Fisica Matematica Avanzata, 22 II 2013(Anni Prec)

1. Si dimostri che un operatore densità ρ rappresenta uno stato puro se e soltanto se è un proiettore ortogonale di rango 1.

2. Si descrivano le relazioni di indeterminazione tra osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che $[A, B] \neq \mathbf{0}$.

3. a) Si consideri il gruppo $G = (\mathbf{R}^2, +)$ e la corrispondenza

$$T : G \to GL(2, \mathbf{R}), \quad \mathrm{w} = (\xi, \eta) \to T_{\mathrm{w}}, \quad T_{\mathrm{w}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\xi}(x\cos\eta - y\sin\eta) \\ e^{\xi}(x\sin\eta + y\cos\eta) \end{bmatrix}.$$

a.i) Verificare che T è una rappresentazione;

a.ii) Trovare il nucleo della rappresentazione.

a.iii) Verificare se T è irriducibile.

b) Verificare quali tra i gruppi $O(2)$, $SL(2, \mathbf{C})$ sono connessi.

4. a) Dimostrare che le costanti di struttura di un gruppo di Lie abeliano sono nulle.

b) Si consideri il gruppo di Lorentz in una dimensione spaziale,

$$O(1,1) = \{\Lambda \in GL(2, \mathbf{R}) \mid \Lambda^t G \Lambda = G\}, \quad \text{dove } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Trovare l'algebra di Lie $o(1,1)$ come sottoalgebra di $gl(2, \mathbf{R})$.

5. Il gruppo di Galileo G sia di simmetria per un sistema localizzabile in un punto di $\mathbf{R}^3$. Date le regole per i commutatori $[J_\alpha, J_\beta]$,

a) determinare i commutatori $[J_\alpha, P_\beta]$ e $[P_\alpha, P_\beta]$;

b) Dalle proprietà di covarianza, determinare $[P_\alpha, Q_\beta]$.

c) Indicare le condizioni per cui l'operatore hamiltoniano è $H = \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} + cost.$
In questo caso, determinare l'operatore accelerazione $A_\alpha = \frac{d}{dt} V_\alpha \mid_{t=0}$, dove V_x, V_y, V_z sono gli operatori velocità.

Fisica Matematica Avanzata, 22 II 2013

1. Provare che un'osservabile quantistica $\mathcal{A}$ ha possibili valori 1 e 0 se e soltanto se è rappresentata da un proiettore ortogonale.

2. Sia $D : G \to GL(n, \mathbf{C})$, $g \to D(g)$ una rappresentazione del gruppo G.

a) Verificare che se D è irriducibile allora

$$A \in GL(n, \mathbf{C}) \text{ e } [A, D(g)] = \mathbf{0}\ \forall g \in G \quad \text{implicano} \quad A = \lambda \mathbf{1}.$$

b) Sia D unitaria. Dimostrare che

se $\{\ [A, D(g)] = \mathbf{0}\ \forall g \in G \quad$ implica $\quad A = \lambda\mathbf{1}\ \}$ allora D è irriducibile.

3. Sia A l'operatore che rappresenta un'osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico la cui evoluzione temporale è governata da un operatore hamiltoniano H, cioè $\rho_t = e^{-iHt}\rho e^{iHt}$. Far vedere che se $[H, A] = \mathbf{0}$ e e $\rho_{t=0} = |\psi\rangle\langle\psi|$ allora

a) per ogni funzione f il valore d'aspettazione di $f(\mathcal{A})$ è costante nel tempo: $\frac{d}{dt}Tr(\rho_t A) = \frac{d}{dt}\langle\psi_t|f(A)\psi_t\rangle = 0$, dove $|\psi_t\rangle\langle\psi_t| = \rho_t$.

b) $A\psi = \lambda\psi$ implica $A\psi_t = \lambda\psi_t$ per ogni t.

c) la densità di probabilità della variabile aleatoria $\mathcal{A}$ è stazionaria.

4. Dato il gruppo $GL(3, \mathbf{R})$,

a) Trovare un sistema di coordinate.

b) Dimostrare che è un gruppo di Lie locale.

c) Trovare l'algebra di Lie $so(3)$ del sottogruppo $SO(3)$ come sottoalgebra di $gl(3, \mathbf{R})$

5. Siano $P_\alpha, J_\alpha, G_\alpha$, $\alpha = x, y, z$ i generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$.

Date le regole per i commutatori $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [G_\alpha, G_\beta]$,

a) determinare i commutatori $[G_\alpha, P_\beta]$.

Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$.

b) Usando il teorema di Mackey, individuare una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$.

c) Identificare in essa i generatori G_α e gli operatori posizione Q_α.

d!) Nella rappresentazione in (b), identificare J_x.

Fisica Matematica Avanzata, 12 IX 2013

1. Date due osservabili 1-0 $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, far vedere che sono simultaneamente misurabili se e soltanto se i corrispondenti proiettori A e B commutano.

2. Verificare se $SL(2, \mathbf{C})$ è connesso.

3. a) Dato il gruppo $GL(2, \mathbf{C})$

a.i) Trovare un sistema di coordinate.

a.ii) Dimostrare che è un gruppo di Lie locale.

b) Determinare l'algebra di Lie $su(n)$ del sottogruppo $SU(n)$, come sottoalgebra di $gl(n, \mathbf{C})$.

4. a) Si derivino, usando il teorema di Wigner, la descrizione di Schroedinger e di Heisenberg dell'evoluzione temporale di un sistema quantistico.

b) Derivare, usando il teorema di Stone, l'equazione di evoluzione temporale di Schroedinger nel caso di tempo omogeneo.

5. Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di Galilei. Nell'ipotesi che $\mathcal{G}$ sia un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico,

a) Determinare $[J_\alpha, G_\beta]$ (si faccia anche uso di $[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma$).

b) Usare il teorema di Mackey per individuare la più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$.

Nell'ipotesi che $\mathcal{G}$ sia il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$,

c) identificare i generatori G_α e gli operatori Q_β che rappresentano la posizione nella rappresentazione trovata in (b).

d!) Nella rappresentazione in (b), determinare J_z

Fisica Matematica Avanzata, 25 VII 2013

1. Date due osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, si tratti la relazione tra simultanea misurabilità e commutatività dei corrispondenti oparatori quantistici A e B.

2. Si descrivano le relazioni di indeterminazione tra osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che $[A, B] \neq \mathbf{0}$.

3. a) Verificare se $O(n)$ è connesso.
b) Verificare se $SO(3)$ è connesso.

4. a) Dato il gruppo $GL(3, \mathbf{R})$
a.i) Trovare un sistema di coordinate.
a.ii) Dimostrare che è un gruppo di Lie locale.
b) Determinare l'algebra di Lie $sl(2, \mathbf{C})$ del sottogruppo $SL(2, \mathbf{C})$), come sottoalgebra di $gl(2, \mathbf{C})$.
c) Dimostrare che le costanti di struttura di un gruppo di Lie abeliano sono nulle.

5. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico.
a) Determinare $[J_\alpha, P_\beta]$ (si faccia anche uso di $[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma$).
b) Usare il teorema di Mackey per individuare una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$.

Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$,
c) identificare i generatori P_α e gli operatori V_β che rappresentano la velocità nella rappresentazione trovata in (b).
d!) Nella rappresentazione in (b), determinare J_z

Fisica Matematica Avanzata, 25 VII 2013 (Prec)

1. Date due osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, si tratti la relazione tra simultanea misurabilità e commutatività dei corrispondenti oparatori quantistici A e B.

2. Si descrivano le relazioni di indeterminazione tra osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tali che $[A, B] \neq \mathbf{0}$.

3. a) Verificare se $O(n)$ è connesso.
b) Verificare se $SO(3)$ è connesso.

4. a) Dato il gruppo $GL(3, \mathbf{R})$
a.i) Trovare un sistema di coordinate.
a.ii) Dimostrare che è un gruppo di Lie locale.
b) Determinare l'algebra di Lie $sl(2, \mathbf{C})$ del sottogruppo $SL(2, \mathbf{C})$), come sottoalgebra di $gl(2, \mathbf{C})$.
c) Dimostrare che le costanti di struttura di un gruppo di Lie abeliano sono nulle.

5. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico.
a) Dimostrare, usando i teoremi di Wigner e di Stone, che $\mathcal{G}$ ammette una rappresentazione proiettiva unitaria.
b) Determinare $[J_\alpha, P_\beta]$ (si faccia anche uso di $[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma$).
Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$,
c) identificare i generatori P_α e gli operatori Q_β che rappresentano la velocità.
d!) Assumendo che $V_\alpha = \frac{d}{dt}Q_\alpha$, determinare l'operatore hamiltoniano H.

Fisica Matematica Avanzata, 2 X 2013

1. Sia la coppia (S_1, S_2) una trasformazione di simmetria quantistica.

a) Dimostrare che essa trasforma stati puri in stati puri.

b) Dimostrare che se E è un proiettore ortogonale ($E \in \Pi(\mathcal{H})$), allora $S_2(E) \in \Pi(\mathcal{H})$.

2. Mostrare che $GL(2, \mathbf{R})$ non è connesso.

3. a) Trovare un sistema di coordinate di $GL(n, \mathbf{R})$

b) Determinare l'algebra di Lie $u(n)$ del sottogruppo $U(n)$ di $GL(n, \mathbf{C})$), come sottoalgebra di $gl(n, \mathbf{C})$.

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico.

a) Introdurre un sistema di coordinate di $\mathcal{G}$.

b) Mostrare, attraverso i teoremi di Wigner e di Stone, che ogni rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ è unitaria.

c) Siano $A_1, A_2, ..., A_9$ generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Determinare il commutatore $[A_j, A_k]$.

Sia $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$.

d) Indicare la più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ ottenuta applicando il teorema di Mackey, e la forma assunta dagli operatori P_α, Q_α, V_α in tale rappresentazione.

e) Nell'ipotesi che valga $\dot{Q}_\alpha = V_\alpha$, derivare la forma dell'operatore di evoluzione temporale H.

Fisica Matematica Avanzata, 15 XI 2013

1. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ osservabili 1-0 rappresentate dai proiettori P e Q tali che $[P, Q] = 0$. Se lo stato è $\rho = |\psi >< \psi|$

a) determinare le espressioni per le probablità che una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ abbia rispettivamente come coppie di risulati $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$;

b) Far vedere che il risultato 1 per $\mathcal{P}$ implica sempre che il risultato per Q è anche 1 se e soltanto se $PQ\psi = P\psi$.

2. Verificare se $GL(2, \mathbf{C})$ è connesso.

3. Dato il gruppo $GL(n, \mathbf{R})$,

a) mostrare come ottenere un sistema di coordinate nello spazio vettoriale $gl(n, \mathbf{R})$.

b) Determinare l'agebra di Lie rispetto a tale sistema di coordinate;

c) Determinare il commutatore $q(a, b)$ di una generica coppia di elementi della'algebra di Lie di $GL(n, \mathbf{R})$).

