Teorie relativistiche 10 1 2012

1. Sia $\underline{q}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} q_0(\underline{x}) \\ \vec{q}(\underline{x}) \end{bmatrix}$ una grandezza vettoriale a valori in $\mathbf{R}^4$ che dipende dalla posizione spazio-temporale $\underline{x} = (ct, \vec{x})$ di una particella.

a) Indicare esempi in cui $\underline{q}$ è un quadrivettore.

Dimostrare che se $\underline{q}$ e $\underline{p}$ sono quadrivettori, allora

b) $\underline{q} \bullet_{M} \underline{p}$ è un invariante.

c) $\dfrac{d\underline{q}}{d\tau}$ è un quadrivettore, dove τ è il tempo proprio.

2. Un corpo puntiforme A di massa a riposo nota M_1 con velocità iniziale nota $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ assorbe all'istante t_0 un fotone e si ferma.

a) determinare l'energia del fotone e la massa a riposo M_2 dell'unico corpo B risultante dall'urto.

All'istante $t_1 > t_0$ il corpo B decade in due corpi C e D; il corpo C ha massa a riposo M_1 e velocità $\mathbf{v}_C = (\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u, 0)$.

b) Determinare la la massa a riposo m_0 e la velocità $\mathbf{v}_D$ del corpo D.

3. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $z(t) = v_0 t$.

a) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

4. Un particella di carica q e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata da un campo elettro-magnetico uniforme $\vec{E} = (0, E, 0)$, $\vec{B} = (0, B, 0)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistiche del sistema.

b) Se all'istante $t = 0$ la particella si trova nel punto $(0, 0, 0)$ con velocità $(0, v_0, 0)$, trovare la posizione della particella quando essa ha raddoppiato la velocità.

Teorie Fisico-matematiche 26 IX 2012

1. Determinare le relazioni dell'effetto Doppler relativo alla radiazione elettromagnetica.

2. a) Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0, inizialmente fermo nell'origine del sistema di riferimento, assorbe un fotone di frequenza ν proveniente dal semiasse x positivo.
Determinare la velocità $\mathbf{v}$ e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento.
b) Si consideri il seguente processo:
Due corpi puntiformi identici di massa a riposo m_0 collidono; l'unico prodotto della collisione è un fotone.
Stabilire se il processo è possibile.

3. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $z(t) = v_0 t$.
a1) Si dimostri che il campo elettrico nel sistema a riposo del corpo è
$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x_p^2+y_p^2+z_p^2)^3}}(x_p, y_p, z_p)$.
a2) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:
b) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$;
c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = -E_0(x - y)$ e $\mathbf{A} = (-E_0 t, -E_0 t, 0)$.
a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.
b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?
c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità al tempo t_0.
d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie Fisico-matematiche 29 6 2012

1. Stabilire la relazione tra accelerazione propria e accelerazione coordinata di un punto in moto rispetto ad un sistema di riferimento il cui asse x è orientato come la velocità del punto nell'istante considerato.

2. Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0 inizialmente fermo emette due fotoni entrambi di frequenza ν in versi opposti opposti lungo la direzione dell'asse x.

a) Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'emissione dei fotoni.

b!) Si consideri lo stesso processo rispetto ad un sistema di riferimento Σ' in cui la velocità del corpo prima dell'emissione è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni in funzione di ν utilizzando la conservazione del quadrimomento, cioè senza utilizzare le formule dell'effetto Doppler.

3 . Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ giacente all'istante $t = 0$ lungo l'asse x si muove con velocità costante $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$.

a) Determinare il campo elettromagentico generato dal filo nel punto $\mathbf{x} = (x, y, 0)$.

b) Determinare l'accelerazione subita da una carica puntiforme q di massa a riposo m_0 all'istante t, posta nel punto $\mathbf{x}(0) = (x, y, 0)$ con velocità

(i) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$;

(ii) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (0, 0, -E_0 t)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la posizione quando essa raggiunge la velocità $(0, 0, v_0)$.

d!) Verificare che se i potenziali fossero $\phi = -E_0 z$ e $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$ il campo elettromagnetico sarebbe lo stesso. In questo caso l'hamiltoniana sarebbe una costante? In contraddizione con (b)?

Teorie Fisico-matematiche 9 7 2012

1. Trattare il problema delle leggi di conservazione in Relatività Speciale.

2. Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0 inizialmente fermo assorbe due fotoni entrambi di frequenza ν da versi opposti lungo la direzione dell'asse x.

a) Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento dei fotoni.

b) Si consideri lo stesso processo rispetto ad un sistema di riferimento Σ' in cui la velocità del corpo prima dell'assorbimento è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni in funzione di ν utilizzando la conservazione del quadrimomento, cioè senza utilizzare le formule dell'effetto Doppler.

3 . Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ giacente all'istante $t = 0$ lungo l'asse z si muove con velocità costante $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$.

a) Determinare il campo elettromagnetico generato dal filo nel punto $\mathbf{x} = (x, y, 0)$.

b) Determinare l'accelerazione subita da una carica puntiforme q di massa a riposo m_0 all'istante $t = 0$, posta nel punto $\mathbf{x}(0) = (0, y, 0)$ con velocità

(i) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$;

(ii) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = -E_0(x + z)$ e $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la posizione quando essa raggiunge la velocità $(1/\sqrt{2})(v_0, 0, v_0)$,

c.i) sfruttando (b);

c.ii!) risolvendo l'equazione del moto;

Teorie Fisico-Matematiche 22 II 2013

1. a) Trattare l'effetto Doppler relativistico per la radiazione elettromagnetica.

b) Spiegare come può essere sfruttato per determinare la velocità di sorgenti di radiazione in movimento.

2. Dall'urto di due fotoni di frequenza ν_1 e ν_2 e velocità $(c, 0, 0)$ e $(-c, 0, 0)$ emerge un'unica particella. Determinare la massa a riposo e la velocità della particella.

3. Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ è inizialmente sull'asse x; ogni suo punto si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (0, v_0, 0)$.

a) Stabilire qual è il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (B_0 z, -E_0 t, 0)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, y_0, 0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie Fisico-Matematiche 22 II 2013

b) Un elettrone (massa a riposo nota m_0) con velocità nulla urta con un fotone di frequenza nota ν e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto la velocità dell'elettrone è $(-v, 0, 0)$. Determinare il valore di v, la frequenza ν' e la direzione del fotone dopo l'urto.

Teorie fisico-matematiche 13 VII 2013

1. Un filo retilineo con densità di carica uniforme λ all'istante iniziale giace sull'asse z del sistema di riferimento Σ e si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0)$.

a) Determinare il campo elettromagnetico.

Una particella di carica e e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

2. Un corpo di massa a riposo m_0 con velocità iniziale nota $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, con $v > 0$, viene urtato da un fotone di frequenza ignota ν e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto il fotone mantiene la stessa frequenza ν e assume velocità $(c, 0, 0)$ e il corpo si ferma.

a) Dimostrare che in questo processo la massa a riposo del corpo non si conserva.

b) Determinare la frequenza ν, e la massa a riposo m_1 del corpo dopo l'urto.

3. Un fotone di frequenza ν viaggia rispetto al sistema di riferimento Σ lungo una retta, giacente nel piano xz, che forma un angolo θ con l'asse x.

a) Scrivere il quadrimomento del fotone rispetto a Σ, e determinarlo rispetto ad un sistema di riferimento Σ' che si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a Σ.

b) Trovare l'angolo θ' tra la parte spaziale $\mathbf{p}'$ del quadrimomemto del fotone rispetto a Σ' e l'asse x di Σ', e la frequenza ν' rispetto a Σ'.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = E_0(x - y + z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (0, -B_0 z + E_0 t, B_0 y - E_0 t)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(x, 0, 0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie fisico-matematiche 25 VII 2013

1. Derivare, usando le trasformazioni di Lorentz, le leggi di trasformazione della velocità di un punto materiale.

2. Due corpi puntiformi con masse a riposo m_1 e m_2 collidono. Dimostrare che il risultato dell'urto non può essere un unico fotone.

3. Un elettrone con velocità $(v_1, 0, 0)$ si scontra con un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha velocità $(0, v_2, 0)$, mentre il fotone ha velocità $(0, -c, 0)$ e frequenza ν_2. Determinare v_2 e ν_2.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0(x - z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-E_0 t, B_0 x, -E_0 t)$.

a) L'hamiltoniana, è una costante del moto?
b) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, 0, z)$, utilizzando l'equazione del moto.

5. Una carica puntiforme di valore e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata da un campo elettromagnetico

$$\mathbf{E} = (ax + bt, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, 0).$$

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana della carica e mostrare che l'hamiltoniana non è una costante del moto.
b) Individuare la velocità di un sistema di riferimento inerziale Σ' rispetto al quale l'hamiltoniana si conserva.

Teorie fisico-matematiche 16 IX 2013

1. Mostrare che una carica puntiforme di massa a riposo m_0 lentamente accelerata da un campo elettromagnetico non può raggiungere la velocità della luce partendo da velocità inferiori.

