \langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 - \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1 \rangle \psi_1 \right] = \\ &= \frac{1}{4i} \left[(\langle \psi_1 | x \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle - \langle \psi_2 | x \rangle \|\psi_1\|^2) \psi_2 + (\langle \psi_1 | x \rangle \|\psi_2\|^2 - \langle \psi_2 | x \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle) \psi_1 \right]. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (T^{(i)} \circ T^{(r)})(x) &= T^{(i)} \left[\frac{1}{2} (\langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 + \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1) \right] = \\ &= \frac{1}{4i} \left[\langle \psi_1 | \langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 + \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1 \rangle \psi_2 - \langle \psi_2 | \langle \psi_1 | x \rangle \psi_2 + \langle \psi_2 | x \rangle \psi_1 \rangle \psi_1 \right] = \\ &= \frac{1}{4i} \left[(\langle \psi_1 | x \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + \langle \psi_2 | x \rangle \|\psi_1\|^2) \psi_2 - (\langle \psi_1 | x \rangle \|\psi_2\|^2 + \langle \psi_2 | x \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle) \psi_1 \right]. \end{aligned}$$

Si osservi che nel caso in cui la coppia di vettori $\{\psi_1, \psi_2\}$ costituiscono un sistema ortonormale si ha

$$\begin{aligned} \left(T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)} \circ T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)}\right)(x) &= \frac{1}{4i} [\langle \psi_1 | x \rangle \psi_1 - \langle \psi_2 | x \rangle \psi_2] \\ \left(T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)} \circ T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)}\right)(x) &= \frac{1}{4i} [\langle \psi_2 | x \rangle \psi_2 - \langle \psi_1 | x \rangle \psi_1] \end{aligned}$$

Questi due operatori anticommutano

$$\left[T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)}, T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)}\right]_+ = \mathbb{O},$$

(e quindi, per la Prop. 15.2.18, il corrispondente operatore T_{ψ_2, ψ_1} non é normale). ■

Osservazione 15.2.24 Nella notazione di Dirac i precedenti operatori vengono scritti nella forma

$$\begin{aligned} T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)} &= \frac{1}{2} (|\psi_2\rangle \langle \psi_1| + |\psi_1\rangle \langle \psi_2|) \\ T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)} &= \frac{1}{2i} (|\psi_2\rangle \langle \psi_1| - |\psi_1\rangle \langle \psi_2|). \end{aligned}$$

Mentre nel caso di un s.o.n. $\{\psi_1, \psi_2\}$ avremo che

$$\begin{aligned} T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)} \circ T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)} &= \frac{1}{4i} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| - |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) \\ T_{\psi_1, \psi_2}^{(i)} \circ T_{\psi_1, \psi_2}^{(r)} &= \frac{1}{4i} (|\psi_2\rangle \langle \psi_2| - |\psi_1\rangle \langle \psi_1|). \end{aligned}$$

Esempio 15.2.25 Nello spazio

$$\mathcal{C}_{//}^{\infty}[a, b] = \{\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}[a, b] : \varphi^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(b) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione fissata di classe \mathcal{C}^{∞} , l'operatore di moltiplicazione per f :

$$\begin{aligned} Q_f : \mathcal{C}_{//}^{\infty}[a, b] &\longrightarrow \mathcal{C}_{//}^{\infty}[a, b] \\ \varphi(x) &\longrightarrow (Q_f \varphi)(x) = f(x)\varphi(x) \end{aligned}$$

é ben posto in quanto

$$\left[D^{(n)}(f \cdot \varphi)\right](x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\varphi^{(n-k)}(x)$$

e quindi $f(x)\varphi(x)$ é di classe \mathcal{C}^{∞} e in piú da questa relazione segue che

$$\left[D^{(n)}(f \cdot \varphi)\right](a) = \left[D^{(n)}(f \cdot \varphi)\right](b) = 0.$$

L'operatore in esame é hermitiano in quanto il suo aggiunto

$$\left[(Q_f)^* \varphi\right](x) = \overline{f(x)}\varphi(x) = [Q_f \varphi](x).$$

Si osservi che con considerazioni analoghe si dimostra che l'operatore

$$\begin{aligned} Q_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(\mathbf{x}) &\longrightarrow (Q_f \varphi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

é ben posto e hermitiano per una qualsiasi fissata funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ .

Analogamente, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione di classe C^∞ di buon comportamento all'infinito, ossia tale che

$$f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

allora anche in questo caso l'operatore

$$\begin{aligned} Q_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(\mathbf{x}) &\longrightarrow (Q_f \varphi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

é ben posto e hermitiano. ■

Esempio 15.2.26 L'operatore

$$\frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{C}_{\text{II}}^\infty[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}_{\text{II}}^\infty[a, b]$$

é hermitiano. Infatti

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \mid \psi(x) \right\rangle &= \int_a^b \overline{\varphi(x)''} \psi(x) dx = \overline{\varphi(x)'} \psi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \overline{\varphi(x)'} \psi'(x) dx = \\ &= -\overline{\varphi(x)} \psi'(x) \Big|_a^b + \int_a^b \overline{\varphi(x)} \psi''(x) dx = \\ &= \left\langle \varphi(x) \mid \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Si osservi che questo operatore é il quadrato dell'operatore normale $\left(-\frac{d}{dx}\right)$,

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$
■

Esempio 15.2.27 Sia $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ uno degli spazi $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ oppure $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora l'operatore

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{dx} : \mathcal{E}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longrightarrow -i \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}$$

é hermitiano. Infatti

$$\begin{aligned} \left\langle -i \frac{d}{dx} \varphi \mid \psi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{d\overline{\varphi}}{dx} \psi(x) dx = i \overline{\varphi(x)} \psi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)} \psi'(x) dx = \\ &= \left\langle \varphi \mid -i \frac{d\psi}{dx} \right\rangle \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(-i \frac{d}{dx}\right) \circ \left(-i \frac{d}{dx}\right)$$

ne segue che é anche hermitiano l'operatore

$$\frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$$
■

Esempio 15.2.28 L'operatore

$$\frac{d^2}{dx^2} : \mathcal{C}^\infty[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}^\infty[a, b]$$

é hermitiano. Infatti

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) | \psi(x) \right\rangle &= \int_a^b \overline{\varphi(x)''} \psi(x) dx = \overline{\varphi(x)'} \psi(x) \Big|_a^b - \int_a^b \overline{\varphi(x)'} \psi'(x) dx = \\ &= -\overline{\varphi(x)} \psi'(x) \Big|_a^b + \int_a^b \overline{\varphi(x)} \psi''(x) dx = \\ &= \left\langle \varphi(x) | \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \right\rangle \end{aligned}$$