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico.

a) Siano $A_1, A_2, ..., A_9$ generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Determinare la relazione tra il commutatore $[A_j, A_k]$ e i generatori hermitiani.

Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$.

b) Derivare le regole di commutazione $[H, P_\alpha]$, $[H, J_\alpha]$.

c) Determinare H nel caso che valga l'ipotesi $\dot{Q}_\alpha = V_\alpha$, dove V_α è l'operatore velocità.

d) Sia $\mathcal{U} : L_2(\mathbf{R}^3) \to L_2(\mathbf{R}^3)$, $[\mathcal{U}\psi](\mathrm{x}) = e^{i\chi(\mathrm{x})}\psi(\mathrm{x})$, dove χ è una funzione reale, l'operatore unitario che realizza una trasformazione di simmetria quantistica (S_1, S_2) nella più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ ottenuta applicando il teorema di Mackey. Trovare gli operatori $S_2(\mathbf{Q})$, $S_2(\mathbf{V})$, $S_2(H)$.

Fisica Matematica Avanzata, 4 II 2014

1. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ osservabili 1-0 rappresentate dai proiettori P e Q tali che $[P,Q] = 0$.

a) Determinare un operatore autoaggiunto C e le funzioni f e g tali che $P = f(C)$ e $Q = g(C)$.

b) Determinare le espressioni per le probablità che una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ abbia rispettivamente come coppie di risulati $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

c) Se l'operatore densità è $\rho = |\psi >< \psi|$, far vedere che in una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ il risultato per $\mathcal{P}$ è sempre uguale al risultato per Q se e soltanto se $Q\psi = P\psi$.

2. Dato il gruppo $GL(2, \mathbf{C})$,

a) mostrare come ottenere un sistema di coordinate nello spazio vettoriale reale $gl(2, \mathbf{C})$.

b) Determinare l'agebra di Lie $su(2)$ di $SU(2)$ come sottoalgebra di $gl(2, \mathbf{C})$.

c) Verificare se $SU(2)$ è connesso.

3. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.

b) Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $(\rho_{t_1})_{t_2} = \rho_{t_1+t_2}$, derivare le equazioni di evoluzione quantistica per gli stati e le osservabili:

$$(1) \quad i\frac{d\psi_t}{dt} = H\psi_t, \qquad (2) \quad \frac{dA_t}{dt} = i[H, A_t].$$

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico, e siano P_α, J_α, G_α i generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Date le regole per $[J_\alpha, J_\beta]$, determinare $[J_\alpha, P_\beta]$.

5. Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$. Date le regole $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$ e $[G_\alpha, G_\beta]$,

a) determinare $[P_\alpha, Q_\beta]$ e $[G_\alpha, Q_\beta]$ usando le proprietà di covarianza di $\mathbf{Q}$.

Nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$,

b) individuare gli operatori Q_α e P_α.

c) Date le regole di commutazione per $[H, P_\alpha]$, $[H, J_\alpha]$, far vedere che $H = h(\mathbf{P})$, dove h è una funzione, e che $\frac{d}{dt}Q_\alpha^{(t)} = \frac{\partial}{\partial P_\alpha}h(\mathbf{P})$.

Fisica Matematica Avanzata, 22 II 2014

1. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ osservabili 1-0 rappresentate dai proiettori P e Q tali che $[P, Q] = \mathbf{0}$.

a) Determinare un operatore autoaggiunto C e le funzioni f e g tali che $P = f(C)$ e $Q = g(C)$.

b) Determinare le espressioni per le probabilità che una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ abbia rispettivamente come coppie di risulati $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

c) Far vedere che in una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ il risultato 1 per $\mathcal{P}$ implica sempre il risultato 1 per Q se e soltanto se $P \leq Q$.

2. a) Dato un gruppo di Lie locale G, introdurre il concetto di costanti di struttura.

Dato il gruppo $SL(3, \mathbf{C})$,

b) Dimostrare che è connesso.

c) Determinare l'algebra di Lie $sl(3, \mathbf{C})$ di $SL(3, \mathbf{C})$ come sottoalgebra di $gl(3, \mathbf{C})$.

3. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.

b) Nel caso di evoluzione unitaria, cioè se $\psi_t = U_t \psi$ con U_t unitario, derivare l'equazione

$$\frac{d\psi_t}{dt} = B(t)\psi_t, \quad \text{dove } B^*(t) = -B(t).$$

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico, e siano P_α, J_α, G_α i generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Date le regole $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$ e $[G_\alpha, G_\beta]$, determinare $[J_\alpha, G_\beta]$ e $[G_\alpha, P_\beta]$.

5. Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$.

a) determinare $[J_\alpha, Q_\beta]$ e $[G_\alpha, V_\beta]$ usando le proprietà di covarianza di $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{V}$.

Nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$,

b) individuare gli operatori Q_α e V_α.

c) Date le regole di commutazione $[H, P_\alpha]$ far vedere che $H = h(\mathbf{P})$, dove h è una funzione, che $\frac{d}{dt}Q_\alpha^{(t)} = \frac{\partial}{\partial P_\alpha}h(\mathbf{P})$ e che $\frac{d}{dt}V_\alpha^{(t)} = \mathbf{0}$.