2. Un fotone di frequenza nota ν_1 e volocità $(c, 0, 0)$ urta un elettrone (massa a riposo m_0) inizialmente fermo. Dopo l'urto l'elettrone ha una velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, con $v > 0$, e il fotone ha una frequenza ν_2 e velocità $(-c, 0, 0)$.

a) determinare ν_2;

b) mostrare che la velocità del fotone dopo l'urto non potrebbe essere $(c, 0, 0)$.

3. Un filo rettilineo giacente sull'asse x è dotato di densità di carica uniforme λ e corrente elettrica costante i. All'istante $t = 0$ un elettrone si trova nel punto $(0, d, 0)$ e si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$.

a) Determinare $\mathbf{v}$.

b) Trovare la corrente i' rispetto a un sistema di riferimento che si muove con velocità costante $(u, 0, 0)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = E_0(x - y - z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (B_0 z - E_0 t, 0, -B_0 x + E_0 t)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, y, 0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie fisico-matematiche 7 X 2013

1. Trattare l'effetto Doppler relativistico.

2. Una carica puntiforme di valore e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico con potenziali

$$\phi(t,x,y,z) = -\lambda^2 z^2, \quad \mathbf{A}(t,x,y,z,t) = (0,0,-\mu^2 t^2).$$

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana della carica e mostrare che l'hamiltoniana non è una costante del moto.
b) Individuare la velocità di un sistema di riferimento inerziale Σ' rispetto al quale l'hamiltoniana si conserva.

3. Un fotone di frequenza nota ν_1 e volocità $(c,0,0)$ urta un elettrone (massa a riposo m_0) inizialmente fermo. Dopo l'urto l'elettrone ha una velocità $\mathbf{v} = (v,0,0)$, con $v > 0$, e il fotone ha una frequenza ν_2 e velocità $(-c,0,0)$.
a) determinare ν_2 e v;
b) mostrare che la velocità del fotone dopo l'urto non potrebbe essere $(c,0,0)$.

4. Nel sistema di riferimento inerziale Σ l'asse x è dotato di densità di carica uniforme λ e di una corrente elettrica costante i. Un elettrone, soggetto al campo elettromagnetico generato dalla corrente e dal filo, si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ e all'istante $t = 0$ si trova nel punto $(0,d,0)$.
a) Determinare $\mathbf{v}$.
b) Trovare la corrente $\hat{i}$ e la densità di carica $\hat{\lambda}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ che si muove con velocità costante $(u,0,0)$.

Teorie Fisico Matematiche – 4 XI 2013

1. Si consideri un punto materiale che si muove in un sistema inerziale Σ secondo la legge $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Il sistema $\hat{\Sigma}$ è immobile rispetto a Σ e la sua origine occupa il punto $(a, 0, 0)$ di Σ, essendo gli assi di $\hat{\Sigma}$ paralleli ai rispettivi assi di Σ. Il sistema Σ' si muove canonicamente rispetto a $\hat{\Sigma}$, velocità costante $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Determinare le leggi del moto del punto materiale rispetto a Σ'.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo nota m_0 con velocità iniziale nota $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u, 0)$ urta all'istante t_0 una particella puntiforme di uguale massa a riposo m_0 e velocità $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}u, -\frac{\sqrt{3}}{2}u, 0)$, assorbendola.

a) determinare la velocità $\mathbf{w}$ e la massa a riposo m_1 dell'unico corpo risulante dall'urto.

All'istante $t_1 > t_0$ il corpo risultante dall'urto emette un fotone e quindi si ferma.

b) Determinare la frequenza del fotone.

3. Un fotone di frequenza nota ν viaggia rispetto al sistema di riferimento Σ lungo una retta, giacente nel piano xz, che forma un angolo θ con l'asse x.

a) Scrivere il quadrimomento del fotone e determinarlo rispetto ad un sistema di riferimento Σ' che si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a Σ.

b) Trovare l'angolo θ' tra il momento spaziale $\mathbf{p}'$ del fotone rispetto a Σ' e l'asse x di Σ', e la frequenza ν' rispetto a Σ'.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (-E_0 t, 0, B_0 y)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(x_0, 0, 0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie Fisico-Matematiche 28 IV 2014

1.a) Data la quadrivelocità di un punto materiale all'istante t, determinare la quadri-accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento in cui la velocità del punto è $\mathbf{v}(t) = (v(t), 0, 0)$.

b) Stabilire la relazione tra accelerazione coordinata e accelerazione propria.

2. Un elettrone, la cui massa a riposo è m_0, con velocità $(v_1, 0, 0)$ si scontra con un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha velocità $\frac{\sqrt{2}}{2}(v_2, v_2, 0)$, mentre il fotone ha velocità $\frac{\sqrt{2}}{2}(-c, -c, 0)$ e frequenza ν_2. Determinare v_2 e ν_2.

3. Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ è inizialmente sull'asse z; ogni suo punto si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0)$.

a) Stabilire qual è il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0(y - x)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-E_0 t, -E_0 t, B_0 y)$.

a) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

b) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(x, 0, 0)$, utilizzando l'equazione del moto.

5. Una carica puntiforme di valore e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata da un campo elettromagnetico

$$\mathbf{E} = (0, ay + bt, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, 0).$$

Individuare la velocità di un sistema di riferimento inerziale Σ' rispetto al quale l'hamiltoniana si conserva.

Teorie Fisico-Matematiche 11 IX 2014

1.a) Trattare l'effetto Doppler relativistico

b) Indicarne qualche applicazione.

2. Un elettrone, la cui massa a riposo è m_0, con velocità $(0, v_1, 0)$ si scontra con un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(0, -c, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha velocità $\frac{\sqrt{2}}{2}(0, v_2, v_2)$, mentre il fotone ha velocità $\frac{\sqrt{2}}{2}(0, -c, -c)$ e frequenza ν_2. Determinare v_2 e ν_2.

3. Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ è inizialmente sull'asse x; ogni suo punto si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (0, v_0, 0)$.

a) Stabilire qual è il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Nella regione $y > 0$ del sistema di riferimento Σ il potenziale scalare è $\phi = \frac{a}{by-dt}$ e il potenziale vettore è $\mathbf{A} = (0, \frac{ad/b}{by-dt}, 0)$, dove a, b, d sono costanti note.

a) Verificare che l'hamiltoniana di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico corrispondente a questi potenziali non è una costante del moto;

b) individuare la velocità $\mathbf{v}_0$ del sistema di riferimento inerziale Σ', risetto a Σ, in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;

c) se la carica all'istante $t = t_0$ ha velocità $\mathbf{u_0} = (0, v_0, 0)$ e si trova in punto $(0, y_0, 0)$ tale che $m_0c^2 + e\phi'(t_0', 0, y_0', 0) = 0$ determinarne la legge del moto in Σ' (la posizione spazio-temporale $(t_0', 0, y_0', 0)$ corrisponde in Σ' alla posizione $(t_0, 0, y_0, 0)$ in Σ).

d) con le condizioni iniziali date in (c), trovare la legge del moto $\mathbf{x}(t)$ in Σ.

Teorie Fisico-Matematiche 4 VII 2014

1.a) Introdurre i concetti di quadrigradiente e quadridivergenza, mostrandone le proprietà di covarianza.

b) Determinare la proprietà di covarianza del dalambertiano.

2. un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(v, 0, 0)$ note collide all'istante t_0 con un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(u, 0, 0)$. Dall'urto emergono un corpo di massa m_1 con velocità nota $(0, w, 0)$ e un fotone con velocità $(0, c, 0)$ e frequenza ν.

a) Determinare la velocità u.

b) Determinare m_1 e ν.

3. Il campo elettromagnetico nel sistema di riferimento Σ è dato da

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \sin k(x \cos\theta + z \sin\theta - ct), \quad E_z = 0,$$

$$B_x = \frac{E_0}{c} \cos\theta \sin k(x \cos\theta + z \sin\theta - ct), \quad B_y = 0, \quad B_z = -\frac{E_0}{c} \sin\theta \sin k(x \cos\theta + z \sin\theta - ct).$$

a) Individuare il versore di propagazione della corrispondente onda piana in Σ;

b) determinare le relazioni che legano k al numero d'onda k' dell'onda piana rispetto a Σ';

c) Determinare il versore di propagazione $\mathbf{n}'$ rispetto a Σ'.

4. Nella regione $x > 0$ il potenziale scalare è $\phi = -\lambda \ln |ax - bt|$ e il potenziale vettore è $\mathbf{A} = 0$.

a) Verificare che l'hamiltoniano di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico corrispondente a questi potenziali non è una costante del moto;

b) individuare un sistema di riferimento in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;

c) se la carica all'istante $t = 0$ è ferma in $(x_0, 0, 0)$, con $x_0 > 0$, determinarne la velocità quando occupa il punto $(x, 0, 0)$, con $x > x_0$;

d) con le condizioni iniziali date in (c), trovare la legge del moto $x(t)$.

Teorie Fisico-Matematiche 25 VII 2014

1. a) Introdurre i concetti di quadrivelocità e quadriaccelerazione.
b) Determinare le trasformazioni della velocità coordinata dalle trasformazioni della quadrivelocità.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(v_1, 0, 0)$ note collide all'istante t_0 con un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(v_2, 0, 0)$. Dall'urto emergono un corpo di massa m_1 con velocità nota $(w, w, 0)$ e un fotone con velocità $(u, u, 0)$ e frequenza ν.
a) Determinare la velocità v_2.
b) Determinare m_1 e ν.