Si osservi che questo operatore é il quadrato dell'operatore normale $\left(-\frac{d}{dx}\right)$,

$$\left(-\frac{d}{dx}\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2}.$$

■

Esempio 15.2.29 Sia $\xi(\mathbb{R})$ uno degli spazi $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora l'operatore

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{dx} : \xi(\mathbb{R}) &\longrightarrow \xi(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longrightarrow -i \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}$$

é hermitiano. Infatti

$$\begin{aligned} \left\langle -i \frac{d}{dx} \varphi | \psi \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{d\overline{\varphi}}{dx} \psi(x) dx = i \overline{\varphi(x)} \psi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)} \psi'(x) dx = \\ &= \left\langle \varphi | -i \frac{d\psi}{dx} \right\rangle \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(-i \frac{d}{dx}\right) \circ \left(-i \frac{d}{dx}\right)$$

ne segue che é anche hermitiano l'operatore

$$\frac{d^2}{dx^2} : \xi(\mathbb{R}) \longrightarrow \xi(\mathbb{R}).$$

■

Teorema 15.2.30 Siano $\mathcal{S}, \hat{\mathcal{S}}$ due spazi con prodotto interno unitariamente isomorfi tramite l'operatore $\mathcal{V} : \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}$ allora se $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{S})$ l'operatore $\hat{A} = (\mathcal{V} \circ A \circ \mathcal{V}^{-2}) \in \mathfrak{A}(\hat{\mathcal{S}})$.

Dimostrazione. Ovviamente l'operatore

$$\hat{A} : \hat{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathcal{V}^{-1}} \mathcal{S} \xrightarrow{A} \mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{V}} \hat{\mathcal{S}}$$

é ben posto e lineare. Inoltre, per ogni $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{S}}$ e posto $\varphi = \mathcal{V}^{-1}\hat{\varphi}, \hat{\varphi} = \mathcal{V}^{-1}\hat{\psi}$ avremo

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}\hat{\varphi} | \hat{\psi} \rangle &= \left\langle \mathbb{U} A \mathbb{U}^{-1} \varphi | \mathbb{U} \psi \right\rangle = \langle \mathbb{U} A \varphi | \mathbb{U} \psi \rangle = \langle A \varphi | \psi \rangle = \\ &= \langle \vartheta | A \psi \rangle = \langle \mathcal{V}^{-1} \hat{\varphi} | A \mathcal{V}^{-1} \hat{\psi} \rangle = \left\langle \mathbb{U} \mathbb{U}^{-1} \hat{\varphi} | \mathbb{U} A \mathbb{U}^{-1} \hat{\psi} \right\rangle = \\ &= \langle \hat{\varphi} | \hat{A} \hat{\psi} \rangle. \end{aligned}$$

□

Esempio 15.2.31 Considerati gli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{\xi})$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{x})$ abbiamo che la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{\xi}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{x})$$

definita da

$$(\mathcal{F}\varphi)(\underline{x}) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{\hbar} \langle \underline{x} | \underline{\xi} \rangle} \varphi(\underline{\xi}) d\underline{\xi}$$

é un operatore unitario.

Osservato che le funzioni

$$f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n) \rightarrow f_i(\underline{\xi}) := -\xi_i$$

(per $i = 1, 2, \dots, n$) sono di buon comportamento all'infinito, dal precedente esempio segue che possiamo considerare gli operatori hermitiani di moltiplicazione

$$\begin{aligned} Q_i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{\xi}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{\xi}) && (\text{per } i = 1, 2, \dots, n) \\ \varphi(\underline{\xi}) &\longrightarrow (Q_i \varphi)(\underline{\xi}) := -\xi_i \cdot \varphi(\underline{\xi}) \end{aligned}$$

Dal teorema 6 ora dimostrato seguirà che saranno pure operatori hermitiani su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{x})$ gli operatori

$$\hat{Q}_i : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{x}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{x}) \quad (\text{per } i = 1, 2, \dots, n)$$

definiti da

$$\hat{Q}_i = \mathcal{F} \circ Q_i \circ \mathcal{F}^{-1}$$

Vediamo ora di dare una forma esplicita di questo operatore.

Sia $\psi(\underline{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{x})$ e indichiamo la sua trasformata in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \underline{\xi})$ secondo \mathcal{F}^{-1} nel seguente modo

$$y(\underline{\xi}) := (F^{-1}\psi)(\underline{\xi}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\hbar} \langle \underline{\xi} | \underline{x} \rangle} \psi(\underline{x}) d\underline{x} \quad (1)$$

da cui segue

$$y(\underline{x}) := (F^\psi)(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\hbar} \langle \underline{\xi} | \underline{x} \rangle} \psi(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad (2)$$

Allora

$$\begin{aligned}
 (\hat{Q}_i \psi)(\underline{x}) &= F[Q_i \varphi(\underline{\xi})] = F[-\bar{\xi}_i \varphi(\bar{\xi})] = \\
 &= \frac{-1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{\hbar} \langle \underline{x} | \underline{\xi} \rangle} \xi_i \varphi(\underline{\xi}) d\underline{\xi} = \\
 &= -\frac{i\hbar}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underline{\xi}) \left[-\frac{i}{\hbar} \underline{\xi} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \langle \underline{x} | \underline{\xi} \rangle} \right] d\underline{\xi} = \\
 &= \frac{-i\hbar}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{\frac{i}{\hbar} \langle \underline{x} | \underline{\xi} \rangle} \right) d\underline{\xi} = \\
 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\underline{\xi}) e^{-\frac{i}{\hbar} \langle \underline{x} | \underline{\xi} \rangle} d\underline{\xi} \right] = \text{dalla (2)} \\
 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\underline{x})
 \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto che gli operatori \hat{Q} su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x})$ sono espressi esplicitamente da

$$\hat{Q}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Potendo quindi concludere che gli operatori

$$\begin{aligned}
 -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot \underline{x}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \cdot x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 \mathcal{S} &\longrightarrow -i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

sono operatori hermitiani. ■

Capitolo 16

Operatori unitari in pre-Hilbert

16.1 Autovalori e autovettori di un operatore lineare

Sia \mathcal{S} uno spazio con prodotto interno denso nello spazio di Hilbert \mathcal{H} e $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ un operatore lineare; si dice che l'elemento

$$(\lambda, x) \in \mathbb{C}x[\mathcal{S} \setminus \{0\}]$$

costituisce una coppia *autovalore–autovettore* sse

$$Tx = \lambda x$$

Equivalentemente si dice che $\lambda \in \mathbb{C}$ é un *autovalore* dell'operatore T sse esiste un vettore $x \in \mathcal{S}$ *non nullo* tale che $Tx = \lambda x (x \neq 0)$.