Fisica Matematica Avanzata, 4 IV 2014

1. Siano A e B operatori autoaggiunti rappresentanti le osservabili quantistiche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e sia $\rho = |\psi><\psi|$ lo stato quantistico.

a) Dimostrare che se ogni misurazone di $\mathcal{A}$ ha come risultato il valore fisso λ_0, allora $A\psi = \lambda_0\psi$.

b) descrivere le relazioni di indeterminazione tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

2. a) Stabilire sotto quali condizioni vale la seguente asserzione: *se $D : G \to GL(n, K)$ è una rappresentazione irriducibile di un gruppo G, allora $[A, D(g)] = \mathbf{0}$ per ogni $g \in G$ implica $A = \lambda\mathbf{1}$.*

b) formulare l'inverso del lemma di Schur e stabilire sotto quali condizioni è valido.

c) Verificare se $GL(2, \mathbf{R})$ e $GL(2, \mathbf{C})$ sono connessi.

d) Determinare l'algebra di Lie $u(2)$ di $U(2)$.

3. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.

b) Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $\rho_t = e^{-iHt}\rho_t e^{iHt}$, far vedere che se $[A, H] = \mathbf{0}$ e $A\psi = \lambda_o\psi$ allora $A\psi_t = \lambda_0\psi_t$.

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico, e siano P_α, J_α, G_α i generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Determinare $[J_\alpha, J_\beta]$ e $[J_\alpha, P_\beta]$.

5. Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$. Nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$, date le regole $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$

a) individuare gli operatori posizione Q_α e velocità V_α.

b) Date le regole di commutazione per $[H, P_\alpha]$, $[H, J_\alpha]$, far vedere che se $\frac{d}{dt}Q_\alpha^{(t)} = V_\alpha^{(t)}$ allora $H = (-1/2\mu)\Delta + E_0$, dove Δ è l'operatore laplaciano.

c) Determinare gli operatori $Q_\alpha^{(t)}$ e $V_\alpha^{(t)}$.

Fisica Matematica Avanzata, 8 IX 2014

1. Siano A e B operatori autoaggiunti rappresentanti le osservabili quantistiche $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, e sia $\rho = |\psi><\psi|$ lo stato quantistico.

a) Dimostrare che se ogni misurazone di $\mathcal{A}$ ha come risultato il valore fisso λ_0, allora $A\psi = \lambda_0\psi$.

b) descrivere le relazioni di indeterminazione tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

2. a) formulare l'inverso del lemma di Schur e stabilire sotto quali condizioni è valido.

b) Verificare se $U(2)$ è connesso.

c) Determinare l'algebra di Lie $u(2)$ di $U(2)$.

3. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.

b) Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $\rho_t = e^{-iHt}\rho_t e^{iHt}$, far vedere che se $[A, H] = \mathbf{0}$ e $A\psi = \lambda_o\psi$ allora $A\psi_t = \lambda_0\psi_t$.

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico, e siano P_α, J_α, G_α i generatori hermitiani di una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Date le regole $[J_\alpha, J_\beta]$, determinare $[J_\alpha, P_\beta]$.

5. Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella libera localizzabile in $\mathbf{R}^3$. Date le regole $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$,

a) determinare le regole di commutazione $[G_\alpha, V_\beta]$, $[J_\alpha, Q_\beta]$, $[J_\alpha, V_\beta]$, dove Q_α e V_α indicano gli operatori posizione e velocità;

b) usare il teorema di Mackey per stabilire che nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$, $H = (1/2\mu)(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \Phi(\mathbf{Q})$.

Fisica Matematica Avanzata, 29 IX 2014

1. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ osservabili 1-0 rappresentate dai proiettori P e Q tali che $[P, Q] = \mathbf{0}$.

a) Determinare un operatore autoaggiunto C e le funzioni f e g tali che $P = f(C)$ e $Q = g(C)$.

b) Determinare le espressioni per le probabilità che una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ abbia rispettivamente come coppie di risulati $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ se lo stato è $\rho = |\psi><\psi|$.

c) Far vedere che in una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ il risultato 1 per $\mathcal{P}$ implica sempre il risultato 1 per $\mathcal{Q}$ se e soltanto se $PQ\psi = P\psi$.

2. a) Individuare un sistema di coordinate per il gruppo $GL(3, \mathbf{R})$ e verificare che è un gruppo di Lie locale.

b) Verificare se è connesso.

c) Determinare l'algebra di Lie $su(n)$ di $SU(n)$ come sottoalgebra di $gl(n, \mathbf{C})$.

3. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.

b) Nel caso di tempo omogeneo, derivare le equazioni di evoluzione nei due casi.

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico, e siano (A_1, A_2, A_3), (A_4, A_5, A_6), (A_7, A_8, A_9) i generatori hermitiani dei sottogruppi unitari a un paramentro rappresentanti rispettivamente le traslazioni spaziali, le rotazioni spaziali, i boost di Galilei relativi ai tre assi x, y e z in una rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Stabilire la relazione tra il commutatore $[A_j, A_k]$ e i generatori A_1, ... A_9.

5. Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile in $\mathbf{R}^3$. Date le regole per $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$

a) determinare $[J_\alpha, V_\beta]$ e $[P_\alpha, Q_\beta]$ usando le proprietà di covarianza di $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{V}$;

Nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$,

b) individuare gli operatori Q_α e V_α.

c) Sotto l'ipotesi $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}$, determinare l'operatore hamiltoniano H se **non** vale $[H, P_\alpha] = \mathbf{0}$.

Fisica Matematica Avanzata, 25 novembre 2014

1. Sia A l'operatore che rappresenta l'osservabile quantistica $\mathcal{A}$, con risoluzione dell'identità $\lambda \to E_\lambda$.

a) Far vedere che se lo stato quantististico del sistema è $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ il valore misurato di $\mathcal{A}$ è certamente a se e soltanto se $A\psi = a\psi$.

b) Dimostrare che se λ_0 è un punto di discontinuità per E_λ, allora esiste $\psi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tale che $A\psi_0 = \lambda_0\psi_0$.

