

Università della Calabria
Laurea Magistrale in Matematica
Laurea Magistrale in Fisica

TEORIA DEI GRUPPI E MECCANICA QUANTISTICA

Giuseppe Nisticò

Tratto dalla tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Sistemi di Imprimitività in Meccanica Quantistica

di Rosita Nicotera (Univeristà della Calabria, 28 IX 2012)

Introduzione

La Meccanica Quantistica si è sviluppata nei primi 30 anni del '900 [1][2], grazie al lavoro di eminenti ricercatori, come una teoria radicalmente diversa dalla Fisica Classica, tanto da travolgerne il formalismo e la struttura concettuale sin dalle basi, che si erano rivelati, quelli classici, incompatibili con l'evidenza sperimentale relativa a fenomeni quali lo spettro del corpo nero, l'emissione radiativa dell'atomo di Idrogeno, l'esperienza di Stern and Gerlach.

John von Neumann [3] ha stabilito in forma coerente e matematicamente consistente le basi di ogni teoria quantistica. La teoria generale di von Neumann indica in uno spazio di Hilbert complesso e separabile \mathcal{H} la struttura matematica su cui costruire la teoria di un dato sistema fisico. La famiglia $\Theta(\mathcal{H})$ degli operatori autoaggiunti dello spazio \mathcal{H} rappresenta nella struttura matematica la famiglia delle *osservabili*, le grandezze fisiche misurabili dal sistema.

Il problema da risolvere per poter formulare la teoria quantistica specifica di un sistema fisico specifico consiste

- nell'individuare uno spazio di Hilbert in grado di sostenere la teoria di quel sistema,
- identificare ogni specifica osservabile del sistema con un determinato operatore di $\Theta(\mathcal{H})$.

Le trattazioni correnti delle varie teorie quantistiche (e.g. [4][5]) procedono in questa identificazione con argomentazioni euristiche, con un certo grado di ineliminabile arbitrarietà. L'approccio che qui seguiremo evita questi difetti metodologici; esso è basato essenzialmente sul Teorema di Wigner[6]. Tale teorema stabilisce che se il sistema ha un determinato gruppo di Trasformazioni di Simmetria, ad esso deve corrispondere nello spazio di Hilbert \mathcal{H} una *rappresentazione proiettiva* del gruppo stesso.

Un altro strumento importante utilizzato è il *Teorema di imprimitività* di Mackey [9][10]. Esemplicando, *un sistema di imprimitività* relativo a una rappresentazione

proiettiva di un *gruppo di trasformazioni* è una terna di operatori autoaggiunti che soddisfano una determinata relazione di covarianza con la rappresentazione stessa. Dato un sistema di imprimitività rispetto a un dato gruppo, il teorema di imprimitività indica come costruire concretamente lo spazio di Hilbert, il sistema di imprimitività, e la rappresentazione proiettiva, come rappresentazione indotta [9].

Se il sistema è una particella libera non relativistica, si può facilmente verificare che i tre operatori corrispondenti all'osservabile posizione costituiscono un sistema di imprimitività rispetto alla rappresentazione proiettiva del gruppo di Euclide (non del gruppo di Galilei) la cui esistenza è garantita dal teorema di Wigner.

In questa trattazione applicheremo il teorema di imprimitività seguendo un approccio che conduce a individuare concretamente le rappresentazioni proiettive dell'intero gruppo di Galilei, indipendentemente dal sistema, particella o altro, che possiede tali simmetrie.

Nella prima sezione, una volta richiamati i concetti fisici di base della teoria quantistica secondo von Neumann, si determinano le relazioni tra trasformazioni di Wigner e di simmetria quantistica. Grazie alla conoscenza di tali relazioni si potrà applicare il teorema di Wigner, che riguarda le trasformazioni di Wigner, alle trasformazioni di simmetria quantistiche per stabilire l'esistenza di rappresentazioni proiettive per un gruppo di simmetria quantistico.

Il teorema di Stone, di cui si fornirà una dimostrazione euristica, permetterà di mostrare come le rappresentazioni proiettive di un gruppo ad un parametro reale additivo siano delle rappresentazioni.