3. Dimostrare che se il moto di una carica puntiforme di massa a riposo m_0 soddisfa l'equazione del moto relativistica la sua velocità non può raggiungere la velocità della luce se parte da ferma.

4. Nella regione $x > 0$ del sistema di riferimento Σ il potenziale scalare è $\phi = \frac{a}{bx-dt}$ e il potenziale vettore è $\mathbf{A} = (\frac{ad/b}{bx-dt}, 0, 0)$, dove a, b, d sono costanti note.
a) Verificare che l'hamiltoniana di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico corrispondente a questi potenziali non è una costante del moto;
b) individuare la velocità v_0 del sistema di riferimento Σ' canonicamente correlato a Σ in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;
c) se la carica all'istante $t = t_0$ ha velocità $\mathbf{u_0} = (v_0, 0, 0)$ e si trova in punto $(x_0, 0, 0)$ tale che $m_0c^2 + e\phi'(t'_0, x'_0, 0, 0) = 0$ determinarne la legge del moto in Σ' (la posizione spazio-temporale $(t'_0, x'_0, 0, 0)$ corrisponde in Σ' alla posizione $(t_0, x_0, 0, 0)$ in Σ).
d) con le condizioni iniziali date in (c), trovare la legge del moto $x(t)$ in Σ.

Teorie Fisico-Matematiche 6 X 2014

1. a) Introdurre i concetti di tempo proprio e di quadrivettore.
b) Verificare che la quadridensità di corrente è un campo quadrivettoriale.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo nota m_0 e velocità nota $(0, v, 0)$ assorbe un fotone con velocità $(0, c, 0)$ e frequenza ν. Dal processo emergono un corpo con velocità nota $(u, 0, 0)$ e massa a riposo m_1 e un corpo con massa a riposo m_1 e velocità $\mathbf{w} = (w_1, 0, w_3)$.
a) Determinare ν.
b) Determinare m_1 e $\mathbf{w}$.

3. Dimostrare la versione relativistica del teorema delle forze vive.

4. Nella regione $x > 0$ del sistema di riferimento Σ il potenziale scalare è $\phi = (b/d)(bx - dt)c^2$ e il potenziale vettore è $\mathbf{A} = (bx - dt, 0, 0)$, dove a, b, d sono costanti note.
a) Verificare che l'hamiltoniana di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico corrispondente a questi potenziali non è una costante del moto;
b) individuare la velocità v_0 del sistema di riferimento Σ' canonicamente correlato a Σ in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;
c) se la carica all'istante $t = t_0$ ha velocità $\mathbf{u_0} = (v_0, 0, 0)$ e si trova in punto $(x_0, 0, 0)$ tale che $m_0c^2 + e\phi'(t'_0, x'_0, 0, 0) = 0$ determinarne la legge del moto in Σ' (la posizione spazio-temporale $(t'_0, x'_0, 0, 0)$ corrisponde in Σ' alla posizione $(t_0, x_0, 0, 0)$ in Σ).
d) con le condizioni iniziali date in (c), trovare la legge del moto $x(t)$ in Σ.

Teorie fisico-matematiche 25 XI 2014

1. Trattare i principi di conservazione in teoria della relatività.

2. a) Un elettrone, la cui massa a riposo è m_0, con velocità $(v_1, 0, 0)$ si scontra con un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha velocità $\frac{1}{2}(v_2, \sqrt{3}v_2, 0)$, mentre il fotone ha velocità $\frac{1}{2}(-c, -\sqrt{3}c, 0)$ e frequenza ν_2. Determinare v_2 e ν_2.

b!) Un fotone di frequenza nota ν e velocità $(c, 0, 0)$ urta un elettrone (massa a riposo m_0) che ha una velocità $\mathbf{v} = (-v, 0, 0)$. Dopo l'urto il fotone ha velocità $(-c, 0, 0)$. Determinare la frequenza $\nu(v)$ del fotone dopo l'urto come funzione della velocità iniziale dell'elettrone.

3. Un carica puntiforme di valore Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $z(t) = v_0 t$.

a) Determinare il campo elettromagnetico generato dalla carica in Σ.

Un'altra particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dalla prima carica, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (x_0, 0, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = E_0(x - y - z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}B_0 z - E_0 t, 0, \frac{1}{2}B_0 x + E_0 t)$.

a) Verificare se l'hamiltoniana relativistica della particella è una costante.

b) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, y, 0)$.

d) Con le condizioni iniziali date in (c), risolvere l'equazione del moto.

Teorie Fisico Matematiche 28 IV 2015

1. Sia $\rho(t, \vec{x})$ la densità di carica elettrica rispetto a un sistema di riferimento Σ, e $\vec{v}(t, \vec{x})$ la velocità delle cariche nel punto $\vec{x}$ all'istante t. Mostrare che $\underline{j}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}) \begin{bmatrix} c \\ \vec{v}(t, \vec{x}) \end{bmatrix}$ è un campo quadrivettoriale.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo nota M_0 inizialmente fermo assorbe un fotone all'istante t_0.

a) Determinare la massa a riposo M_1 e il modulo v della velocità del corpo dopo l'assorbimento se è nota la frequenza ν del fotone assorbito.

b) Determinare la massa a riposo M_1 e il modulo v della velocità del corpo dopo il decadimento se è nota la frequenza ν' del fotone assorbito rispetto al sistema a riposo del corpo dopo l'assorbimento.

3.a) Data la quadrivelocità $\underline{q}(t)$ di un punto materiale, determinare la quadriaccelerazione al tempo t_0 rispetto ad un sistema di riferimento in cui la velocità del punto è $\mathbf{v}(t_0) = (v(t_0), 0, 0)$.

b) Stabilire la relazione tra accelerazione coordinata e accelerazione propria.

4. Una carica puntiforme e con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico uniforme $\mathbf{E} = (E, E, 0)$, $\mathbf{B} = (B, B, 0)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della carica.

b) Risolvere le equazioni del moto nel caso in cui la carica è inizialmante ferma nel punto $\vec{x} = (0, 0, 0)$, determinare la legge del moto.

c) Determinare la legge del moto con le condizioni iniziali del quesito (b) usando la costanza dell'hamiltoniana.

Teorie Fisico-Matematiche 3 IX 2015

1. a) Derivare l'equazione del moto relativistica per una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.
b) Determinare la lagrangiana di una carica di massa a riposo m_0 che soddisfa l'equazione del moto relativistica.

2. Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0 inizialmente fermo emette due fotoni entrambi di frequenza ν in versi opposti.

a) Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'emissione dei fotoni.

b) Si consideri lo stesso processo rispetto ad un sistema di riferimento Σ' in cui la velocità del corpo prima dell'assorbimento è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni in funzione di ν utilizzando la conservazione del quadrimomento, cioè senza utilizzare le formule dell'effetto Doppler.

3. Nel sistema di riferimento inerziale Σ l'asse y è dotato di densità di carica uniforme λ e di una corrente elettrica costante i. Un elettrone, soggetto al campo elettromagnetico generato dalla corrente e dal filo, si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_0, v_0, v_z)$ e all'istante $t = 0$ si trova nel punto $(d, d, 0)$.

a) Determinare $\mathbf{v}$.

b) Trovare la corrente $\hat{i}$ e la densità di carica $\hat{\lambda}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ che si muove con velocità costante $(0, 0, u)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0 \cdot (x - y + z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (\frac{1}{2}B_0 z + E_0 t 0, , -\frac{1}{2}B_0 x + E_0 t)$.

a) Risolvere l'equazione del moto.

b) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(x_0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche 17 IX 2015

1. Determinare la lagrangiana relativistica di una carica e di massa a riposo m_0 lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(v_1, 0, 0)$ note collide all'istante t_0 con un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(-v_2, 0, 0)$ nota. Dall'urto emergono un corpo di massa μ_0 con velocità $(u_1 \cos\theta, u_1 \sin\theta, 0)$ e un corpo di massa μ_0 e velocità $(-u_2 \cos\theta, -u_2 \sin\theta, 0)$, con $\theta \neq k\pi$. Determinare u_1, u_2 e μ_0.

3. Il campo elettromagnetico nel sistema di riferimento Σ è dato da

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \sin k(x \cos\theta + z \sin\theta - ct), \quad E_z = 0,$$

$$B_x = -\frac{E_0}{c} \sin\theta \sin k(x \cos\theta + z \sin\theta - ct), \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{E_0}{c} \cos\theta \sin k(x \cos\theta + z \sin\theta - ct).$$

a) Individuare il versore di propagazione della corrispondente onda piana in Σ;
b) determinare le relazioni che legano la lunghezza d'onda λ in Σ alla lunghezza d'onda λ' in un sistema Σ' che si muove con velocità costante $(v, 0, 0)$ rispetto a Σ.
c) Determinare il versore di propagazione $\mathbf{n}'$ rispetto a Σ'.