2. Spiegare, dopo aver formulato il lemma di Schur, perché esso non si applica alla rappresentazione

$$R : G \equiv (\mathbf{R}, +) \to GL(2, \mathbf{R}), \quad \theta \to R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

3. Verificare se i seguenti gruppi sono connessi:

$$\text{(a)} \quad GL(2, \mathbf{R}); \qquad \text{(b)} \quad SL(2, \mathbf{C}).$$

4. a) Determinare le algebre di Lie di $SU(2)$ e $SO(3)$.

b) Verificare che sono isomorfe.

5. Sia G un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico.

a) Facendo uso del teorema di Wigner, dedurre l'esistenza di una rappresentazione proiettiva $g \to U_g$ di G.

b) Se G è il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$, individuare, nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$, un sistema di imprimitività per la restrizione al gruppo di Euclide di $g \to U_g$ e identificare esplicitamente la più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ facendo uso del teorema di imprimitività di Mackey.

Se il sistema fisico è una particella localizzabile

c) identificare l'operatore posizione nella rappresentazione proiettiva trovata in (b);

d) Sia $\mathcal{U} : L_2(\mathbf{R}^3) \to L_2(\mathbf{R}^3)$, $[\mathcal{U}\psi](\mathrm{x}) = e^{i\chi(\mathrm{x})}\psi(\mathrm{x})$, dove χ è una funzione reale, l'operatore unitario che realizza una trasformazione di simmetria quantistica (S_1, S_2) nella più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$. Trovare gli operatori $S_2(\mathbf{Q})$, $S_2(\mathbf{V})$, $S_2(H)$.

Fisica Matematica Avanzata, 27 II 2015

1. Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^2$, si considerino i vettori di stato $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Determinare gli stati quantistici $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$, $\rho_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ e $\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$.

b) Sia $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ una base orto-normale di $\mathbf{C}^2$ e poniamo $\hat{\rho}_1 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$, $\hat{\rho}_2 = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$. Verificare che $\frac{1}{2}(\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2) = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$.

2. Sia (S_1, S_2) una trasformazione di simmetria quantistica. Dimostrare che se $\{A_n\}$ è una successione di operatori auto-aggiunti che converge debolmente all'operatore autoaggiunto A, cioè se $\lim_{n\to\infty}\langle\psi \mid A_n\psi\rangle = \langle\psi \mid A\psi\rangle$ per ogni $\psi \in \mathcal{H}$, allora la successione $\{S_2(A_n)\}$ converge debolmente a $S_2(A)$.

3. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di simmetria per un sistema quantistico, e sia U_g l'operatore che realizza la corrispondente trasformazione di simmetria quantistica $(S_g^{(1)}, S_g^{(2)})$ in accordo col teorema di Wigner, per ogni $g \in \mathcal{G}$.

a) Dimostrare che ogni U_g è un operatore unitario e che la corrispondenza $g \to U_g$ è una rappresentazione proiettiva.

b) Determinare le regole di commutazione $[J_\alpha, J_\beta]$.

c) Individuare nella rappresentazione proiettiva un sistema di imprimitività rispetto alla restrizione di $g \to U_g$ al gruppo di Euclide $\mathcal{E}$.

4. Siano Q_1, Q_2, Q_3 gli operatori posizione di una particellla libera localizzabile.

a) Determinare le regole di commutazione $[J_\alpha, Q_\beta]$, $[P_\alpha, Q_\beta]$, $[G_\alpha, Q_\beta]$.

Nella più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ ottenuta col teorema di imprimitività,

b) Dimostrare che si ha $Q_\alpha = G_\alpha/\mu$, $\quad P_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

c) Siano V_1, V_2, V_3 operatori auto-aggiunti che commutano, tali che $[P_\alpha, V_\beta] = \mathbf{0}$, $[J_\alpha, V_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}V_\gamma$, $[G_\alpha, V_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}$. Dimostrare che $V_\alpha = P_\alpha/\mu$.

d!) Determinare le regole di commutazione $[P_\alpha, \dot{Q}_\beta]$, $[J_\alpha, \dot{Q}_\beta]$, $[G_\alpha, \dot{Q}_\beta]$.

e!) Dimostrare che $\ddot{Q}_\alpha = \mathbf{0}$.

f!) Determinare l'operatore hamiltoniano H.

Fisica Matematica Avanzata, 15 IV 2015

1. Sia A l'operatore che rappresenta l'osservabile quantistica $\mathcal{A}$, con risoluzione dell'identità $\lambda \to E_\lambda$.

a) Far vedere che se lo stato quantististico del sistema è $\rho = \sum_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$, con $\|\psi_j\| = 1$, il valore misurato di $\mathcal{A}$ è certamente a se e soltanto se $A\psi_j = a\psi_j$ per ogni j.

b) Dimostrare che se λ_0 è un punto di discontinuità per E_λ, allora esiste $\psi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tale che $A\psi_0 = \lambda_0\psi_0$.

2. Stabilire un omomorfismo suriettivo tra $SU(2)$ e $SO(3)$.

3. Sia G un gruppo di trasformazioni di simmetria per un sistema quantistico.

a) Facendo uso del teorema di Wigner, dedurre l'esistenza di una rappresentazione proiettiva $g \to U_g$ di G.

b) Se G è il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$, individuare, nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$, un sistema di imprimitività per la restrizione al gruppo di Euclide di $g \to U_g$ e identificare esplicitamente la più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ facendo uso del teorema di imprimitività di Mackey.