Proposizione 16.1.1 *Sia $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ un operatore lineare le due proposizioni sono equivalenti:*

- (i) λ é un autovalore di T
- (ii) l'operatore $(T - \lambda I)$ non é iniettivo.

Dimostrazione. Se λ é un autovalore di T allora esiste $x \neq 0$ tale che $(T - \lambda I)x = 0$. D'altra parte é banale che $(T - \lambda I)0 = 0$ e perciò l'operatore $(T - \lambda I)$ non é iniettivo.

Viceversa, se $(T - \lambda I)$ non é iniettivo esistono due vettori diversi $x_1, x_2 \in \mathcal{S}, x_1 \neq x_2$ tali che

$$(T - \lambda I)x_1 = (T - \lambda I)x_2.$$

Allora $x_1 - x_2 \neq 0$ e in piú $(T - \lambda I)(x_1 - x_2) = 0$. □

Esempio 16.1.2 *Autovalore di un operatore matriciale*

Se \mathcal{S} é uno spazio con prodotto interno finito dimensionale con $\dim \mathcal{S} = n$ sappiamo che $\mathcal{S} \equiv \mathbb{C}^n$, ossia che é identificabile con \mathbb{C}^n tramite un opportuno operatore unitario U_α e che ogni operatore $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ può essere rappresentato tramite un operatore matriciale $M(T) = \{a_{ij}\}$.

Dalla Proposizione precedente si ricava che λ é un autovalore di T se e solo se λ é un autovalore della matrice $M(T)$, che d'ora in avanti indicheremo più semplicemente con T . ■

Proposizione 16.1.3 *Le seguenti due proposizioni sono equivalenti:*

(i) λ é un autovalore di T

(ii) $\det(T - \lambda I) = 0$

Dimostrazione. λ é un autovalore di T sse esiste $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ non nullo tale che $(T - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$, ma per la regola di Kramer ciò é possibile sse $\det(T - \lambda I) = 0$. □

Esempio 16.1.4 Gli autovalori dell'operatori di spin $\delta_x : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definito dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono tutti e solo quei numeri complessi λ per i quali

$$\det(\delta_x - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

ossia δ_x possiede i due soli autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. ■

Nel caso degli spazi di dimensione finita l'equazione

$$\det(T - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

si chiama *equazione caratteristica* o *equazione secolare* di T . Il Polinomio $\det(T - \lambda I) = (a_{11}a_{22} \dots a_{nn})\lambda^n +$ (termini di grado $< n$) si chiama polinomio *caratteristico* ed é un polinomio di grado n . Nel campo complesso un polinomio di grado n possiede n radici non necessariamente distinte e perciò T possiede al più n autovalori distinti.

L'insieme degli autovalori dell'operatore T é detto spettro puntuale o discreto di T e viene indicato con $\delta_p(T)$. Pertanto

$$\delta_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \underline{x} \neq \underline{0} \text{ t.c. } T\underline{x} = \lambda \underline{x}\}$$

Osservazione 16.1.5 Dall'esempio 16.1.4 si ricava che ogni operatore matriciale possiede almeno un autovalore per cui in questo caso lo spettro puntuale é non vuoto. *Però esistono operatori con spettro puntuale vuoto.*

Esempio 16.1.6 Sia dato l'operatore

$$Q : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}), \psi(x) \rightarrow (Q\psi)(x) := x\psi(x)$$

verifichiamo che il suo spettro puntuale é vuoto.

Infatti se esistesse $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tale che

$$(Q\psi)(x) = \lambda\psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{R}$$

dovrebbe essere

$$(1) \quad (x - \lambda)\psi(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{R}$$

e l'unica funzione di $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ (i cui elementi sono in particolare funzioni continue) soddisfacente la precedente condizione e la funzioni identicamente nulla $\psi = \underline{0}$. Osserviamo che se si considera Q come un operatore opportunamente definito in $L_2(\mathcal{R})$, anche in questo caso esso possiede spettro puntuale vuoto in quanto l'eventuale funzione soddisfacente la (1) é

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq \lambda \\ k & \text{per } x = \lambda \end{cases}$$

con k arbitrario. Ma in $L_2(\mathcal{R})$ questa funzione é uguale q. d. alla funzione nulla e perciò é un elemento rappresentativo del vettore nullo di $L_2(\mathcal{R})$. ■

Esempio 16.1.7 L'operazione

$$P : \mathcal{S}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{R}), \psi(x) \rightarrow (P\psi)(x) := -i\hbar \frac{d\psi}{dx}$$

ha spettro puntuale vuoto.

Infatti la corrispondente equazione agli autovalori assume la forma dell'equazione differenziale

$$\psi'(x) = i\frac{\lambda}{\hbar}\psi(x)$$

la cui soluzione generale é data dalla funzione

$$\psi_\lambda(x) = ke^{\frac{i}{\hbar}(\lambda x)}$$

Questa funzione per $k \neq 0$ non é un elemento di $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ (e nemmeno di $L_2(\mathcal{R})$) mentre per $k = 0$ si riduce alla funzione nulla. ■

Esempio 16.1.8 L'operatore isometrico di shift (destra) ha spettro puntuale vuoto. Sia $\{\mathcal{U}_n\}$ un sonc di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} separabile $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ l'operatore isometrico di shift definito da

$$S(x) = \sum \langle \mathcal{U}_n | x \rangle \mathcal{U}_{n+1}$$

che può essere univocamente determinato dall'azione sul generico elemento del s.o.n.c.

$$S(\mathcal{U}_n) = \mathcal{U}_{n+1}$$

Il suo aggiunto S^* é definito nel seguente modo:

$$\begin{cases} S^*(\mathcal{U}_1) = \underline{0} \\ S^*(\mathcal{U}_n) = \mathcal{U}_{n-1} \quad \text{per } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Supponiamo che $Sx = \lambda x$ e verifichiamo che necessariamente $x = \underline{0}$ allora $Sx = \underline{0}$ ed essendo S iniettivo $x = \underline{0}$. Sia $\lambda \neq 0$, allora