4. Una carica puntiforme e con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (B_0 z, -E_0 t, 0)$.
a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.
b) Risolvere l'equazione del moto con la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$.
c) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.
d) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, y_0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, 2y_0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche 17 IX 2015

1. Determinare la lagrangiana relativistica di una carica e di massa a riposo m_0 lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(v_1, 0, 0)$ note collide all'istante t_0 con un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(-v_2, 0, 0)$ nota. Dall'urto emergono un corpo di massa μ_0 con velocità $(u_1 \cos\theta, u_1 \sin\theta, 0)$ e un corpo di massa μ_0 e velocità $(-u_2 \cos\theta, -u_2 \sin\theta, 0)$, con $\theta \neq k\pi$. Determinare u_1, u_2 e μ_0.

3. Il campo elettromagnetico nel sistema di riferimento Σ è dato da

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \sin k(x\cos\theta + z\sin\theta - ct), \quad E_z = 0,$$

$$B_x = -\frac{E_0}{c}\sin\theta \sin k(x\cos\theta + z\sin\theta - ct), \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{E_0}{c}\cos\theta \sin k(x\cos\theta + z\sin\theta - ct).$$

a) Individuare il versore di propagazione della corrispondente onda piana in Σ;
b) determinare le relazioni che legano la lunghezza d'onda λ in Σ alla lunghezza d'onda λ' in un sistema Σ' che si muove con velocità costante $(v, 0, 0)$ rispetto a Σ.
c) Determinare il versore di propagazione $\mathbf{n}'$ rispetto a Σ'.

4. Una carica puntiforme e con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (B_0 z, -E_0 t, 0)$.
a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.
b) Risolvere l'equazione del moto con la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$.
c) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.
d) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, y_0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, 2y_0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche 26 VI 2015

1. a) Introdurre i concetti di quadrigradiente e quadridivergenza, mostrandone le proprietà di covarianza.

b) Determinare la proprietà di covarianza del dalambertiano.

2. Introdurre il concetto di quadriaccelerazione e determinare la relazione tra accelerazione coordinata e accelerazione propria.

3. Un fotone di frequenza nota ν_1 e velocità $(c, 0, 0)$ urta un elettrone (massa a riposo m_0) inizialmente fermo. Dopo l'urto l'elettrone ha una velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, con $v > 0$, e il fotone ha una frequenza ν_2 e velocità $(-c, 0, 0)$.

a) determinare ν_2 e v;

b) mostrare che la velocità del fotone dopo l'urto non potrebbe essere $(c, 0, 0)$.

4. a) Trattare l'effetto Doppler per la luce.

b) Descrivevere come può essere usato per determinare la velocità di sorgenti lontane.

5. Nella regione $x > 0$ il potenziale scalare è $\phi = -\frac{\lambda}{ax-bt}$ e il potenziale vettore è $\mathbf{A} = (\frac{\mu}{ax-bt}, 0, 0)$, dove il valore μ rende valida la gauge di Lorentz.

a) Verificare che l'hamiltoniano di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico corrispondente a questi potenziali non è una costante del moto;

b) individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;

c) Nel caso in cui le condizioni iniziali sono tali che $h' = 0$, trovare la legge del moto.

Teorie Fisico-Matematiche 16 VII 2015

1.a) Introdurre i concetti di quadrivettore e tempo proprio.

b) Dimostrare che la derivata rispetto al tempo proprio di un quadrivettore è ancora un quadrivettore.

2. Il quadripotenziale è un campo quadrivettoriale, sotto la gauge di Lorentz.

a) Da questa proprietà, determinare le trasformazioni del campo elettromagnetico.

b) Dedurre l'equazione del moto relativistica per una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

3. Un fotone di frequenza nota ν_1 e velocità $(c, 0, 0)$ urta un elettrone (massa a riposo m_0) e velocità $(-v_1, 0, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha una velocità $(v_2 \cos\theta, -v_2 \sin\theta, 0)$, e il fotone ha una frequenza ν_2 e velocità $(c\cos\varphi, c\sin\varphi, 0)$.

a) Determinare ν_2 e v_2 se $\theta = \pi - \varphi$.

b) Determinare ν_2 se $v_1 = 0$ e φ è noto.

4. Siano $\phi = -\lambda(ax - bt)^2$ e $\mathbf{A} = (\mu(ax - bt)^2, 0, 0)$ i potenziali di un campo elettromagnetico, dove il valore μ rende valida la gauge di Lorentz.

a) Verificare che l'hamiltoniano di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico corrispondente a questi potenziali non è una costante del moto;

b) individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;

c) Risolvere l'equazione del moto per una carica e.

Teorie Fisico-Matematiche 4 XI 2015

1. Data la lagrangiana relativistica di una carica e di massa a riposo m_0 lentamente accelerata dal campo elettromagnetico, determinare la hamiltoniana, sia come funzione delle variabili lagrangiane che come funzione delle variabili hamiltoniane.

2. Un corpo puntiforme, di massa a riposo m_0 e velocità $(v, 0, 0)$ note, collide all'istante t_0 con un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 e velocità $(0, v, 0)$ nota. Dall'urto emerge un unico corpo B di massa μ_0 con velocità $\mathbf{u} = u \cdot \mathbf{n}$.

a) Determinare il versore $\mathbf{n}$, e μ_0 come funzione di u.

b) Il corpo B assorbe un fotone e rimane in quiete. Determinare la frequenza ν e la velocità del fotone.

3. Si consideri un fotone di frequenza ν e velocità $(c\cos\theta, 0, c\sin\theta)$.

a) Identificare il quadrimomento del fotone.

b) Determinare le relazioni Doppler per la lunghezza d'onda e l'angolo.

c) Spiegare come si può determinare la velocità di una un corpo celeste lontano sfruttando le relazioni Doppler.

4. I potenziali elettromagnetici nel sistema di riferimento Σ siano $\phi(t, x, y, z) = 0$ e $\mathbf{A} = \left(0, k_0 \frac{yt}{y^2+z^2}, k_0 \frac{zt}{y^2+z^2}\right)$.

a) Scrivere le equazioni del moto di una particella di massa a riposo m_0 e carica elettrica e in Σ.

b) Scrivere le equazioni del moto della particella del quesito (a) in un sistema Σ' canonicamente correlato a Σ

c) Modificare i potenziali, senza alterare i campi, in maniera che la hamiltoniana risulti una costante del moto.

d) Se la particella di (a) all'istante $t_0 = 0$ è ferma nel punto $(0, 0, z_0)$, determinare la sua velocità quando si è spostata nel punto $(0, 0, z)$.

Teorie Fisico-Matematiche 29 I 2016

1. Dimostrare che se il moto di una particella soddisfa l'equazione del moto relativistica, allora il modulo della sua velocità non può raggiungere il valore c, partendo da velocità minori di c.

2. Un corpo puntiforme inizialmente fermo con massa a riposo nota m_0, emette un fotone di frequenza nota ν e velocità $(-c, 0, 0)$.

a) Determinare la nuova massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{v}$ del corpo dopo l'emissione;

b) Successivamente il corpo si disintegra in due corpi con la stessa massa a riposo m_2 e velocità $\mathbf{u} = u(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ e $\mathbf{w} = u(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, rispettivamente. Determinare m_2, θ e φ in funzione di u.

3. In un sistema di riferimento Σ il campo elettrico e magnetico sono

$$\mathbf{E} = \frac{a}{y^2 + z^2}(0, y, z), \qquad \mathbf{B} = \frac{b}{y^2 + z^2}(0, z, -y).$$

a) Determinare la velocità $\mathbf{v}_0$ rispetto a Σ di un sistema di riferimento Σ' nel quale il campo magnetico $\mathbf{B}'$ è identicamente nullo.

b) Dimostrare che la hamiltoniana di una carica e con massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo, è una costante del moto tanto in Σ che in Σ'.

c) Se la carica del punto (b) ha, rispetto a Σ', velocità iniziale nulla e posizione iniziale $\mathbf{x}'(0) = (0, y'_0, 0)$, determinare la velocità $\mathbf{v}'$ quando arriva nel punto $\mathbf{x}' = (0, y', 0)$.

.

4. a) Determinare le relazioni dell'effetto Doppler per la radiazione elettromagnetica.

b) Mostrare come le relazioni dell'effetto Doppler possono essere utilizzate per determinare la velocità di corpi celesti dalla osservazione astronomica.

Teorie Fisico-Matematiche 17 II 2016

1. Determinare la Lagrangiana di una particella puntiforme di carica e e massa a riposo m_0 il cui moto soddisfa l'equazione del moto relativistica.

2. Un corpo puntiforme inizialmente fermo con massa a riposo nota m_0, assorbe una particella di massa m_0 e velocità $(u, 0, 0)$.

a) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{v}$ del corpo risultante dal processo.

b) Successivamente quest'unico corpo si disintegra in due corpi con la stessa massa a riposo m_2 e velocità $\mathbf{w}_1 = w(\cos\theta, 0, \sin\theta)$ e $\mathbf{w}_2 = w(\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$, rispettivamente. Determinare m_2, θ e φ in funzione di w.

3. In un sistema di riferimento Σ il campo elettrico e magnetico sono

$$\mathbf{E} = \frac{a^2}{y^2 + z^2}(0, y, z), \qquad \mathbf{B} = \frac{b^2}{y^2 + z^2}(0, z, -y).$$

a) Determinare la lagrangiana e l'hamiltoniana di una particella puntiforme, con carica e massa a riposo m_0 note, lentamente accelerata da tale campo, e verificare che l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Verificare che se il moto della particella avviene a velocità costante in modulo, allora anche la distanza dall'asse x deve mantenersi costante.

c) Verificare che il vettore velocità della particella del punto (a) non può essere costante.

d) Nel caso la velocità $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sia costante in modulo, con $v_x = 0$, stabilire il segno della carica e e determinare $|\mathbf{v}|$.