4. Se il sistema fisico del quesito 3) è una particella localizzabile, nella rappresentazione proiettiva del punto 3.b)

a) identificare l'operatore posizione $\mathbf{Q}$.

Se (S_1, S_2) è una trasformazione di simmetria quantistica indotta da un operatore unitario U tale che $|(U\psi)(x)| = |\psi(x)|$ per ogni $\psi \in L_2(\mathbf{R}^3)$.

b) Dimostrare che $[Q_\alpha, U] = \mathbf{0}$ e che $U = e^{i\chi(\mathbf{Q})}$ dove χ è una funzione reale;

c) determinare gli operatori $S_2(Q_\alpha)$, $S_2(P_\alpha)$, $S_2(H)$.

Fisica Matematica Avanzata, 17 VI 2015

1. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ osservabili 1-0 rappresentate dai proiettori P e Q tali che $[P, Q] = \mathbf{0}$.

a) Determinare un operatore autoaggiunto C e le funzioni f e g tali che $P = f(C)$ e $Q = g(C)$.

b) Determinare le espressioni per le probabilità che una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ abbia rispettivamente come coppie di risulati $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$.

c) Far vedere che in una misurazione simultanea di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, nello stato $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, i risultati coincidono sempre se e soltanto se se e soltanto se $P\psi = Q\psi$.

2. Stabilire un omomorfismo tra $SU(2)$ e $SO(3)$.

3. Sia data una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$.

a) Indicati con $A_1, A_2, ..., A_9$ i generatori hermitiani della rappresentazione, stabilire la relazione che esprime i commutatori $[A_j, A_k]$ in termini di costanti di struttura.

b) Date le regole di commutazione $[J_\alpha, J_\beta]$, determinare $[J_\alpha, P_\beta]$.

c) Dimostrare che nella più semplice rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ ottenuta usando il teorema di imprimitività esiste un unico sistema di imprimitività rispetto alla restrizione della rappresentazione al gruppo di Euclide $\mathcal{E}$.

4. Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella libera localizzabile in $\mathbf{R}^3$.

a) determinare $[P_\alpha, Q_\beta]$ e $[J_\alpha, Q_\beta]$ usando le proprietà di covarianza di $\mathbf{Q}$.

Nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$,

b) individuare gli operatori Q_α e $\dot{Q}_\alpha$.

c) Dimostrare che $J_3 = Q_1 P_2 - Q_2 P_1$.

Fisica Matematica Avanzata, 9 IX 2015

1. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$.

a) Trovare la risoluzione dell'identità di A.

b) Determinare i possibili risultati di una misurazione di $\mathcal{A}$.

c) Se lo stato è rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dove $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, determinare la probabilità di ottenere ognuno dei valori possibili.

d) L'operatore $B = \frac{1}{2}(A+1)$ rappresenta un'osservabile 1-0?

2. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.

b) Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $(\rho_{t_1})_{t_2} = \rho_{t_1+t_2}$, derivare le equazioni di evoluzione quantistica per gli stati e le osservabili:

$$(1) \quad i\frac{d\psi_t}{dt} = H\psi_t, \qquad (2) \quad \frac{dA_t}{dt} = i[H, A_t].$$

3. Sia $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}$.

a) Indicati con $A_1, A_2, ..., A_9$ i generatori hermitiani della rappresentazione, stabilire la relazione che esprime i commutatori $[A_j, A_k]$ in termini di costanti di struttura.

b) Date $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, P_\beta]$ per i generatori hermitiani, individuare un sistema di imprimitività $\mathbf{F}$ per la restrizione della rappresentazione proiettiva al gruppo di Euclide e identificare esplicitamente la più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ facendo uso del teorema di imprimitività di Mackey.

Sia $\mathcal{H}$ anche lo spazio di Hilbert della teoria quantistica di un sistema che possiede tre osservabili rappresentate dagli operatori Q_α, $\alpha = 1, 2, 3$ tali che $[Q_\alpha, Q_\beta] = \mathbf{0}$,

i) $[Q_\beta, P_\alpha] = i\delta_{\alpha\beta}$, $[J_\alpha, Q_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma$, $[G_\alpha, Q_\alpha] = \mathbf{0}$,

ii) $[G_\alpha, \dot{Q}_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}$, $[P_\alpha, \dot{Q}_\beta] = \mathbf{0}$, $[J_\alpha, \dot{Q}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\gamma$.

Dimostrare che

c) $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$, dove $\mathbf{F}$ è il sistema di imprimitività del punto (b).

d) Esiste una funzione $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ tale che $H = \frac{1}{2\mu}\sum_{\alpha=1}^{3} P_\alpha^2 + \Phi(\mathbf{Q})$.

e) $\mu\ddot{Q}_\alpha = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}(Q_1, Q_2, Q_3)$.

Fisica Matematica Avanzata, 22 IX 2015

1. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$.

a) Determinare i possibili risultati di una misurazione di $\mathcal{A}$ e la risoluzione dell'identità di A.

b) Se lo stato è rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dove $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, determinare la probabilità di misurare un valore non nullo.

c) L'operatore A^2 rappresenta un'osservabile 1-0?

2. Si consideri l'evoluzione temporale di un sistema quantistico nel caso di tempo omogeneo.

a) Usando il teorema di Wigner e di Stone, far vedere che esiste un operatore hermitiano H tale che

$$(1) \quad i\frac{d\psi_t}{dt} = H\psi_t, \qquad (2) \quad \frac{dA_t}{dt} = i[H, A_t].$$

b) Sia A un operatore autoaggiunto tale che $[A, H] = \mathbf{0}$, e a indichi il risultato di una misurazione dell'osservabile rappresentata da A. Far vedere che per ogni intervallo $(\lambda_1, \lambda_2] \subseteq \mathbf{R}$ la probabilità che $a \in (\lambda_1, \lambda_2]$ indipendente dal tempo t in cui si effettua la misurazione.