Nella seconda sezione, tramite la teoria dei gruppi di Lie locali, si stabilirà l'esistenza di 9 generatori hermitiani in corrispondenza di una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei. Si proseguirà trovando le relazioni di commutazione tra tali generatori e le conseguenze importanti derivanti da tali relazioni.

Nella terza sezione si farà vedere come le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Galilei sono ottenibili mediante una particolare applicazione del teorema di imprimitività di Mackey. Il punto chiave consiste nell'individuare un sistema di imprimitività del gruppo di Euclide, non di Galilei, nella rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei. Seguendo tale approccio, si determina la teoria quantistica specifica di una particella localizzabile. In particolare si otterrà l'identificazione tra le osservabili posizione e velocità con gli operatori autoaggiunti nella teoria quantistica di una particella senza spin.

1. TRASFORMAZIONI DI SIMMETRIA QUANTISTICHE

1.1. Concetti di base e assiomi.

I concetti fisici di base dell'approccio di Von Neumann sono quello di *osservabile* e di *valore d'aspettazione*.

Osservabile:

Un'osservabile di un sistema fisico è una qualsiasi grandezza misurabile il cui valore misurato è esprimibile mediante un numero reale.

Indichiamo con \mathcal{O} l'insieme delle osservabili di un dato sistema fisico.

L'insieme delle osservabili dipende dal sistema fisico che si considera. Esempi di osservabili "classiche" sono l'intensità del campo elettrico, la velocità, la posizione etc.

Valore d'aspettazione:

Un valore d'aspettazione, o \mathcal{R} – function, è una funzione

$$v : \mathcal{O}_v \rightarrow \mathbf{R},$$

dove \mathcal{O}_v è un sottoinsieme di osservabili, che ad ogni osservabile $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_v$ fa corrispondere un numero reale $v(\mathcal{A})$, interpretato come valore d'aspettazione dell'osservabile \mathcal{A} .

Indichiamo con Σ la famiglia dei valori di aspettazione.

Il concetto di valore d'aspettazione appena espresso comporta l'esistenza, in corrispondenza di ogni $v \in \Sigma$, di un insieme \mathcal{S} di sistemi fisici dotato della seguente proprietà: data una qualunque osservabile $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_v$, gli ensembles estratti da \mathcal{S} per misurare \mathcal{A} hanno valori medi delle misurazioni di \mathcal{A} coerenti col valore d'aspettazione $v(\mathcal{A})$.

Osservazione 1.1

Dato un insieme numerabile $\{v_1, v_2, \dots\}$ di valori d'aspettazione, per ogni famiglia $\{\mu_k \mid \sum_k \mu_k = 1\}$, esiste $v = \sum_k \mu_k v_k$ definita su $\mathcal{O}_v = \cap \mathcal{O}_{v_k}$; l'insieme dei valori d'aspettazione ha una struttura convessa (si veda [12] per una giustificazione fisica).

Data un'osservabile \mathcal{A} e una funzione numerica f , si può definire una nuova osservabile \mathcal{B} , indicata con $f(\mathcal{A})$, individuata dalla seguente procedura di misurazione: il valore b di $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$ si ottiene misurando \mathcal{A} e applicando al risultato a la funzione f : $b = f(a)$.

Stabilita la base concettuale enunciamo i 5 assiomi della teoria quantistica nello schema di Von Neumann.

ASSIOMA 1:

Dato un sistema fisico a cui si applicano i concetti fisici di osservabile e di valore d'aspettazione, esiste uno spazio di Hilbert complesso e separabile \mathcal{H} tale che ad ogni osservabile $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$ corrisponde un unico operatore autoaggiunto A di \mathcal{H} . La corrispondenza è biunivoca.

ASSIOMA 2:

Data un'osservabile \mathcal{A} e una funzione numerica f , se ad \mathcal{A} viene assegnato l'operatore autoaggiunto A allora ad $f(\mathcal{A})$ corrisponde l'operatore $f(A) = \int f(\lambda) dE_\lambda$ dove E_λ è la risoluzione dell'identità di A .

ASSIOMA 3:

Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due osservabili alle quali corrispondono due operatori autoaggiunti A e B . Allora esiste una terza osservabile $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ a cui corrisponde l'operatore autoaggiunto $C = A + B$.

