Teorie Relativistiche – 8 9 2010

1. Sia $\phi(\underline{x})$ uno scalare invarante.

a) dimostrare che $\underline{\nabla}\phi$ è un quadrivettore.

b) Dimostrare che $\Box\phi$ è uno scalare invariante.

2. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = v_0 t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$. Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

a) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

b) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, -v_0, 0)$.

3. Trattare l'effeto Doppler relativistico.

4. Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica di una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico generato da un filo rettilineo con densità di carica uniforme λ giacente sull'asse z.

a) L'hamiltoniana, è una costante del moto? (motivare la risposta).

b) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $\vec{x} = (x, 0, 0)$, con $x > 0$ determinare la velocità della particella quando si trova nel punto $2\vec{x}$.

5. Si consideri una carica q con massa a riposo m_0, lentamente accelerata da una campo esclusivamente magnetico con potentiale vettore stazionario $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x})$, con $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = 0$. Dimostrare che la velocità della particella è costante in modulo.

Teorie Relativistiche – 5 7 2011

1. Trattare il problema dei principi di conservazione nella Relatività Speciale.

2. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = v_0 t$, $z(t) = 0$.

a1) Si determini il campo elettro-magnetico rispetto al sistema a riposo Σ_P del corpo.

a2) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$.

3 . Un corpo puntiforme di massa a riposo nota M_0 inizialmente fermo assorbe all'istante t_0 un fotone.

a) Determinare la massa a riposo M_1 e il modulo v della velocità del corpo dopo l'assorbimento se è nota la frequenza ν del fotone assorbito.

b) Determinare la massa a riposo M_1 e il modulo v della velocità del corpo dopo l'assorbimento se è nota la frequenza ν' del fotone rispetto al sistema a riposo del corpo dopo l'assorbimento.

4. Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica di una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico uniforme $\mathbf{E} = (E, 0, E)$, $\mathbf{B} = (-B, 0, B)$.

a) L'hamiltoniana, è una costante del moto? (motivare la risposta).

b) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $\vec{x} = (0, 0, z)$, con $z > 0$ determinare la velocità della particella quando si trova nel punto $2\vec{x}$.

5. Una particella puntiforme inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, con carica q e massa a riposo m_0, è lentamente accelerata dall'azione del campo elettrico uniforme $\vec{E} = (\epsilon t, 0, 0)$. Trovare la velocità $\vec{v}(t)$ in funzione del tempo.

Teorie Relativistiche – 6 9 2011

1. Introdurre gli operatori quadrigradiente e quadridivergenza e trattarne le proprietà.

2. Un filo rettilineo giacente sull'asse y del sistema di riferimento Σ, con densità di carica uniforme λ, si muove rispetto a Σ con velocità costante $\mathbf{u} = (0, u, 0)$.

a) Determinare il campo elettromagnetico nel sistema di riferimento Σ_p in cui il filo è a riposo.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ di Σ. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità rispetto a Σ è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_1, u, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, u, v_3)$.

3. Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della carica puntiforme q e massa a riposo m_0 del quesito 2, rispetto a Σ e Σ_p

a) Rispetto a quale sistema di riferimento l'hamiltoniana è una costante del moto? (motivare la risposta).

b) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $\vec{x} = (x, 0, 0)$ con velocità $(0, u, 0)$, determinare la velocità della particella quando si trova nel punto $2\vec{x}$.

c) Rispetto a quale sistema di riferimento, tra Σ e Σ_p, la velocità della particella risulterà costante in modulo, qualunque sia la sua velocità iniziale?

4. Un corpo puntiforme di massa a riposo nota M_0 inizialmente fermo decade all'istante t_0 in due particelle puntiformi con masse a riposo, m_1 e m_2 e rispettive velocità $\mathbf{v}_1 = (v_1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (v_2, u_2, w_2)$.

a) Individuare il valore massimo per la somma $m_1 + m_2$.

b) Date le masse m_1 e m_2, determinare le velocità $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

Teorie Relativistiche – 17 11 2011

1. Si consideri un punto materiale che si muove in un sistema inerziale Σ secondo la legge $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Determinare la relazione tra la velocità relativa a Σ e la velocità relativa a Σ', dove Σ' è un sistema di riferimento che si muove con velocità costante $\mathbf{w} = (0, 0, w)$ rispetto a Σ tale che le origini coincidono all'istante $t = t' = 0$, l'asse z di Σ' è sovrapposto all'asse z di Σ, l'asse x di Σ' giace nel piano zx di Σ.

2. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = v_0 t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$.

a) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

3 . Un corpo puntiforme A di massa a riposo nota M_1 con velocità iniziale nota $\mathbf{u} = (\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u, 0)$ urta all'istante t_0 una particella puntiforme B di massa a riposo $M_2 = M_1$ e velocità $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}u, -\frac{\sqrt{3}}{2}u, 0)$, assorbendola.

a) determinare la velocità $\mathbf{w}$ e la massa a riposo M_3 dell'unico corpo C risulante dall'urto.