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathcal{U}_n | x \rangle \mathcal{U}_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \langle \mathcal{U}_{n-1} | x \rangle \mathcal{U}_n$$

da cui

$$\langle \mathcal{U}_1 | Sx \rangle = \left\langle \mathcal{U}_1 \left| \sum_{n=2}^{\infty} \langle \mathcal{U}_{n-1} | x \rangle \mathcal{U}_n \right. \right\rangle = 0$$

e quindi $\lambda \langle \mathcal{U}_1 | x \rangle = 0$ da cui $\langle \mathcal{U}_n | x \rangle = 0$. Inoltre, per $n > 1$,

$$\langle \mathcal{U}_n | Sx \rangle = \left\langle \mathcal{U}_n \left| \sum_{k=2}^{\infty} \langle \mathcal{U}_{k-1} | x \rangle \mathcal{U}_k \right. \right\rangle = \langle \mathcal{U}_{n-1} | x \rangle$$

con

$$\langle \mathcal{U}_n | Sx \rangle = \lambda \mathcal{U}_n x$$

e quindi

$$\langle \mathcal{U}_{n-1} | x \rangle = \frac{\langle \mathcal{U}_{n-1} | x \rangle}{\lambda}$$

per $n > 1$: ma essendo $\lambda \neq 0$ e $\langle \mathcal{U}_1 | x \rangle = 0$ sarà $\langle \mathcal{U}_n | x \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 16.1.9

- (i) Se A è un operatore hermitiano, gli autovalori di A , se esistono, sono reali.
- (ii) Se U è un operatore isometrico, i suoi autovalori sono numeri complessi di modulo unitario.

Dimostrazione.

- (i) $\lambda \in \delta_p(A)$, allora esiste $x_\lambda \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ tale che $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$ da cui si ottiene che

$$\langle Ax_\lambda | x_\lambda \rangle = \langle x_\lambda | Ax_\lambda \rangle = \langle x_\lambda | \lambda x_\lambda \rangle = \overline{\langle Ax_\lambda | x_\lambda \rangle}$$

ovvero $(\bar{\lambda} - \lambda) \|x_\lambda\|^2 = 0$. Ma essendo $\|x_\lambda\|^2 \neq 0$ non potrà che essere $\lambda = \bar{\lambda}$.

- (ii) Analogamente se $x_\lambda \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ è un autovettore dell'operatore U corrispondente all'autovalore $\lambda \in \delta_p(U)$ sarà $\|x_\lambda\|^2 = \langle Ux_\lambda | Ux_\lambda \rangle = |i|^2 \|x_\lambda\|^2$ da cui $|\lambda|^2 = 1$. □

Sia λ un autovalore dell'operatore T definiamo

$$M_T(\lambda) := \{x \in \mathcal{S} : Tx = \lambda x\}.$$

Facciamo osservare che $0 \in M_T(\lambda)$, ma essendo $\lambda \in \delta_p(T)$ l'insieme $M_T(\lambda)$ contiene almeno un vettore di \mathcal{S} non banale. Pertanto $M_T(\lambda) \neq \{0\}$.

Teorema 16.1.10 Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ e $\lambda \in \delta_p(T)$ allora $M_T(\lambda)$ è un sottospazio di \mathcal{S} .

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $0 \in M_T(\lambda)$. Siano $x_1, x_2 \in M_T(\lambda)$ allora $Tx_1 = \lambda x_1$ e $Tx_2 = \lambda x_2$ da cui $T(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$ e perciò pure $(x_1 + x_2) \in M_T(\lambda)$. In maniera analoga si ottiene che se $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in M_T(\lambda)$ pure $(\alpha x) \in M_T(\lambda)$.

Rimane da dimostrare che se $x \in \overline{M_T(\lambda)}$ allora $x \in M_T(\lambda)$. Sia $x \in \overline{M_T(\lambda)}$ esiste una successione $\{x_n^{(\lambda)} \subseteq M_T(\lambda)\}$ tale che $\lim x_n^{(\lambda)} = x$, d'altra parte ogni

$x_n^{(\lambda)}$ é un autovettore di T corrispondente all'autovalore λ e pertanto risulta $(T - \lambda I)x_n^{(\lambda)} = \underline{0}$ per ogni n . Da ciò si deduce

$$0 = \left\langle (T - \lambda I)x_n^{(\lambda)} \mid (T - \lambda I)x \right\rangle = \left\langle x_n^{(\lambda)} \mid (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)x \right\rangle$$

e, per la continuità del prodotto interno

$$\begin{aligned} 0 &= \lim \left\langle x_n^{(\lambda)} \mid (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)x \right\rangle = \left\langle \lim x_n^{(\lambda)} \mid (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)x \right\rangle = \\ &= \langle x \mid (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)x \rangle = \|(T - \lambda I)x\|^2 \end{aligned}$$

ovvero $(T - \lambda I)x = \underline{0}$. □

Esempio 16.1.11 Abbiamo visto che l'operatore componente x dello spin $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possiede i due autovalori $-1, 1$. Sarà allora

$$\begin{aligned} M_{\sigma_x}(-1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} : \sigma_x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} = - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \{(\alpha, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

analogamente si ottiene che $M_{\sigma_x}(1) = \{(\beta, \beta) : \beta \in \mathbb{C}\}$. ■

Definizione 16.1.12 Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$ e $\lambda \in \sigma_p(T)$ il sottospazio di \mathcal{S}

$$M_T(\lambda) = \{x \in \mathcal{S} : Tx = \lambda x\}$$

si chiama *autospazio di T corrispondente all'autovalore λ* . Chiaramente, la *diminuzione ortogonale* sarà $\dim(M_T(\lambda)) \geq 1$. Se $\dim(M_T(\lambda)) = 1$ l'autovalore λ si dice *non degenerare* mentre in tutti gli altri casi λ si dirà *degenerare con grado di degenerazione dato da $\dim(M_T(\lambda))$* .

Osservazione 16.1.13 L'operatore T agisce sull'autospazio $M_T(\lambda)$ come l'operatore λ volte l'operatore identico su $M_T(\lambda)$:

$$T^?(M_T(\lambda)) = \lambda I_{m_T(\lambda)}.$$

l'operatore $I : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ ammette come unico autovalore 1 che é n volte degenerare mentre $I : l_2(\mathbb{C}) \rightarrow l_2(a)$ come unico autovalore 1 che é infinito numerabile degenerare.

$T \in \mathcal{W}(\mathcal{S})$ implica $(T - \lambda I) \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$ per ogni λ .