3. Sia $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert di una particella libera localizzabile e $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}$.

a) Usare il teorema di Wigner e di Stone per dimostrare l'esistenza di una rappresentazione proiettiva $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$.

b) Date $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, P_\beta]$ per i generatori hermitiani, identificare esplicitamente, usando il teorema di imprimitività, la più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$.

c) Se $\mathbf{Q}$ è la terna degli operatori posizione, date $[Q_\beta, P_\alpha] = i\delta_{\alpha\beta}$, $[J_\alpha, Q_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma$, $[G_\alpha, Q_\alpha] = \mathbf{0}$, $[G_\alpha, \dot{Q}_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}$, $[P_\alpha, \dot{Q}_\beta] = \mathbf{0}$, $[J_\alpha, \dot{Q}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\gamma$, dimotrare che

$$(i) \; \dot{Q}_\alpha = \frac{1}{\mu}P_\alpha, \quad (ii) \; H = \frac{1}{2\mu}\sum_{\alpha=1}^{3} P_\alpha^2 + c\mathbf{1}, \quad (iii) \; \frac{d}{dt}J_\alpha = 0.$$

Fisica Matematica Avanzata, 4 II 2016

1. a) Si dimostri che un operatore densità ρ rappresenta uno stato puro se e soltanto se è un proiettore ortogonale di rango 1.

b) Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^2$. Determinare i possibili risultati di una misurazione di $\mathcal{A}$ e le probabilità di ottenere ognuno dei valori possibili se lo stato è rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dove $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. a) Spiegare, dopo aver formulato il lemma di Schur, perché esso non si applica alla rappresentazione $R : G \equiv (\mathbf{R}, +) \to GL(2, \mathbf{R}), \quad \theta \to R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

b) Provare che in un gruppo di Lie abeliano le costanti di struttura sono nulle.

3. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile e $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert della sua teoria quantistica.

a) Usare il teorema di Wigner e di Stone per dimostrare l'esistenza di una rappresentazione proiettiva $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$.

b) Date $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta]$ per i generatori hermitiani, dimostrare che $[G_\alpha, P_\beta] = i\mu\delta_{\alpha\beta}$ e che $e^{iG_\alpha u} P_\beta e^{-iG_\alpha u} = P_\beta - \delta_{\alpha\beta}\mu u$.

c) Date, oltre alle $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta]$, le regole $[P_\alpha, Q_\beta]$, $[J_\alpha, Q_\beta]$, $[G_\alpha, Q_\beta]$ per l'operatore posizione $\mathbf{Q}$, introdurre le condizioni per determinare l'operatore hamiltoniano H nella più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$.

d) Spiegare perché, nella rappresentazione al punto (c), la costante μ del punto (d) non può essere nulla.

4. Sia $H = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$ l'operatore hamiltoniano di un sistema quantistico, con $[A, B] = i$.

a) Scrivere l'equazione dinamica per l'osservabile $\mathcal{B}$ al tempo t.

b) Determinare esplicitamente gli operatori $C = \frac{dB^{(t)}}{dt}\,|_{t=0}$ e $D = \frac{dC^{(t)}}{dt}\,|_{t=0}$.

Fisica Matematica Avanzata, 16 II 2016

1. Von Neumann ha dimostrato che per ogni valore d'aspettazione v esiste un operatore lineare ρ tale che $v(\mathcal{A}) = Tr(\rho A)$, per ogni $\mathcal{A}$.
Dimostrare che ρ è unico, che $Tr(\rho) = 1$ e che $\rho \geq \mathbf{0}$.

2. Sia (S_1, S_2) una trasformazione di simmetria quantistica.

a) Dimostrare, senza far uso del teorema di Wigner, che
$S_1 : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ è un isomorfismo convesso, e
che $S_2 : \Omega(\mathcal{H}) \to \Omega(\mathcal{H})$ è lineare.

b) Dimostrare che S_2 è debolmente continua, cioè che
se per ogni ψ si ha $\lim_{n\to\infty}\langle\psi|A_n\psi\rangle = \langle\psi|A\psi\rangle$,
allora per ogni φ si ha $\lim_{n\to\infty}\langle\varphi|S_2(A_n)\varphi\rangle = \langle\varphi|S_2(A)\varphi\rangle$.

3. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria per una particella localizzabile e $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert della sua teoria quantistica.

a) Usare il teorema di Wigner per dimostrare l'esistenza di una rappresentazione proiettiva unitaria $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$.

b) Date $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta]$ per i generatori hermitiani, determinare $[J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$.

c) Date, oltre alle relazioni di commutazione del punto (b), anche $[H, P_\alpha]$, $[H, J_\alpha]$, determinare, nella più semplice rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$, l'operatore hamiltoniano H, facendo uso delle relazioni di covarianza.

d) Spiegare perché, nella rappresentazione al punto (c), la costante μ del punto (b) non può essere nulla.

4. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria di un sistema isolato, non necessariamente localizzabile, e siano date $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$. Dimostrare che, nella più semplice reappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$, se $[G_\alpha, H] = iP_\alpha$, allora $H = \frac{P_1^2+P_2^2+P_3^2}{2\mu} + E_0$.