All'istante $t_1 > t_0$ il corpo C emette un fotone e quindi si ferma.

b) Determinare la frequenza del fotone.

4. Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica di una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico uniforme $\mathbf{E} = (E, E, E)$, $\mathbf{B} = (B, B, B)$.

a) L'hamiltoniana, è una costante del moto? (motivare la risposta).

b) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinare la velocità della particella quando si trova nel punto $\vec{x} = (x, y, z)$.

Teorie Relativistiche – 30 3 2011

1. Si consideri un punto materiale che si muove in un sistema inerziale Σ. Determinare la relazione tra la velocità relativa a Σ e la velocità relativa a Σ', dove Σ' è un sistema di riferimento che si muove con velocità costante $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$ rispetto a Σ tale che le origini coincidono all'istante $t = t' = 0$, l'asse x di Σ' è sovrapposto all'asse x di Σ, l'asse y di Σ' giace nel piano xy di Σ.

2. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = v_0 t$, $z(t) = 0$.

a1) Si dimostri che il campo elettrico nel sistema a riposo del corpo è
$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{(x_p^2+y_p^2+z_p^2)^3}}(x_p, y_p, z_p)$.

a2) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

3 . Un corpo puntiforme A di massa a riposo nota M_0 inizialmente fermo emette all'istante t_0 una particella puntiforme B di massa a riposo $m_0 < M_0$ e velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$.

a) determinare la velocità $\mathbf{V}$ e la massa a riposo M_1 del corpo A dopo l'emissione.

All'istante $t_1 > t_0$ il corpo A assorbe una partiella puntiforme C di massa a riposo m_1 e velocità $\mathbf{w}$. Come risultato il corpo si arresta.

b) Determinare la velocità $\mathbf{w}$ e la massa a riposo M_2 di A dopo l'assorbimento.

4. Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica di una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico uniforme $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, B, 0)$.

a) L'hamiltoniana, è una costante del moto? (motivare la risposta).

b) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinare la velocità della particella quando si trova nel punto $\vec{x} = (x, y, 0)$.

5. Una particella puntiforme inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, con carica q e massa a riposo m_0, è lentamente accelerata dall'azione del campo elettrico uniforme $\vec{E} = (\epsilon t, 0, 0)$. Trovare la velocità $\vec{v}(t)$ in funzione del tempo.

Teorie relativistiche 10 1 2012

1. Sia $\underline{q}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} q_0(\underline{x}) \\ \vec{q}(\underline{x}) \end{bmatrix}$ una grandezza vettoriale a valori in $\mathbf{R}^4$ che dipende dalla posizione spazio-temporale $\underline{x} = (ct, \vec{x})$ di una particella.

a) Indicare esempi in cui $\underline{q}$ è un quadrivettore.

Dimostrare che se $\underline{q}$ e $\underline{p}$ sono quadrivettori, allora

b) $\underline{q} \bullet_M \underline{p}$ è un invariante.

c) $\dfrac{d\underline{q}}{d\tau}$ è un quadrivettore, dove τ è il tempo proprio.

2. Un corpo puntiforme A di massa a riposo nota M_1 con velocità iniziale nota $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ assorbe all'istante t_0 un fotone e si ferma.

a) determinare l'energia del fotone e la massa a riposo M_2 dell'unico corpo B risultante dall'urto.

All'istante $t_1 > t_0$ il corpo B decade in due corpi C e D; il corpo C ha massa a riposo M_1 e velocità $\mathbf{v}_C = (\frac{1}{2}u, \frac{\sqrt{3}}{2}u, 0)$.

b) Determinare la la massa a riposo m_0 e la velocità $\mathbf{v}_D$ del corpo D.

3. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $z(t) = v_0 t$.

a) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

4. Un particella di carica q e massa a riposo m_0 è lentamente accelerata da un campo elettro-magnetico uniforme $\vec{E} = (0, E, 0)$, $\vec{B} = (0, B, 0)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistiche del sistema.

b) Se all'istante $t = 0$ la particella si trova nel punto $(0, 0, 0)$ con velocità $(0, v_0, 0)$, trovare la posizione della particella quando essa ha raddoppiato la velocità.

Teorie Relativistiche – 29 3 2012

1. Derivare dalle trasformazioni di Lorentz le leggi di trasformazione della velocità di un punto materiale.

2. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = v_0 t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$.
a) Determinare il quadripotenziale rispetto a Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (a, a, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:
b) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$;
c) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$.

3 . Due corpi puntiformi A e B, entrambi di massa a riposo nota M_1, con velocità iniziali $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{2}}{2}u, \frac{\sqrt{2}}{2}u, 0)$ e $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}u, -\frac{\sqrt{2}}{2}u, 0)$ urtano all'istante t_0 emettendo un fotone e formando un unico corpo C che dopo l'urto rimane fermo.
a) Determinare la frequenza del fotone.
b) Determinare la massa a riposo di C.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (-E_0 t, 0, 0)$.
a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.
b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?
c) Se la carica è inizialmente ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinare la velocità massima della particella.