.

4. Trattare le implicazioni nella Fisica Teorica dell'esistenza di moti con velocità maggiori di c.

Teorie Fisico Matematiche 31 iii 2016

1.a) Introdurre i concetti di quadrigradiente e quadridivergenza, e determinare dalle loro proprietà di covarianza quelle del dalembertiano.

b) Date le equazioni per il quadripotenziale $\Box \underline{A} = \underline{j}/(\epsilon_0 c^2)$, usare le proprietà di covarianza del dalembertiano per dedurre le leggi di trasformazione del quadripotenziale.

2. Introdurre il concetto di quadriaccelerazione e determinare la relazione tra accelerazione coordinata e accelerazione propria.

3. In un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ un fotone di frequenza nota $\hat{\nu}_1$ e velocità $(c, 0, 0)$ urta un elettrone (massa a riposo m_0) inizialmente fermo. Dopo l'urto l'elettrone ha una velocità $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}, 0, 0)$, con $\hat{v} > 0$, e il fotone ha una frequenza $\hat{\nu}_2$ e velocità $(-c, 0, 0)$.

a) Determinare $\hat{\nu}_2$ e $\hat{v}$;

b) Si consideri lo stesso processo rispetto ad un sistema di riferimento Σ rispetto al quale l'elettrone ha una velocità iniziale $u < 0$ e la frequenza del fotone prima dell'urto è ν_1. Determinare la frequenza ν_2 del fotone dopo l'urto rispetto a Σ in funzione di u.

4. Nella regione $x > 0$ il campo elettromagnetico è $\mathbf{E} = (\frac{\lambda}{(ax-bt)^2}, 0, 0)$ e $\mathbf{B} = (0, 0, 0)$.

a) Verificare che l'hamiltoniano di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico non è una costante del moto;

b) individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto;

c) Nel caso in cui le condizioni iniziali sono tali che $h' = 0$, trovare la legge del moto.

Teorie Fisico-Matematiche 8 ix 2016

1. Il moto di una carica di massa a riposo m_0 soddisfa l'equazione del moto relativistica.

a) Determinare la lagrangiana della particella.

b) Determinare la hamiltoniana.

2. Due fotoni, con la stessa energia $h\nu_1$, hanno velocità $\mathbf{u} = c(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ e $\mathbf{v} = c(-\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

I fotoni collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.

b) Determinare la massa a riposo m_B e la velocità $\mathbf{w}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in due fotoni con la stessa energia $h\nu_2$ e una particella C con velocità $\mathbf{w}$.

c) Determinare la relazione tra la frequenza ν_2 dei fotoni e la massa a riposo m_C della particella C.

3. Dimostrare che la quadridensità di corrente è un campo quadrivettoriale.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica negativa e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = f(x - ct)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (\frac{1}{c} f(x - ct), 0, -B_0 x)$, dove f è una funzione derivabile.

a) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$.

b) Modificare i potenziali senza alterare il campo elettromagnetico così che l'hamiltoniana risulti una costante nel tempo.

c) Dimostrare che $|\mathbf{v}(t)|$ è costante nel tempo.

d) date le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (R, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0, 0, -v_0)$, determinare il valore di R per cui la traiettoria è una circonferenza con centro $(0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche 28 vi 2016

1. Stabilire le relazioni dell'effetto Doppler per la radiazione elettromagnetica, anche nel caso in cui la direzione di propagazione non coincide con la direzione del moto relativo.

2. Un fotone con frequenza nota ν_1 e velocità $(c, 0, 0)$ urta un elettrone con velocità nota $(v_1, 0, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha una velocità $(v_2 \cos\theta, -v_2 \sin\theta, 0)$, e il fotone ha una frequenza ν_2 e velocità $(c \cos\varphi, c \sin\varphi, 0)$.

a) Determinare ν_2, v_2 e θ se $\varphi = \pi$.

b) Determinare la lunghezza d'onda $\lambda_2 = \frac{c}{\nu_2}$ in funzione di φ.

3. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0(-x + y - z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (0, -\frac{1}{2}B_0 z - E_0 t, \frac{1}{2}B_0 y + E_0 t)$.

a) Risolvere l'equazione del moto, se la carica è inizialmente ferma.

b) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie Fisico-Matematiche 18 vii 2016

1. Il moto di una carica di massa a riposo m_0 soddisfa l'equazione del moto relativistica.

a) Far vedere che la sua velocità non può raggiungere il valore della velocità della luce se inizialmente ferma.

b) Far vedere che la variazione della parte temporale del suo quadrimomento è uguale al lavoro compiuto dalla forza di Lorentz.

2. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0, hanno velocità $\mathbf{v}_1 = (v_x, v_y, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (v_x, -v_y, 0)$.

a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

Le particelle collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.

b) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{u}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in una particella C e un fotone.

c) Determinare la relazione tra la frequenza ν_0 del fotone e il modulo w_0 della velocità della particella C rispetto a Σ_0.

3. Determinare la lagrangiana relativistica di una carica puntiforme con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = a \sin\{k(x - ct)\}$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (\frac{a}{c} \sin\{k(x - ct)\} + B_0 z, 0, 0)$.

a) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$.

b) Modificare i potenziali senza alterare il campo elettromagnetico così che l'hamiltoniana risulti una costante nel tempo.

c) Dimostrare che $|\mathbf{v}(t)|$ è costante nel tempo.

d) date le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (R, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0, 0, -v_0)$, determinare il valore di R per cui la traiettoria è una circonferenza con centro $(0, 0, 0)$.

Teorie Fisico Matematiche 2 xi 2016

1. Fare uso delle trasformazioni del campo elettromagnetico per determinare l'equazione del moto di una particella carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

2. Un corpo puntiforme, con massa a riposo m_0 e modulo della velocità u noti, assorbe un fotone di frequenza ν_1; l'unico corpo B emergente dal processo è fermo.

a) Determinare la massa a riposo m_1 di B e la frequenza ν_1.

b) Il corpo B emette tre fotoni con la stessa frequenza ν_2, uno dei quali ha velocità $(c, 0, 0)$, e il corpo C rimanente ha massa m_0 e velocità nulla. Determinare ν_2 e la velocità dei tre fotoni.

3. In un sistema di riferimento Σ il campo elettrico e magnetico sono

$$\mathbf{E} = \frac{a^2}{y^2 + z^2}(0, y, z), \qquad \mathbf{B} = \frac{b^2}{y^2 + z^2}(0, -z, y).$$

a) Determinare, se esistono, i sistemi di riferimento Σ_1 e Σ_2 in cui il campo magnetico e il campo elettrico sono rispettivamente nulli.

b) Determinare la lagrangiana e l'hamiltoniana di una particella puntiforme, con carica e massa a riposo m_0 note, lentamente accelerata da tale campo, e verificare che l'hamiltoniana è una costante del moto.

c) Verificare che se il moto della particella avviene con distanza dall'asse x costante, allora anche il modulo della velocità deve mantenersi costante.

4. Trattare le implicazioni nella Fisica Teorica dell'esistenza di moti con velocità maggiori di c.

Teorie Fisico-Matematiche 27 ii 2017

1. a) Usare le trasformazioni del quadripotenziale per determinare le trasformazioni del campo elettromagnetico tra due sistemi di riferimento Σ e Σ' canonicamente correlati.
b) Determinare l'equazione del moto relativistica di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

2. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0, hanno velocità $\mathbf{v}_1 = (0, \frac{5}{13}c, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, \frac{12}{13}c, 0)$.
a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

Le particelle collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.
b) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{u}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in due fotoni che viaggiano nella direzione dell'asse y.
c) Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei fotoni.

3. Nel sistema di riferimento Σ una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali elettromagnetici $\phi = \lambda(ax - bt)$ e $\mathbf{A} = (\mu(ax - bt), 0, B_0 y)$, dove il valore di μ rende valida la gauge di Lorentz.
a) Individuare un sistema di riferimento rispetto al quale l'hamiltoniana è una costante del moto.
b) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella di massa a riposo m_0 e carica e è $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, g(t), 0)$, dove g è una funzione derivabile e integrabile del tempo t. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$

Teorie Fisico-Matematiche 7 IV 2017

1.a) Data la quadrivelocità di un punto materiale all'istante t, determinare la quadri-accelerazione rispetto ad un sistema di riferimento in cui la velocità del punto è $\mathbf{v}(t) = (v(t), 0, 0)$.

b) Stabilire la relazione tra accelerazione coordinata e accelerazione propria.

2. Un elettrone, la cui massa a riposo è m_0, con velocità $(v_1, 0, 0)$ si scontra con un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(-c, 0, 0)$.

a) Se dopo l'urto l'elettrone ha velocità $\mathbf{v}_2 = v_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$e il fotone ha velocità $(-\frac{\sqrt{3}}{2}c, -\frac{1}{2}c, 0)$ e frequenza ν_2, determinare v_2 e ν_2 in funzione di v_1 e ν_1.

b) Se dopo l'urto il fotone ha velocità $(c, 0, 0)$ e frequenza $b\nu_1$, determinare v_1 in funzione di b e ν_1.