Proposizione 16.1.14 Sia $T \in \mathcal{N}(\mathcal{S})$ allora $\|Tx - \lambda x\| = \|T^\alpha x - \bar{\lambda}x\|$ da cui seguono i seguenti risultati

- (i) $Tx = \lambda x$ sse $T^\alpha x = \bar{\lambda}x$
- (ii) $\lambda \in \sigma_p(T)$ sse $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^\alpha)$
- (iii) $M_T(\lambda) = M_{T^\alpha}(\bar{\lambda})$

16.2 L'operatore di parità: esempio di operatore contemporaneamente unitario e hermitiano

Nello spazio di Hilbert $L_2(\mathcal{R}^n)$, si consideri una varietà lineare $\xi(\mathcal{R}^n)$ densa in $L_2(\mathcal{R}^n)$ soddisfacente la condizione:

$$\psi(-\underline{x}) \in \xi(\mathcal{R}^n) \quad \text{per ogni} \quad \psi(\underline{x}) \in L_2(\mathcal{R}^n).$$

Chiaramente gli spazi di funzioni prova $\mathcal{D}(\mathcal{R}^n), \mathcal{S}(\mathcal{R}^n)$ e lo stesso spazio di Hilbert $L_2(\mathcal{R}^n)$ soddisfano questa condizione. Consideriamo l'operatore di parità e definito da

$$(\Phi\varphi)(\underline{x}) := \varphi(-\underline{x})$$

Proposizione 16.2.1 *L'operatore di parità è lineare e nilpotente, ossia soddisfa la condizione: $\Phi^2 = I$.*

Osservazione 16.2.2 Dal risultato precedente segue immediatamente che l'operatore di parità Φ è invertibile con inverso $\Phi^{-1} = \Phi$. Inoltre, si ha che

$$\Phi^n = \begin{cases} I, & \text{per } n \text{ pari} \\ \Phi, & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Proposizione 16.2.3 *L'operatore di parità è hermitiano.*

Dimostrazione. Considerata la trasformazione di coordinate

$$g : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n, \underline{x} \rightarrow g(\underline{x}) := -\underline{x}$$

che ammette come trasformazione inversa di coordinate

$$g^{-1} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n, \underline{x} \rightarrow g^{-1}(\underline{x}) = -\underline{x} = (-x_1, \dots, -x_i, \dots, -x_n)$$

le cui componenti scalari sono le n funzioni

$$(g^{-1})_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}, \underline{x} \rightarrow (g^{-1})_i(\underline{x}) = -x_i.$$

La matrice Jacobiana associata alla trasformazione di coordinate g^{-1} sarà allora

$$J_{g^{-1}}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & -1, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\|(J_{g^{-1}}(\underline{x}))\| = \|(-1)^n\| = 1$$

da questo risultato segue che, qualunque siano $\varphi, \psi \in \xi(\mathcal{R}^n)$, si avrà

$$\begin{aligned} \langle \phi\varphi | \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(-\underline{x})} \psi(\underline{x}) d(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(g^{-1}(-\underline{x}))} \psi(J^{-1}(\underline{x})) \|J_{g^{-1}}(\underline{x})\| d\underline{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\underline{x})} \psi(-\underline{x}) d\underline{x} = \langle \varphi | \phi\psi \rangle. \end{aligned}$$

□

Corollario 16.2.4 *L'operatore di parità é contemporaneamente unitario e hermitiano.*

Dimostrazione. Poiché l'operatore di parità é invertibile con inverso $\Phi^{-1} = \Phi$ é hermitiano, $\Phi = \Phi^*$, avremo che esso é invertibile con $\Phi^{-1} = \Phi = \Phi^*$ e quindi é unitario. \square

Osservazione 16.2.5 Dal fatto che Φ é hermitiano segue che il suo spettro puntuale deve essere un sottoinsieme di \mathcal{R} e dal fatto che esso é unitario segue che i suoi autovalori hanno modulo 1. Pertanto i soli possibili autovalori di Φ sono +1 e -1.

Proposizione 16.2.6 *Lo spettro puntuale dell'operatore di parità é*

$$\sigma_p(\Phi) = \{+1, -1\}$$

I corrispondenti autospazi sono

$$\mathcal{M}_\phi(+1) = \{\varphi \in \xi(\mathcal{R}^n) : \varphi(\underline{x}) = \varphi(-\underline{x})\}$$

$$\mathcal{M}_\phi(-1) = \{\psi \in \xi(\mathcal{R}^n) : \psi(\underline{x}) = -\psi(-\underline{x})\}$$

pertanto, gli autovettori corrispondenti dell'autovalore +1 sono le funzioni pari di $\xi(\mathcal{R}^n)$ mentre gli autovettori corrispondenti dell'autovalore -1 sono le funzioni dispari di $\xi(\mathcal{R}^n)$.

Dimostrazione. Dalla nilpotenza dell'operatore di parità segue che se $\Phi\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$ allora $\varphi_\lambda = \Phi^2\varphi_\lambda = \Phi(\lambda\varphi_\lambda) = \lambda^2\varphi_\lambda$ da cui otteniamo che $(1 - \lambda^2)\varphi_\lambda = \underline{0}$ ovvero $\lambda^2 = 1$ con $\lambda \in \mathcal{R}$.

Considerato ora l'autovalore +1 avremo che un generico autovettore corrispondente a questo autovalore deve soddisfare la equazione $\Phi\varphi = \varphi$ ovvero $\varphi(-\underline{x}) = \varphi(\underline{x})$. Mentre per il generico autovettore corrispondente all'autovalore -1 deve valere la equazione $\Phi\varphi = -\varphi$, ossia $\varphi(\underline{x}) = -\varphi(-\underline{x})$. \square

Proposizione 16.2.7 *I seguenti operatori*

$$P_+ : \xi(\mathcal{R}^n) \rightarrow \xi(\mathcal{R}^n) \quad e \quad P_- : \xi(\mathcal{R}^n) \rightarrow \xi(\mathcal{R}^n)$$

definiti dalle relazioni

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + \Phi)$$

$$P_- = \frac{1}{2}(I - \Phi)$$

sono proiettori ortogonali soddisfacenti la proprietà : $P_+ + P_- = I$.

Dimostrazione. Gli operatori P_+ e P_- sono lineari, limitati e hermitiani in quanto sia I che Φ sono lineari e hermitiani.