ASSIOMA 4:

Se \mathcal{A} è non negativa, ovvero i possibili risultati di una misurazione di \mathcal{A} sono non negativi, allora $v(\mathcal{A}) \geq 0$ per ogni valore di aspettazione v tale che $\mathcal{A} \in \mathcal{O}_v$.

ASSIOMA 5:

Per ogni valore di aspettazione v , se a e b sono costanti reali e \mathcal{A} e \mathcal{B} due osservabili, allora $v(a\mathcal{A} + b\mathcal{B}) = av(\mathcal{A}) + bv(\mathcal{B})$.

Mentre si assume (Assioma 1) che per le osservabili la struttura matematica per rappresentarle è quella degli operatori autoaggiunti, la corrispondenza nella teoria matematica del concetto fisico di valore d'aspettazione si deduce dagli assiomi.

Definizione 1.1

Un operatore $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tale che $\rho \geq 0$ e $Tr(\rho) = 1$ è detto operatore densità.

Gli operatori densità nello spazio di Hilbert vengono anche chiamati *stati quantistici*. Indichiamo con $L_+^1 = \{\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \mid \rho \geq 0, Tr(\rho) = 1\}$ la famiglia degli operatori densità. Vale il seguente teorema, dimostrato da Von Neumann [3] :

TEOREMA 1.1

Per ogni valore d'aspettazione v esiste un unico operatore densità ρ tale che

$$v(\mathcal{A}) = Tr(\rho\mathcal{A}), \quad \forall \mathcal{A} \in \mathcal{O}_v$$

dove \mathcal{A} è l'operatore autoaggiunto associato all'osservabile \mathcal{A} .

Osservazione 1.2

L_+^1 ha una struttura convessa: $\forall A, B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \in L_+^1$ allora $\lambda A + (1 - \lambda)B \in L_+^1$, con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Esempi notevoli di operatori densità sono gli operatori di proiezione di rango 1

Definizione 1.2

Un operatore di proiezione di rango 1 è un proiettore ortogonale

$$P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

che proietta su un sottospazio di Hilbert di dimensione 1.

Per ogni $\varphi \in \mathcal{H}$, con $\|\varphi\| = 1$, indichiamo con $Sp(\varphi) = \{\lambda\varphi \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ il sottospazio generato da φ . Allora definiamo il proiettore di rango 1, P_φ con

$$P_\varphi\psi = \langle \varphi \mid \psi \rangle \varphi.$$

Il rango è la dimensione del sottospazio su cui P proietta.

Spesso si usa la notazione di Dirac per indicare i proiettori di rango 1. P_φ in questo caso assume la seguente espressione

$$P_\varphi |\psi\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi| |\psi\rangle.$$

Indichiamo con $\Pi_1(\mathcal{H}) = \{P_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|, \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1\}$ la famiglia dei proiettori di rango 1.

Proprietà 1.1

Due vettori di stato in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} che differiscono per un fattore di fase individuano lo stesso proiettore di rango 1. Infatti, siano φ e $\phi = e^{i\alpha}\varphi$ nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , allora

$$\begin{aligned} P_\phi |\psi\rangle &= |e^{i\alpha}\varphi\rangle\langle e^{i\alpha}\varphi| |\psi\rangle = e^{i\alpha}e^{-i\alpha} |\varphi\rangle\langle\varphi| |\psi\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi| |\psi\rangle = P_\varphi |\psi\rangle \\ P_\phi &= P_\varphi. \end{aligned}$$

Ogni stato quantistico si può esprimere come combinazione convessa di proiettori di rango 1 [11]. Gli stati quantistici che non possono essere ulteriormente decomposti prendono il nome di operatori densità *puri*.