3. Una carica puntiforme è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

a) Determinare la relazione tra lavoro e variazione della parte temporale del quadrimomento (teorema delle forze vive relativistico).

b) Dimostrare che se la velocità iniziale è minore di c, allora si manterrà sempre minore di c.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = -\frac{1}{2}ax^2$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}bt^2, 0, 0)$.

a) Determinare il sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ rispetto al quale l'hamiltoniana, è una costante del moto.

b) Se la carica è inizialmente ferma rispetto a $\hat{\Sigma}$ nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(\hat{x}, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la legge del moto.

Teorie Fisico Matematiche 11 ix 2017

1. a) Introdurre il concetto di tempo proprio e dimostrare l'invarianza del suo valore rispetto a diversi sistemi di riferimento inerziali.

b) Dimostrare che la quadridensità di corrente è un campo quadrivettoriale.

2. a) Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0 nota inizialmente fermo assorbe poi due fotoni, entrambi di frequenza ν nota, provenienti da versi opposti. Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento dei fotoni.

b) La velocità di un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Esso assorbe poi due fotoni di frequenza ν_1 e ν_2 rispettivamente, lasciando un corpo di massa a riposo nota m_1 e velocità $(u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni e le loro velocità.

3. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0(y - x)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-E_0 t, -E_0 t, B_0 y)$.

a) Risolvere l'equazione del moto se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$.

b) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi e determinare la legge del moto con le condizioni iniziali del punto (a) utilizzanto la costanza dell'hamiltoniana.

4. Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella di massa a riposo m_0 e carica e è $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, g(t), 0)$, dove g è una funzione derivabile e integrabile del tempo t. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$

Teorie Fisico-Matematiche 30 vi 2017

1. Dimostrare che la quadridensità di corrente $\underline{j} = \begin{bmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \end{bmatrix}$ è un campo quadrivettoriale.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo nota M_0 inizialmente fermo emette all'istante t_0 un fotone.

a) Determinare la massa a riposo M_1 e il modulo v della velocità del corpo dopo il decadimento se è nota la frequenza ν del fotone emesso.

b) Determinare il modulo v della velocità del corpo prima dell'emissione e la massa a riposo M_1 dopo l'emissione se è nota la frequenza ν' del fotone emesso rispetto al sistema a riposo del corpo dopo l'emissione.

3. Un fotone di frequenza nota ν_1 velocità $(c, 0, 0)$ e un elettrone con velocità $\mathbf{v_1} = (-v_1, 0, 0)$, $v_1 > 0$, urtano; dopo l'urto la velocità dell'elettrone è $\mathbf{v}_2 = (v_2, 0, 0)$ e la frequenza del fotone è ν_2.

a) Dimostrare che $v_2 > 0$.

b) Determinare ν_2 e v_2 in funzione di ν_1 e v_1.

c) Mostrare che se $v_2 \to c$ allora $\nu_2 \to \infty$.

4. Determinare la relazione tra lavoro compiuto dal campo elettromagnetico su una carica puntiforme di massa a riposo m_0 e parte temporale del quadrimomento della carica nel cas in cui il moto soddisfa l'equazione del moto relativistica.

5. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = -\frac{1}{2}ax^2$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}bt^2, 0, B_0 y)$.

a) Determinare il sistema di riferimento $\tilde{\Sigma}$ rispetto al quale l'hamiltoniana, è una costante del moto.

b) Se la carica è inizialmente ferma rispetto a $\tilde{\Sigma}$ nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(\tilde{x}, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la legge del moto.

Teorie Fisico Matematiche 20 vii 2017

1. a) Determinare la lagrangiana di una carica di massa a riposo m_0 che soddisfa l'equazione del moto relativistica.

b!) Determinare la lagrangiana covariante.

2. a) Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0 nota inizialmente fermo emette poi due fotoni, entrambi di frequenza ν nota, in versi opposti. Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'emissione dei fotoni.

b!) La velocità di un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Esso emette poi due fotoni di frequenza ν_1 e ν_2 rispettivamente, lasciando un corpo di massa a riposo nota m_1 e velocità $(u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni.

3. Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ è inizialmente sull'asse x; ogni suo punto si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (0, v_0, 0)$.
a) Stabilire qual è il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:
b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;
c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0 \cdot (x - y + z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (\frac{1}{2}B_0 z - E_0 t, 0, -\frac{1}{2}B_0 x - E_0 t)$.
a) Risolvere l'equazione del moto.
b) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.
c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la posizione quando la velocità è $(0, v_0, 0)$.

Teorie Fisico Matematiche 17 xi 2017

1. a) Date le trasformazioni di Lorentz, determinare le trasformazioni della velocità di una particella.

b) Dimostrare che la quadridensità di corrente è un campo quadrivettoriale.

2. a) Un corpo puntiforme A con massa a riposo M_0 e velocità $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ note, assorbe poi due fotoni, entrambi di frequenza ν nota e rispettive velocità $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-c, c, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-c, -c, 0)$. Dopo l'assorbimento rimane un unico corpo B di massa a riposo M_1 fermo. Determinare la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento dei fotoni.

b) La velocità di un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Esso emette poi un fotone di frequenza ν_1 con velocità $(c, 0, 0)$ e un ulteriore fotone di frequenza ν_2, lasciando un corpo di massa a riposo nota m_1 e velocità $(u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni e la velocità del secondo fotone.

3. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico generato da una carica Q ferma nell'origine del sistema di riferimento.

a) Trovare la lagrangiana e l'hamiltoniana della particella.

b) Se all'istante t_0 la particella è ferma in $\mathbf{x}(t_0) = (x_0, 0, 0)$, dimostrare che ad un qualunque istante la posizione sarà del tipo $(v, 0, 0)$.

c) Se all'istante t_0 la particella è ferma in $\mathbf{x}(t_0) = (x_0, 0, 0)$, determinare la velocità quando occupa la posizione $(x, 0, 0)$.

4. Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella di massa a riposo m_0 e carica e è $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, g(t), 0)$, dove g è una funzione derivabile e integrabile del tempo t. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$

Teorie Fisico Matematiche 5 ii 2018

1. a) Una volta introdotto il concetto di quadriaccelerazione, determinare la relazione tra accelerazione a riposo e accelerazione coordinata.

b) Dimostrare che la quadridensità di corrente è un campo quadrivettoriale.

2. a) Un corpo puntiforme A con massa a riposo M_0 e velocità $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ note, assorbe poi due fotoni, entrambi di frequenza ν nota e rispettive velocità $\mathbf{v}_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}c, \frac{1}{2}c, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}c, -\frac{1}{2}c, 0)$. Dopo l'assorbimento rimane un unico corpo B di massa a riposo M_1 fermo. Determinare la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento dei fotoni.

b) La velocità di un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Esso assorbe poi un fotone di frequenza ν_1 con velocità $(c, 0, 0)$ e un ulteriore fotone di frequenza ν_2; il corpo risultante ha massa a riposo nota m_1 e velocità $(u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni e la velocità del secondo fotone.

3. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico generato da un filo rettilineo fermo lungo l'asse y con densità di carica elettrica uniforme λ.

a) Trovare la lagrangiana e l'hamiltoniana della particella.

b) Se all'istante t_0 la particella è ferma in $\mathbf{x}(t_0) = (x_0, 0, 0)$, dimostrare che ad un qualunque istante la posizione sarà del tipo $(v, 0, 0)$.

c) Se all'istante t_0 la particella è ferma in $\mathbf{x}(t_0) = (x_0, 0, 0)$, determinare la velocità quando occupa la posizione $(x, 0, 0)$.

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella di massa a riposo m_0 e carica e è $\mathbf{E} = (0, E_0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, g(t), 0)$, dove g è una funzione derivabile e integrabile del tempo t. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$

Teorie Fisico-Matematiche 26 ii 2018

1. Date le proprietà di covarianza del quadrigradiente e della quadridivergenza, determinare le proprietà di covarianza del dalembertiano.

2. Determinare la lagrangiana di una particella il cui moto soddisfa l'equazione del moto relativistica.

3. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0, hanno velocità $\mathbf{v}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}c, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{2}c, 0, 0)$.

a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

Le particelle collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.

b) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{u}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in due fotoni che viaggiano nella direzione dell'asse x.

c) Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei fotoni.

4. Nel sistema di riferimento Σ una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata da un campo elettromagnetico con potenziali $\phi = a\cos^2[k(x - ct)]$ e $\mathbf{A} = (\frac{a}{c}\cos^2[k(x - ct)], -B_0 x, 0)$.

a) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

b) Modificare i potenziali senza alterare il campo elettromagnetico così che l'hamiltoniana risulti una costante nel tempo.

c) Dimostrare che $|\mathbf{v}(t)|$ è costante nel tempo, indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Teorie Fisico Matematiche 23 iv 2018

1. a) Usare le trasformazioni del quadripotenziale per determinare le trasformazioni del campo elettromagnetico tra due sistemi di riferimento Σ e Σ' canonicamente correlati.
b) Determinare l'equazione del moto relativistica di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

2. Una particella, con massa a riposo m_0 e velocità $\mathbf{v}_1 = (0, \frac{5}{13}c, 0)$, assorbe un fotone di frequenza ν; dopo l'assorbimento la paricella ha velocità $\mathbf{v}_2 = (0, -\frac{12}{13}c, 0)$.
a) Determinare la frequenza ν del fotone assorbito e la massa a riposo m_1 della particella dopo l'assorbimento.