Inoltre

$$\begin{aligned}
 P_+^2 &= \left[\frac{1}{2}(I + \phi) \right] \circ \left[\frac{1}{2}(I + \phi) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[I \circ \frac{1}{2}(I + \phi) + \phi \circ \frac{1}{2}(I + \phi) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}\phi^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}I \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[I + \phi \right] = P_+
 \end{aligned}$$

In maniera analoga si dimostra l'idempotenza di P_- . □

Proposizione 16.2.8

- (i) Il proiettore ortogonale P_+ proietta su $\mathcal{M}_\phi(+1)$
- (ii) Il proiettore ortogonale P_- proietta su $\mathcal{M}_\pi(-1)$

Dimostrazione. Sappiamo che $\varphi \in \mathcal{R}(P_+)$ sse $P_+\varphi = \varphi$ ovvero sse

$$\begin{aligned}
 \varphi(\underline{x}) &= \frac{1}{2}[I + \phi]\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{2}[\varphi(\underline{x}) + \varphi(-\underline{x})] \\
 \frac{1}{2}\varphi(\underline{x}) &= \frac{1}{2}\varphi(-\underline{x}) \\
 \varphi(\underline{x}) &= \varphi(-\underline{x}) \quad \text{sse } \varphi \in \mathcal{M}_\phi(1).
 \end{aligned}$$

Pertanto il sottospazio $\mathcal{R}(P_+)$ su cui proietta P_+ è proprio l'autospazio $\mathcal{M}_\phi(1)$. Analogamente si verifica che il sottospazio $\mathcal{R}(P_-)$ su cui proietta P_- è l'autospazio $\mathcal{M}_\phi(-1)$. □

Osservazione 16.2.9 Dal fatto che l'operatore di parità è in particolare, normale segue che $\mathcal{M}_\phi(1) \perp \mathcal{M}_\phi(-1)$ e quindi $P_+ \perp P_-$. Questo risultato si può ottenere direttamente dalla definizione degli operatori P_+ e P_- verificando che $P_+ \circ P_- = P_- \circ P_+ = \mathbb{0}$.

Proposizione 16.2.10 I due autospazi $\mathcal{M}_\phi(1) \perp \mathcal{M}_\phi(-1)$ sono mutualmente supplementari nel senso che valgono le proposizioni

- (i) $\mathcal{M}_\phi(1) \perp \mathcal{M}_\phi(-1)$
- (ii) $\xi(\mathcal{R}^n) = \mathcal{M}_\phi(1) \oplus \mathcal{M}_\phi(-1)$.

Dimostrazione. Dal fatto che $\mathcal{M}_\phi(1) \perp \mathcal{M}_\phi(-1)$ segue che $\mathcal{M}_\phi(1) \cap \mathcal{M}_\phi(-1) = \{0\}$. Inoltre essendo $P_+ + P_- = I$ avremo che per ogni vettore $\varphi \in \xi(\mathcal{R}^n)$ sarà $\varphi = P_+\varphi + P_-\varphi$ con $P_+\varphi \in \mathcal{M}_\phi(1)$, $P_-\varphi \in \mathcal{M}_\phi(-1)$. □

Definizione 16.2.11 Preso un qualsiasi vettore $\varphi \in \xi(\mathcal{R}^n)$ e posto

$$\varphi_+(\underline{x}) := (P_+\varphi)(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left[\varphi(\underline{x}) + \varphi(-\underline{x}) \right] \in \mathcal{M}_\phi(1)$$

$$\varphi_-(\underline{x}) := (P_-\varphi)(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left[\varphi(\underline{x}) - \varphi(-\underline{x}) \right] \in \mathcal{M}_\phi(-1)$$

la funzione φ_+ si chiama ‘parte pari’ della funzione φ mentre la funzione φ_- si chiama ‘parte dispari’ della funzione φ .

16.3 Le matrici di Pauli

Le tre matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

intese come operatori matriciali definiti sullo spazio di Hilbert \mathcal{C}^2 , sono caratterizzate dall’aver lo stesso spettro puntuale in quanto, come é facile verificare, esse hanno gli stessi autovalori $+1$ e -1 .

Considereremo ora tre casi separatamente *Matrice di Pauli σ_x* .

Abbiamo già osservato che questo operatore ammette i due soli autovalori $+1$ e -1 .

Proposizione 16.3.1 *Gli autospazi corrispondenti agli autovalori dell’operatore σ_x sono*

$$\mathcal{M}_{\sigma_x}(+1) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \mathcal{C} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{\sigma_x}(-1) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : a \in \mathcal{C} \right\}$$

questi autospazi sono monodimensionali e quindi i due autovalori sono non degeneri.

Dimostrazione. Il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di \mathcal{C}^2 é un autovettore di σ_x corrispondente all’autovalore $+1$ sse

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui $a = b$.

Analogamente per l’autovalore -1 avremo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui $b = -a$. □

Corollario 16.3.2 *I due autospazi*

$$\mathcal{M}_{\sigma_x}(+1) \oplus \mathcal{M}_{\sigma_x}(-1) = \mathbb{C}^2$$

Dimostrazione. Dal fatto che σ_x é un operatore autoaggiunto su \mathbb{C}^2 sappiamo che gli autospazi corrispondenti ad autovettori distinti sono ortogonali. Poiché i due autospazi sono monodimensionali e lo spazio \mathbb{C}^2 é bidimensionale, la tesi é dimostrata. \square

Proposizione 16.3.3 *I seguenti operatori $P_{\sigma_x}(+1)$ e $P_{\sigma_x}(-1)$ definiti su \mathbb{C}^2 dalle relazioni*

$$P_{\sigma_x}(+1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\sigma_x}(-1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono i proiettori ortogonali che proiettano rispettivamente su $\mathcal{M}_{\sigma_x}(+1)$ e $\mathcal{M}_{\sigma_x}(-1)$. Essi soddisfano inoltre la proprietà:

$$P_{\sigma_x}(+1) + P_{\sigma_x}(-1) = I.$$

Dimostrazione. I due vettori ortogonali $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ costituiscono una base di \mathbb{C}^2 e quindi ogni vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di \mathbb{C}^2 verrà decomposto rispetto a questa base nella seguente forma:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

\square

Matrice di Pauli σ_y .

Anche questo operatore matriciale ammette i due soli autovalori +1 e 1.

Proposizione 16.3.4 *Gli autospazi corrispondenti agli autovalori dell'operatore σ_y sono*

$$\mathcal{M}_{\sigma_y}(+1) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathcal{M}_{\sigma_y}(-1) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

questi autospazi sono monodimensionali e quindi i due autovalori sono non degeneri.