Definizione 1.3

Un operatore densità ρ è detto *puro* se

$$\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2 \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Risultato di rilievo è il seguente :

TEOREMA 1.2

ρ è puro sse $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Nella teoria di Von Neumann non sempre è garantita la possibilità di misurare più di una osservabile nello stesso esemplare del sistema fisico. Precisamente vale la seguente condizione:

Condizione di commisurabilità

Due osservabili \mathcal{A} e \mathcal{B} sono entrambe misurabili sullo stesso esemplare del sistema fisico se e soltanto se

$$[A, B] = 0.$$

1.2. Trasformazioni di simmetria Quantistiche.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente come le strutture matematiche degli operatori autoaggiunti e degli operatori densità permettono di rappresentare, nello schema di Von Neumann, i concetti fisici di osservabile e valore d'aspettazione. Il teorema di Wigner è lo strumento che permetterà di rappresentare le simmetrie del sistema.

Cominciamo introducendo la definizione di trasformazione di Wigner come puro concetto matematico.

Definizione 1.4

Dati due spazi di Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{H}' , entrambi complessi e separabili, si definisce trasformazione di Wigner, un'applicazione

$$S : \Pi_1(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{H}')$$

$$P \rightarrow P' = S(P)$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. *S è biunivoca.*
2. *$Tr(P_1 P_2) = Tr(P'_1 P'_2) = Tr[S(P_1)S(P_2)]$.*

Osservazione 1.3

Dato una trasformazione unitaria tra gli spazi di Hilbert \mathcal{H} e \mathcal{H}' , si può indurre da essa una trasformazione di Wigner. Sia infatti

$$U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = U\varphi$$

una trasformazione unitaria che quindi soddisfa la seguente proprietà:

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle U\varphi_1 | U\varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}'} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}.$$

Da questa proprietà discende che $\|\varphi\| = \|\varphi'\|$.

Si definisce quindi

$$S^U : \Pi_1(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{H}')$$

$$P = |\varphi\rangle\langle\varphi| \mapsto S^U(P) = |\varphi'\rangle\langle\varphi'|.$$

Verifichiamo che S^U è una trasformazione di Wigner:

1. S^U è biunivoca tra le due famiglie di proiettori di rango 1, condizione che discende dal fatto che U è unitaria.
2. Se $P_1 = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$, $P_2 = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$ allora

$$\text{Tr}[S^U(P_1)S^U(P_2)] = \text{Tr}(P_1P_2) = |\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|^2 = |\langle U\varphi_1|U\varphi_2\rangle|^2 = |\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle|^2 = \text{Tr}(P_1P_2).$$

Quindi S^U è una trasformazione di Wigner.

Proprietà 1.2

L'operatore unitario che genera la trasformazione di Wigner non è unico, U e $e^{i\alpha}U$ generano la stessa trasformazione di Wigner:

$$S^U = S^{e^{i\alpha}U}.$$

Infatti se $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ abbiamo

$$S^U(P) = |\varphi'\rangle\langle\varphi'| = |U\varphi\rangle\langle U\varphi|$$

e

$$S^{e^{i\alpha}U}(P) = |\varphi''\rangle\langle\varphi''| = |e^{i\alpha}U\varphi\rangle\langle e^{i\alpha}U\varphi|;$$

allora

$$S^{e^{i\alpha}U}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = |\varphi''\rangle\langle\varphi''| = |e^{i\alpha}\varphi'\rangle\langle e^{i\alpha}\varphi'| = e^{i\alpha}e^{-i\alpha}|\varphi'\rangle\langle\varphi'| = S^U(|\varphi\rangle\langle\varphi|).$$

Diamo ora l'enunciato dell'importante teorema di Wigner.

TEOREMA di Wigner (sulla rappresentazione delle simmetrie) [6]

Se $S : \Pi_1(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{H}')$ è una trasformazione di Wigner allora esiste $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ unitario oppure antiunitario tale che

1. $S(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = |U\varphi\rangle\langle U\varphi| = |\varphi'\rangle\langle\varphi'|$
2. se esiste V unitario o antiunitario tale che $S = S^V$ allora esiste $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che $V = e^{i\alpha}U$ (l'operatore U del punto 1 è unico a meno di un fattore di fase).

Le trasformazioni di Wigner, che abbiamo introdotto come puro concetto matematico, sono strettamente legate alle trasformazioni di simmetria di un sistema quantistico. Ad esempio, per un sistema fisico isolato \mathcal{S} , ogni traslazione spaziale è una trasformazione di simmetria secondo un fissato vettore $\vec{\tau}$. Tale traslazione genera una trasformazione biunivoca degli stati e delle osservabili.