Fisica Matematica Avanzata, 31 iii 2016

1. Dimostrare che se uno stato quantistico è rapprentato da un proiettore ρ, allora ρ ha rango 1 e lo stato è puro.

2. a) Descrivere l'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e secondo lo schema di Heisenberg.
b) Sia $p_t(\Delta)$ la probabilità di ottenere un risultato $a \in \Delta$ da una misurazione di un'osservabile $\mathcal{A}$ effettuata al tempo t. Nel caso di tempo omogeneo, cioè se $\rho_t = e^{-iHt}\rho e^{iHt}$, far vedere che se $[A, H] = \mathbf{0}$ allora $p_t(\Delta) = p_0(\Delta)$.

3. Sia il gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ un gruppo di simmetria per un sistema quantistico, e sia $g \to U_g$ la rappresentazione proiettiva che realizza le trasformazioni di simmetria quantistica $(S_g^{(1)}, S_g^{(2)})$ in accordo col teorema di Wigner, per ogni $g \in \mathcal{G}$.

a) Determinare la relazione che esprime il commutatore $[A_j, A_k]$ di una coppia di generatori hermitiani della rappresentazione proiettiva come combinazione dei generatori stessi.

b) Date le regole per $[J_\alpha, J_\beta]$, $[J_\alpha, P_\beta]$, $[J_\alpha, G_\beta]$, $[P_\alpha, P_\beta]$, $[G_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$, individuare nella rappresentazione proiettiva un sistema di imprimitività rispetto alla restrizione di $g \to U_g$ al gruppo di Euclide $\mathcal{E}$.

c) Nella rappresentazione proiettiva di $\mathcal{G}$ indotta dalla rappresentazione banale di $SO(3)$, dimostrare che se $[H, P_\alpha] = 0$ e $[H, G_\alpha] = -iP_\alpha$ allora $H = (-1/2\mu)\Delta + E_0$, dove Δ è l'operatore laplaciano e E_0 è una costante reale.

d) Se il sistema è una particella localizzabile in uno spazio identificabile con $\mathbf{R}^3$, individuare gli operatori posizione Q_α e velocità V_α.

4. Nella più semplice teoria quantistica di una particella libera localizzabile del quesito 4, sia $\mathcal{U} : L_2(\mathbf{R}^3) \to L_2(\mathbf{R}^3)$ un operatore unitario tale che $|(\mathcal{U}\psi)(\mathbf{x}))| = |\psi(\mathbf{x})|$ quasi ovunque su $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che $[\mathcal{U}, Q_\alpha] = \mathbf{0}$ e che $(\mathcal{U}\psi)(\mathbf{x}) = e^{i\chi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})$ quasi ovunque su $\mathbf{R}^3$, dove χ è una funzione reale.

b) Determinare $S(Q_\alpha)$, $S(P_\alpha)$, $S(H)$, dove $A \to S(A) = \mathcal{U}A\mathcal{U}^{-1}$ è la trasformazione delle osservabili indotta dall'operatore unitario $\mathcal{U}$.

$|\psi(x)| = |(U\psi)(x)|$

$(U\psi)(x) = e^{i\,\cancel{\psi}}$

$= e^{i|\psi(x)|}\,\psi(x)$

Fisica Matematica Avanzata, 26 vii 2016

1. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ la matrice che rappresenta una osservabile $\mathcal{A}$ di un sistema quantistico nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{C}^3$.

a) Trovare la risoluzione dell'identità di A.

b) Determinare i possibili risultati di una misurazione di $\mathcal{A}$.

c) Se lo stato è rappresentato da $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ dove $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, determinare la probabilità di ottenere ognuno dei valori possibili.

2.a) Far vedere che se lo stato quantististico del sistema è $\rho = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$, con $\|\psi_n\| = 1$, il valore misurato di un'osservabile quantistica $\mathcal{A}$ è certamente a se e soltanto se $A\psi_n = a\psi_n$ per ogni n.

b) Dimostrare che se λ_0 è un punto di discontinuità per la risoluzione dell'identità E_λ dell'osservabile quantistica A, allora esiste $\psi_0 \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ tale che $A\psi_0 = \lambda_0\psi_0$.

3. Sia $U : \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G}$ in $\mathcal{H}$.

a) Indicati con $A_1, A_2, ..., A_9$ i generatori hermitiani della rappresentazione, stabilire la relazione che esprime i commutatori $[A_j, A_k]$ in termini di costanti di struttura.

Sia ora $\mathcal{G}$ il gruppo di simmetria di una particella localizzabile.

b) Date, oltre alle $[J_\alpha, J_\beta], [J_\alpha, P_\beta], [P_\alpha, P_\beta], [J_\alpha, G_\beta], [G_\alpha, G_\beta]$, $[G_\alpha, P_\beta]$, le regole $[P_\alpha, Q_\beta]$, $[J_\alpha, Q_\beta]$, $[G_\alpha, Q_\beta]$ per l'operatore posizione $\mathbf{Q}$, dimostrare che $\mathbf{Q} = \mathbf{G}/\mu$.

c) Stabilire le regole di commutazione $[H, P_\alpha]$, $[H, J_\alpha]$ e determinare esplitamente l'operatore H.

4. Siano A e B ooperatori autoaggiunti tali che $[A, B] = i$, e sia $H = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$ l'operatore hamiltoniano del sistema.

a) Scrivere l'equazione dinamica per le osservabili $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ al tempo t.

b) Determinare esplicitamente gli operatori $C = \frac{dB^{(t)}}{dt}\ |_{t=0}$ e $D = \frac{dA^{(t)}}{dt}\ |_{t=0}$.

c!) Determinare $A^{(t)}$ e $B^{(t)}$.