Dimostrazione. Il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di \mathbb{C}^2 é un autovettore di σ_y corrispondente all'autovalore +1 sse

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} -1b \\ ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui $b = ia$.

Analogamente per l'autovalore -1 avremo

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} -1b \\ ia \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui $b = -ia$. \square

In maniera analoga a quanto dimostrato per σ_x si verifica il

Corollario 16.3.5 *I due spazi $\mathcal{M}_{\sigma_y}(+1)$ e $\mathcal{M}_{\sigma_y}(-1)$ sono ortogonali e decompongono lo spazio \mathcal{C}^2 nella somma diretta*

$$\mathcal{C}^2 = \mathcal{M}_{\sigma_y}(+1) \oplus \mathcal{M}_{\sigma_y}(-1).$$

Da questo risultato segue immediatamente la

Proposizione 16.3.6 *Gli operatori $P_{\sigma_y}(+1)$ e $P_{\sigma_y}(-1)$ definiti su \mathcal{C}^2 dalle relazioni*

$$P_{\sigma_y}(+1) = \frac{a-ib}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$P_{\sigma_y}(-1) = \frac{a+ib}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

sono proiettori ortogonali che proiettano rispettivamente su $\mathcal{M}_{\sigma_y}(+1)$ e $\mathcal{M}_{\sigma_y}(-1)$.

Dimostrazione. Il sistema ortogonale di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ è una base dello spazio \mathcal{C}^2 e il generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ di questo spazio verrà decomposto rispetto a questa base nella forma:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a-ib}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{a+ib}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

□

Proposizione 16.3.7 *Utilizzando i proiettori ortogonali $P_{\sigma_x}(+1), P_{\sigma_x}(-1), P_{\sigma_y}(+1), P_{\sigma_y}(-1)$ possiamo costruire i seguenti operatori su \mathcal{C}^2 :*

1. $\left[P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(+1) \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(a+b)(1-i)}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
2. $\left[P_{\sigma_y}(-1) \circ P_{\sigma_x}(+1) \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(a+b)(1+i)}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
3. $\left[P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(-1) \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(a-b)(1+i)}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
4. $\left[P_{\sigma_y}(-1) \circ P_{\sigma_x}(-1) \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{(a-b)(1-i)}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Dimostrazione. Banale. □

Osservazione 16.3.8 Facciamo notare che questi operatori, in quanto ottenuti dalla composizione di due proiettori ortogonali che non commutano, non sono nemmeno autoaggiunti. Si può verificare ciò con un calcolo diretto. Per esempio

$$\left\langle P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1+i}{2}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1-i}{2}$$

Corollario 16.3.9 *A partire dagli operatori della proposizione precedente si ottiene che:*

1. $P_{\sigma_x}(+1) \circ P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(+1) = \frac{1}{2}P_{\sigma_x}(+1)$
2. $P_{\sigma_x}(+1) \circ P_{\sigma_y}(-1) \circ P_{\sigma_x}(+1) = \frac{1}{2}P_{\sigma_x}(+1)$
3. $P_{\sigma_x}(-1) \circ P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(-1) = \frac{1}{2}P_{\sigma_x}(-1)$
4. $P_{\sigma_x}(-1) \circ P_{\sigma_y}(-1) \circ P_{\sigma_x}(-1) = \frac{1}{2}P_{\sigma_x}(-1)$

Da cui si ricava che

$$\begin{aligned} & \left(P_{\sigma_x}(+1) \circ P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(+1) \right) + \left(P_{\sigma_x}(-1) \circ P_{\sigma_y}(+1) \circ P_{\sigma_x}(-1) \right) = \frac{1}{2}\mathbb{I} \\ & \left(P_{\sigma_x}(+1) \circ P_{\sigma_y}(-1) \circ P_{\sigma_x}(+1) \right) + \left(P_{\sigma_x}(-1) \circ P_{\sigma_y}(-1) \circ P_{\sigma_x}(-1) \right) = \frac{1}{2}\mathbb{I}. \end{aligned}$$

16.4 Operatori unitari da uno spazio in se

Teorema 16.4.1 *Sia $U := \mathcal{L}(\mathcal{S})$ allora le seguenti asserzioni sono equivalenti*

- (i) $U \cdot U^* = U^* \circ U = \mathbb{I}$
- (ii) $R(U) = \mathcal{S}, \langle Ux|Uy \rangle = \langle x|y \rangle$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$
- (iii) $R(U) = \mathcal{S}, \|Ux\| = \|x\|$ per ogni $x \in \mathcal{S}$
- (iv) U é invertibile con inverso tale che $U^{-1} = U^*$.

Dimostrazione. Sia vera la (i). Da $UU^* = \mathbb{I}$ segue che $U(U^*(y)) = y$ per ogni $y \in \mathcal{S}$. Quindi, per ogni $y \in \mathcal{S}$ esiste $x = U^*y$ tale che $Ux = y$ e ciò dimostra la suriettività di U .

Da $U^*U = \mathbb{I}$ segue che $\langle Ux|Uy \rangle = \langle x|U^*Uy \rangle = \langle x|y \rangle$

Abbiamo, perciò, dimostrato che la (i) implica la (ii). Dalla (ii) segue immediatamente la (iii) qualora si prenda nella (ii) $y = x$.

Supponiamo ora che sia vera la (iii) e dimostriamo la (iv). Essendo

$$\langle U^*Ux|x \rangle = \langle Ux|Ux \rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x|x \rangle$$

abbiamo che $U^*U = \mathbb{I}$. Ma la (iii) implica che U é una isometria suriettiva lineare e quindi é invertibile e perciò esiste un unico U^{-1} lineare tale che $U^{-1}U = UU^{-1} = \mathbb{I}$. Da tutto ciò segue che $U^* = U^*\mathbb{I} = U^*(UU^{-1}) = (U^*U)U^{-1} = \mathbb{I}U^{-1} = U^{-1}$.

Infine, la (iv) implica immediatamente la (i). □

Osservazione 16.4.2 Questo teorema afferma che nella classe degli operatori da \mathcal{S} in \mathcal{S} che ammettono aggiunto, l'insieme degli operatori unitari é l'insieme degli operatori invertibili con inverso coincidente col-l'aggiunto.

Osserviamo infine che dalla (iii) segue che ogni operatore unitario ha norma uguale a 1: $\|U\| = 1$.