Successivamente la particella si disintegra in due fotoni che viaggiano nella direzione dell'asse y.
b!) Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei fotoni.

4. Nel sistema di riferimento Σ una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali elettromagnetici

$$\phi = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \mu \sin[k(x - \omega t)], \quad \mathbf{A} = (\frac{\mu}{\omega} \sin[k(x - \omega t)], 0, 0).$$

a) Trovare i potenziali che determinano gli stessi campi in maniera che l'hamiltoniana sia una costante del moto.
b) Determinare la legge del moto relativa alle condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (-\frac{\lambda}{m_0 c^2}, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche - 10 ix 2018

1. Si consideri una particella lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

a) Determinare l'equazione del moto.

b) Dimostrare che se inizialmente la sua velocità è minore di c in modulo, allora $|\mathbf{v}(t)| < c$, per ogni t.

2. Una particella inizialmente ferma, di massa a riposo M nota, decade in tre particelle con la stessa massa a riposo m_0 e velocità e velocità $\mathbf{v}_1 = 0.1c(1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = v_2(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ e $\mathbf{v}_3 = v_3(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Determinare m_0, v_2 e v_3.

3. Una particella di massa a riposo m_0 e carica e è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = \frac{b}{x-u_0t}$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = \frac{u_0}{c^2}(\frac{b}{x-u_0t}, 0, 0)$.

a) Individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Determinare le condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ in Σ per cui le condizioni iniziali in Σ' sono $\mathbf{x}'(0) = (-\frac{eb}{m_0c^2}, 0, 0)$ e $\mathbf{v}'(0) = (0,0,0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la velocità della particella quando ha raggiunto la posizione $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ in Σ'.

d) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la legge del moto in Σ' e in Σ.

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella carica è $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x(\mathbf{x}), B_y(\mathbf{x}), B_z(\mathbf{x}))$, con $B_y(x,0,0) = B_z(x,0,0) = 0$. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche 22 vi 2018

1. a) Determinare le trasformazioni della velocità coordinata usando le trasformazioni della quadrivelocità.

b) Stabilire la relazione tra accelerazione coordinata e accelerazione propria.

2. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0, hanno velocità $\mathbf{v}_1 = (v_x, 0, v_z, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (-v_x, 0, v_z)$.

a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

Le particelle collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.

b) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{u}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in una particella C e un fotone.

c) Determinare la relazione tra la frequenza ν del fotone e il modulo w della velocità della particella C rispetto a Σ_0.

3. Una carica puntiforme è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

a) Determinare la relazione tra lavoro e variazione della parte temporale del quadrimomento (teorema delle forze vive relativistico).

b) Dimostrare che se la velocità iniziale è minore di c, allora si manterrà sempre minore di c.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico generato da una carica Q che si muove con la legge del moto $\mathbf{X}(t) = (v_0 t, 0, 0)$. Determinare il sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ rispetto al quale l'hamiltoniana, è una costante del moto.

b) Se la carica è inizialmente ferma rispetto a $\hat{\Sigma}$ nel punto $(\hat{x}_0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(\hat{x}, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b) e $\hat{x}_0 = \frac{-eQm_0c^2}{4\pi\epsilon_0}$, determinare la legge del moto.

Teorie Fisico-Matematiche 2 vii 2018

1.a) Determinare le trasformazioni della velocità usando le trasformazioni della quadri-velocità come quadrivettore.

b) Determinare la lagrangiana di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagneico.

2. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0, hanno velocità $\mathbf{v}_1 = (v_x, 0, v_z)$ e $\mathbf{v}_2 = (-v_x, 0, v_z)$.

a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

Le particelle collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.

b) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{u}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in una particella C e un fotone.

c) Determinare la relazione tra la frequenza ν del fotone e il modulo w della velocità della particella C rispetto a Σ_0.

3. Nel sistema di riferimento inerziale Σ l'asse z è dotato di densità di carica uniforme λ e di una corrente elettrica costante i. Trovare la corrente $\hat{i}$ e la densità di carica $\hat{\lambda}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ che si muove con velocità costante $(0, 0, u)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico generato da una carica Q che si muove con la legge del moto $\mathbf{X}(t) = (v_0 t, 0, 0)$.

a) Determinare il sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ rispetto al quale l'hamiltoniana, è una costante del moto.

b) Trovare le condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ rispetto a Σ che corrispondono alle condizioni $\hat{\mathbf{x}}(0) = \dfrac{-eQ}{4\pi m_0 c^2 \epsilon_0}$ e $\hat{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0}$ rispetto a $\hat{\Sigma}$.

c) Se la carica è inizialmente ferma rispetto a $\hat{\Sigma}$ al tempo $\hat{t} = 0$ nel punto $(\hat{x}_0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(\hat{x}, 0, 0)$.

d!) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la legge del moto.

Teorie Fisico-Matematiche - 19 vii 2018

1. Determinare le relazioni Doppler per la radiazione elettromagnetica.

2. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0 e velocità $\mathbf{v}_1 = v_0(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $\mathbf{v}_2 = v_0(1, 0, 0)$, collidono e dall'urto emerge un'unica particella A

a) Determinare massa a riposo m_1 e la velocità di A.

Tale particella A collide con una particella B di massa a riposo m_0, e dall'urto emerge una particella C che rimane ferma.

b) Determinare la massa a riposo m_2 di C e la velocità $\mathbf{v}_3$ della particella B.

3. Una particella di massa a riposo m_0 e carica e è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = \frac{A}{x - u_0 t}$ e potenziale vettore è $\mathbf{A} = (-\frac{C}{x - u_0 t}, 0, 0)$.

a) Individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Determinare le condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ in Σ per cui le condizioni iniziali in Σ' sono $\mathbf{x}'(0) = (x'_0 = -e\frac{A + u_0 C}{m_0 c^2}, 0, 0)$ e $\mathbf{v}'(t_0) = (0, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la velocità della particella quando ha raggiunto la posizione $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ in Σ'.

d) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la legge del moto in Σ' e in Σ.

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella carica è $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x(\mathbf{x}), B_y(\mathbf{x}), B_z(\mathbf{x}))$, con $B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche - 12 xi 2018

1. Determinare la lagrangiana relativistica di una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico.

2. Due particelle, con la stessa massa a riposo m_0, hanno velocità $\mathbf{v}_1 = (v, 0, v)$ e $\mathbf{v}_2 = (v, 0, -v)$.

a) Determinare il sistema di riferimento Σ_0 rispetto al quale il momento relativistico totale è nullo.

Le particelle collidono e dalla collisione emerge un'unica particella B.

b) Determinare la massa a riposo m_1 e la velocità $\mathbf{u}$ della particella B.

Successivamente la particella B si disintegra in una particella C con velocità $\mathbf{w} = (u_0, 0, 0)$ nota e un fotone di frequenza ν.

c) Determinare la massa a riposo di C e la frequenza ν del fotone.

3. Nel sistema di riferimento inerziale Σ l'asse y è dotato di densità di carica uniforme λ e di una corrente elettrica costante i. Un elettrone, soggetto al campo elettromagnetico generato dalla corrente e dal filo, si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (0, v_y, v_z)$ e all'istante $t = 0$ si trova nel punto $(0, 0, d)$.

a) Determinare $\mathbf{v}$.

b) Trovare la corrente $\hat{\imath}$ e la densità di carica $\hat{\lambda}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ che si muove con velocità costante $(0, u, 0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = -\frac{1}{2}E_0 x$ e $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}E_0 t, 0, B_0 y)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(x_0, 0, 0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie Fisico-Matematiche - 6 ii 2019

1. Determinare le relazioni Doppler relativistiche per la radiazione elettromagnetica.

2. **a**) Un fotone di frequenza ν e velocità $(c, 0, 0)$ colpisce un elettrone con massa a riposo m_0, che dopo l'urto rimane fermo. Determinare
a.i) la velocità $\mathbf{v}$ dell'elettrone prima dell'urto;
a.ii) la velocità e la frequenza del fotone dopo l'urto.

b!) Un fotone di frequenza ν e velocità $(c, 0, 0)$ colpisce un elettrone con massa a riposo m_0 e velocità $\mathbf{v} = (-v, 0, 0)$; dopo l'urto il fotone ha velocità $(-c, 0, 0)$. Determinare la frequenza del fotone e la velocità dell'elettrone dopo dell'urto.

c) Dimostrare che il prodotto dell'urto tra due particelle non può essere un singolo fotone.