Teorie RELATIVISTICHE 29 6 2012

1. Stabilire la relazione tra accelerazione propria e accelerazione coordinata di un punto in moto rispetto ad un sistema di riferimento il cui asse x è orientato come la velocità del punto nell'istante considerato.

2. Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0 inizialmente fermo emette due fotoni entrambi di frequenza ν in versi opposti opposti lungo la direzione dell'asse x.

a) Determinare la velocità e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'emissione dei fotoni.

b!) Si consideri lo stesso processo rispetto ad un sistema di riferimento Σ' in cui la velocità del corpo prima dell'emissione è $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$. Determinare le frequenze ν_1 e ν_2 dei due fotoni in funzione di ν utilizzando la conservazione del quadrimomento, cioè senza utilizzare le formule dell'effetto Doppler.

3 . Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ giacente all'istante $t = 0$ lungo l'asse z si muove con velocità costante $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$.

a) Determinare il campo elettromagnetico generato dal filo nel punto $\mathbf{x} = (x, y, 0)$.

b) Determinare l'accelerazione subita da una carica puntiforme q di massa a riposo m_0 all'istante $t = 0$, posta nel punto $\mathbf{x}(0) = (0, y, 0)$ con velocità

(i) $\mathbf{v}(0) = (0, v_0, 0)$;

(ii) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (0, 0, -E_0 t)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando essa raggiunge il punto $(0, 0, x_0)$.

Teorie Relativistiche 15 XI 2012

1. Spiegare il concetto di tempo proprio e il suo utilizzo nella costruzione di quadrivettori di una particella.

2. a) Un corpo puntiforme A di massa a riposo M_0, inizialmente fermo nell'origine del sistema di riferimento, assorbe un fotone di frequenza ν proveniente dal semiasse x positivo.
Determinare la velocità $\mathbf{v}$ e la massa a riposo M_1 del corpo B risultante dopo l'assorbimento.
b) Si consideri il seguente processo:
Due corpi puntiformi identici di massa a riposo m_0 collidono; l'unico prodotto della collisione è un fotone.
Stabilire se il processo è possibile.

3. Un corpo puntiforme di carica Q si muove rispetto al sistema di riferimento Σ secondo la legge del moto $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, $z(t) = v_0 t$.
a1) Stabilire qual è il campo elettromagnetico nel sistema a riposo del corpo.
a2) Determinare il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelelerata dal campo generato dal corpo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, 0, z)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:
b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;
c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = -E_0 x$ e $\mathbf{A} = (0, -E_0 t, 0)$.
a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.
b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?
c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità in modulo al tempo t_0.
d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.

Teorie Relativistiche 26 iii 2013

1. Mostrare che una carica puntiforme di massa a riposo m_0 lentamente accelerata da un campo elettromagnetico non può raggiungere la velocità della luce partendo da velocità inferiori.

2.a) Dall'urto di due fotoni di frequenza ν_1 e ν_2 e velocità $(c, 0, 0)$ e $(-c, 0, 0)$ emerge un'unica particella con massa a riposo m_0. Determinare m_0 e la velocità della particella.

b!) Un elettrone (massa a riposo nota m_0) con velocità nulla urta con un fotone di frequenza nota ν e velocità $(-c, 0, 0)$. Dopo l'urto la velocità dell'elettrone è $(-v, 0, 0)$. Determinare il valore di v, la frequenza ν' e la direzione del fotone dopo l'urto.

3. Un filo rettilineo con densità di carica elettrica uniforme λ è inizialmente sull'asse x; ogni suo punto si muove con velocità costante $\mathbf{v} = (0, 0, v_0)$.

a) Stabilire qual è il campo elettromagnetico nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$ di Σ.

Una particella di carica q e massa a riposo m_0, lentamente accelerata dal campo generato dal filo, si trova all'istante $t_0 = 0$ nel punto $\mathbf{x} = (0, y, 0)$. Determinare l'accelerazione della particella all'istante $t_0 = 0$ se la sua velocità è:

b) $\mathbf{v}(0) = (v_0, 0, 0)$;

c) $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

4. Una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 è lentamente accelerata dall'azione del campo elettromagnetico con potenziali $\phi = 0$ e $\mathbf{A} = (0, -E_0 t, B_0 x)$.

a) Scrivere la lagrangiana e l'hamiltoniana relativistica della particella.

b) L'hamiltoniana, è una costante del moto?

c) Se la carica è inizialmante ferma nel punto $(0, 0, 0)$, determinarne la velocità quando occupa la posizione $(0, y_0, 0)$.

d) Trasformare i potenziali in maniera che l'hamiltoniana sia costante, senza alterare i campi.