Indicato con $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ l'insieme degli operatori unitari su \mathcal{S} , si vede facilmente che, in generale, $\mathcal{U}(\mathcal{S})$ é chiuso soltanto rispetto al prodotto di composizione. Infatti vale il seguente teorema:

Teorema 16.4.3 *La coppia $(\mathcal{U}(\mathcal{S}), \circ)$ é un gruppo, chiamato gruppo degli automorfismi unitari di \mathcal{S} .*

Dimostrazione. Siano $U_1 U_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$ allora $\langle U_1 U_2 x | U_1 U_2 y \rangle = \langle U_2 x | U_2 y \rangle = \langle x | y \rangle$ per ogni $x, y \in \mathcal{S}$; ossia pure $U_1 \circ U_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. Essendo $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ si ha che $\mathbb{1} \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$ ed é il neutro rispetto al prodotto di composizione. Infine, abbiamo visto che $U^{-1} = \mathcal{V}^*$, ma se $U \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$ allora $U^* U = U U^* = \mathbb{1}$ implica $U^* U^{**} = U^{**} U^* = \mathbb{1}$ ossia $U^* \in \mathcal{U}(\mathcal{S})$. \square

Esempio 16.4.4 Matrice di rotazione per una particella di Spin $\frac{1}{2}$
L'operatore $R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definito dalla matrice

$$R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2}, & -e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, \\ e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, & e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

é un operatore unitario.
Infatti essendo

$$\begin{aligned} \det[R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)] &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} + e^{-\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)} e^{\frac{i}{2}(\gamma-\alpha)} \sin^2 \frac{\beta}{2} = \\ &= \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 \end{aligned}$$

la matrice $R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)$ é invertibile. La matrice aggiunta della matrice in esame é

$$[R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2}, & e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, \\ -e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, & e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

da cui segue che

$$[R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)][R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = [R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = [R^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma)] = \mathbb{1}$$

Infatti,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2}, & -e^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, \\ e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, & e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2}, & e^{\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, \\ -e^{-\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)} \sin \frac{\beta}{2}, & e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}, & e^{-i\alpha} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} - e^{-i\alpha} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \\ e^{i\alpha} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} - e^{i\alpha} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}, & \sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analogamente si procede per l'altro caso. \blacksquare

Indice analitico

- Additività
 - a sinistra, 9
- Aderenza, 14
- Aggiunto, 173
- Algebra
 - di Banach, 160
 - normata, 160
- Angolo, 12
- Annichilatore, 20
- Antiomoantiomogeneità
 - a sinistra, 9
- Autovalore, 189
 - approssimato, 190
- Autovettore, 189

- B-algebra, 160
- Base ortonormale, 39
 - canonica, 49
- Basi ortonormali, 48
- bra, 141

- Cardinalità del continuo, 52
- Chiusura, 14
- Coefficienti
 - di Fourier, 40
- Combinazione lineare
 - finita, 13
 - infinita, 14
- Continuità
 - sequenziale, 17
- Continuità
 - condizione di, 17
- Convergenza
 - di una successione, 13
- Convergenza in media quadratica, 31
- Convoluzione, 157
- Coppia
 - autovalore–autovettore, 189
- Costante di Planck, 155

- Dimensione
 - ortogonale, 62
- Dimensione ortogonale, 51, 57
- Diseguaglianza
 - di Bessel, 41
 - di Schwarz, 9
 - triangolare, 11

- Equazione
 - caratteristica, 256
- Estensione, 175
 - stretta, 175

- Fattori di fase, 53
- Funzione
 - misurabile, 65
- Funzione continua
 - impropriamente a quadrato integrabile, 37

- Hermitianità, 9

- Inferiormente limitato, 191
- Insieme risolvente, 193

- Ket, 141

- Legge
 - del parallelogramma, 18
- Limite
 - di una successione, 13

- nucleo di Dirichlet, 101
- Numero
 - complesso razionale, 49

- Omogeneità
 - assoluta, 11
- Operatore
 - aggiunto, 174
 - autoaggiunto, 176
 - chiuso, 197
 - chiuso non limitato, 198

- densamente definito, 171
 - di Fourier-Plancherel, 155
 - di moltiplicazione
 - classico, 177
 - per funzioni, 176
 - di parità, 260
 - di shift a destra, 175
 - di shift a sinistra, 175
 - Hermitiano, 245
 - limitato, 173
 - limitato non chiuso, 198
 - lineare chiuso, 197
 - non limitato, 173
 - Normale, 242
 - simmetrico, 176
 - unitario, 120
 - ortogonale, 126
- Polinomi
- di Legendre, 71
 - di Hermite, 76
 - di Laguerre, 84
- Principio
- dell'estensione, 137
 - di estensione generalizzato, 135
- Prodotto Interno, 7
- su \mathbb{R}^3 , 7
- Prodotto Scalare, 7
- Rendere stabile, 171
- Restrizione, 175
- stretta, 175
- Risolvente generalizzato, 195
- Serie, 13
- convergente, 13
 - divergente, 14
- Sistema ortogonale, 39
- Sistema ortonormale, 39
- completo, 48
- Somma diretta, 36
- Somma diretta finita, 34
- SONC, 48
- Sottoinsieme
- chiuso, 14
 - denso, 14
- Sottospazio, 15
- Spazi con prodotto interno
- separabili, 52
- Spazi di Hilbert
- di dimensione infinita, 62
 - di dimensione infinito numerabile, 62
 - di dimensione superiore alla infinità numerabile, 62
- Spazio
- d_2 , 29
 - $d_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, 29
 - $l_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 30
 - s_2 , 29
 - $s_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, 29
 - completo, 14
 - di Hilbert, 15
 - Euclideo, 7
 - lineare
 - continuo, 16
 - separabile, 14
- Spazio lineare
- l_2 , 27
 - \mathbb{C}^n , 27
 - $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, 27
- Spettro, 193
- continuo generalizzato, 195
 - puntuale, 193
 - puntuale approssimato, 190
 - residuo, 193
- Successione
- a rapida decrescita, 29
 - convergente, 13
 - definitivamente nulla, 29
 - delle somme parziali, 13
 - di Cauchy, 14
 - divergente, 13
 - fondamentale, 14
- Sviluppo in serie di Fourier, 48
- Teorema
- del grafo chiuso, 200
 - di Fejèr, 102
 - di Fisher-Riesz, 59
- teorema: della rappresentazione, 144
- Trasformata
- di Fourier, 150
 - inversa di Fourier, 151
- Uguaglianza
- tra operatori, 175
- Uguaglianza di Parseval, 46
- Valori regolari, 193

Varietà lineare, 15

Vettore

bra, 141

ket, 141

ortogonale, 19