3. Nel sistema di riferimento inerziale Σ l'asse z è dotato di densità di carica uniforme λ e di una corrente elettrica costante i. Un elettrone, soggetto al campo elettromagnetico generato dalla corrente e dal filo, si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ e all'istante $t = 0$ si trova nel punto $(d, 0, 0)$.

a) Determinare $\mathbf{v}$.
b) Trovare la corrente $\hat{i}$ e la densità di carica $\hat{\lambda}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ che si muove con velocità costante $(0, 0, u)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare
$\phi = E_0 \cdot (x + y - z)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-\frac{1}{2}B_0 y - E_0 t, \frac{1}{2}B_0 x - E_0 t, 0)$.

a) Risolvere l'equazione del moto.
b) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.
c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la posizione quando la velocità è $(0, 0, v_0)$.

Teorie Fisico-Matematiche - 1 iii 2019

1. Partendo dalle trasformazioni dei potenziali elettromagnetici, determinare le trasformazioni del campo elettromagnetico.

2. **a**) Un fotone di frequenza ν_1 e velocità $(c, 0, 0)$ colpisce un elettrone con massa a riposo m_0 e velocità $\mathbf{v} = (-v, 0, 0)$; dopo l'urto il fotone ha velocità $(-c, 0, 0)$. Determinare la frequenza ν_2 del fotone e la velocità $\mathbf{u}$ dell'elettrone dopo dell'urto.

b) Dimostrare che il prodotto dell'urto tra due particelle non può essere un singolo fotone.

3. Nel sistema di riferimento inerziale Σ l'asse z è dotato di densità di carica uniforme λ e di una corrente elettrica costante i. Un elettrone, soggetto al campo elettromagnetico generato dalla corrente e dal filo, si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ e all'istante $t = 0$ si trova nel punto $(d, 0, 0)$.

a) Determinare $\mathbf{v}$.

b) Trovare la corrente $\hat{\imath}$ e la densità di carica $\hat{\lambda}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\hat{\Sigma}$ che si muove con velocità costante $(0, 0, u)$.

4. Una carica puntiforme di valore e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata da un campo elettromagnetico

$$\mathbf{E} = (ax + bt, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (B_0, 0, 0).$$

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana della carica e mostrare che l'hamiltoniana non è una costante del moto.

b) Individuare la velocità $\mathbf{v}$ di un sistema di riferimento inerziale Σ' rispetto al quale l'hamiltoniana si conserva.

c!) Determinare la legge del moto della carica corrispondente alle condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$ e $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(0) = \mathbf{v}$.

Teorie Fisico-Matematiche - 9 iv 2019

1. Trattare l'effetto Doppler relativistico per la radiazione elettromagnetica.

2. Un fotone di frequenza ν_1 e velocità $\frac{\sqrt{2}}{2}(c, c, 0)$ colpisce un elettrone con massa a riposo m_0 e velocità $\mathbf{v} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(v, v, 0)$; dopo l'urto il fotone ha velocità $-\frac{\sqrt{2}}{2}(c, c, 0)$. Determinare la frequenza ν_2 del fotone e la velocità $\mathbf{u}$ dell'elettrone dopo dell'urto.

3. Un piano carico giacente sul piano xy del sistema di riferimento Σ, con densità superficiale di carica uniforme σ, si muove con velocità uniforme $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0)$.

a) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal piano carico, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

4. Una particella puntiforme con carica elettrica e e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = \sin(y - ct)$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (-B_0 y, \frac{1}{c}\sin(y - ct), 0)$.

a) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

b) Modificare i potenziali senza alterare il campo elettromagnetico così che l'hamiltoniana risulti una costante nel tempo.

c) Dimostrare che $|\mathbf{v}(t)|$ è costante nel tempo.

Teorie Fisico-Matematiche - 5 ix 2019

1. Date le trasformazioni del quadripotenziale, derivare le trasformazioni del campo elettromagnetico.

2. a) Dimostrare che il risultato dell'urto tra particelle massive non può essere un singolo fotone.

b) La velocità nota di un elettrone è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ con $u > 0$. Esso urta un fotone di frequenza nota ν_1 e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto l'elettrone ha velocità $(v, 0, 0)$, con $v \neq u$. Determinare il valore di v e la frequenza ν_2 del fotone dopo l'urto.

3. Una particella di massa a riposo m_0 e carica e è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico $\mathbf{E} = (a(x - u_0 t), 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, 0)$.

a) Individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Determinare le condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ in Σ per cui le condizioni iniziali in Σ' sono $x'(0) = \left(\frac{2m_0c^2}{ea\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$, $y'(0) = 0$, $z'(0) = 0$, e $\mathbf{v}'(0) = (0, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la velocità della particella quando ha raggiunto la posizione $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ in Σ'.

d) Determinare la legge del moto in Σ' con le condizioni iniziali del punto (b).

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella carica è $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = (E_0, 0, 0)$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = (f(t), 0, 0)$, dove f è una funzione del solo tempo. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche 3 vii 2019

1. Stabilire le relazioni dell'effetto Doppler per la radiazione elettromagnetica.

2. a) Un corpo puntiforme A, di massa a riposo M_0 nota, inizialmente fermo assorbe poi due fotoni entrambi di frequenza ν nota, provenienti da versi opposti. Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento dei fotoni.

b) La velocità di un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Esso assorbe poi due fotoni, di frequenza ν_1 e ν_2 rispettivamente, entrambi con velocità lungo la direzione x, lasciando un corpo di massa a riposo nota m_1 e velocità $(u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni.

3. Una particella di massa a riposo m_0 e carica e è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = \frac{b}{x-u_0t}$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = \frac{u_0}{c^2}(\frac{b}{x-u_0t}, 0, 0)$.

a) Individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Determinare le condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ in Σ per cui le condizioni iniziali in Σ' sono $\mathbf{x}'(0) = (-\frac{eb}{m_0c^2}, 0, 0)$ e $\mathbf{v}'(0) = (0, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la velocità della particella quando ha raggiunto la posizione $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ in Σ'.

d) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la legge del moto in Σ' e in Σ.

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella carica è $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x(\mathbf{x}), B_y(\mathbf{x}), B_z(\mathbf{x}))$, con $B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche - 25 vii 2019

1. Dimostrare che se il moto di una carica puntiforme di massa a riposo m_0 soddisfa l'equazione del moto relativistica, allora la sua velocità non può raggiungere il valore della velocità della luce partendo da ferma.

2. a) Dimostrare che il risultato dell'urto tra particelle massive non può essere un singolo fotone.

b) La velocità di un corpo puntiforme di massa a riposo m_0 è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Esso emette poi due fotoni, diventando un corpo di massa a riposo nota m_1 e velocità $(u, 0, 0)$.

b.i) Dimostrare che $m_1 < m_0$.

b.ii) Determinare le frequenze ν_1, ν_2 dei fotoni se sono emessi nella direzione x.

3. Una particella di massa a riposo m_0 e carica e è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico con potenziale scalare $\phi = b(x - u_0 t)^2$ e potenziale vettore $\mathbf{A} = (a[x - u_0 t]^2, 0, 0)$, con $u_0 > \frac{b}{a}$.

a) Individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Determinare le condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}(t_0)$ in Σ per cui le condizioni iniziali in Σ' sono $x'(0) = \left(\frac{m_0 c^2}{e(au_0 - b)\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$, $y'(0) = 0$, $z'(0) = 0$, e $\mathbf{v}'(0) = (0, 0, 0)$.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la velocità della particella quando ha raggiunto la posizione $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ in Σ'.

d) Determinare la legge del moto in Σ' con le condizioni iniziali del punto (b).

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella carica è $\mathbf{E} = (E_0, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (B_x(\mathbf{x}), B_y(\mathbf{x}), B_z(\mathbf{x}))$, con $B_y(x, 0, 0) = B_z(x, 0, 0) = 0$. Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (x_0, 0, 0)$ e $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

Teorie Fisico-Matematiche - 21 xi 2019

1. Determinare la lagrangiana di una particella puntiforme di carica e e massa a riposo m_0 il cui moto soddisfa l'equazione del moto relarivistica.

2. Un corpo puntiforme di massa a riposo nota m_0, inizialmente fermo, subisce all'istante t_0 un processo da cui emergono due particelle A e B con la stessa massa a riposo m_1 , velocità $\mathbf{v}_A = (\frac{\sqrt{3}}{2}v, \frac{1}{2}v, 0)$ e $\mathbf{v}_B = (\frac{\sqrt{3}}{2}v, -\frac{1}{2}v, 0)$ con $v > 0$, e un fotone di frequenza nota ν.

a) Determinare la velocità del fotone.

b) Determinare v e m_1.

3. Una particella di massa a riposo m_0 e carica e è lentamente accelerata dal campo elettromagnetico $\mathbf{E} = (\lambda(x - bt), 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, 0)$.

a) Individuare un sistema di riferimento Σ' in cui l'hamiltoniana è una costante del moto.

b) Determinare condizioni iniziali in Σ' per cui l'hamiltoniana è nulla.

c) Con le condizioni iniziali del punto (b), determinare la velocità della particella quando ha raggiunto la posizione $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ in Σ'.

d) Determinare la legge del moto in Σ' con le condizioni iniziali del punto (b).

4! Il campo elettromagnetico che accelera lentamente una particella carica è $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = (B_0, 0, 0)$.

a) Determinare l'hamiltoniana e dimostrare che $\|\mathbf{v}(t)\|$ è costante.

b) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = (0, 0, -R)$ e $\mathbf{v}(0) = (u, v, 0)$.