La traslazione, interpretata in senso attivo, consiste nello spostamento di ogni entità fisica, che viene traslata di un vettore $\vec{\tau}$. Ciò comporta una trasformazione sugli stati, perchè se lo stato del sistema non trasformato è descritto da ρ , lo stato trasformato sarà in generale descritto da un diverso operatore $\rho' = S_1(\rho)$.

La traslazione può agire però anche sulle osservabili. Infatti se l'osservabile \mathcal{A} , rappresentata dall'operatore A , è misurabile con un dato apparato, l'apparato traslato misurerà una diversa osservabile \mathcal{A}' , rappresentata da un diverso operatore A' . Pertanto, alla traslazione corrispondono nella teoria due trasformazioni: la trasformazione $\rho \rightarrow \rho'$ su tutti gli stati e la trasformazione $A \rightarrow A' = S_2(A)$ sugli operatori autoaggiunti che rappresentano le osservabili. Queste trasformazioni sono evidentemente biunivoche (la traslazione individuata da $-\vec{\tau}$ permette di riottenere lo stato e l'osservabile originarie).

La traslazione congiunta di stato e osservabile produce una situazione fisica indistinguibile da quella precedente la trasformazione: è evidente che deve valere la seguente uguaglianza

$$v(\mathcal{A}) = v'(\mathcal{A}').$$

Questa relazione caratterizza come "simmetria" una trasformazione quantistica (cioè una trasformazione biunivoca di stati e osservabili).

Altro esempio di trasformazione di simmetria nella situazione considerata prima è la rotazione di un qualsiasi angolo attorno ad ogni fissato asse.

Mostriamo ora alcune proprietà formali che devono essere soddisfatte in generale da una trasformazione in quanto trasformazione di simmetria quantistica.

Proprietà 1.3

La proprietà di invarianza fisica caratteristica di una trasformazione di simmetria quantistica,

$$v(\mathcal{A}) = v'(\mathcal{A}'),$$

da un punto di vista matematico si esprime come

$$\langle \varphi | A | \varphi \rangle = \langle \varphi' | A' | \varphi' \rangle .$$

Se $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ allora vale in generale che ¹ $\langle \varphi | B | \varphi \rangle = Tr(PB)$. Quindi

$$v(\mathcal{A}) = v'(\mathcal{A}') \Rightarrow Tr(PA) = Tr[S_1(P)S_2(A)] .$$

¹La traccia è invariante rispetto alla base o.n. scelta nello spazio di Hilbert: $Tr(PB) = \sum_k \langle u_k | PB | u_k \rangle = \sum_k \langle u_k | \varphi \rangle \langle \varphi | B | u_k \rangle = \langle \varphi | B | \varphi \rangle$

Proprietà 1.4

Mostriamo che se $\rho = \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2$ allora $S_1(\rho) = \lambda_1S_1(\rho_1) + \lambda_2S_1(\rho_2)$.
Sappiamo che vale la condizione $Tr(\rho A) = Tr(S_1(\rho)S_2(A))$.
Calcoliamo la $Tr(\rho A) = Tr((\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2)A) = \lambda_1Tr(\rho_1 A) + \lambda_2Tr(\rho_2 A) =$
 $= \lambda_1Tr[S_1(\rho_1)S_2(A)] + \lambda_2Tr[S_1(\rho_2)S_2(A)]$, quindi

$$Tr[S_1(\rho)S_2(A)] = Tr[\{\lambda_1S_1(\rho_1) + \lambda_2S_1(\rho_2)\}S_2(A)]$$

allora $\forall A$

$$S_1(\rho) = \lambda_1S_1(\rho_1) + \lambda_2S_1(\rho_2).$$

Osservazione 1.5

A causa della proprietà 1.4, la trasformazione S_1 è completamente determinata dalla sua restrizione agli stati puri.

Una trasformazione di simmetria quantistica preserva anche le relazioni funzionali tra osservabili. Se prendiamo un'osservabile \mathcal{A} e una funzione numerica f , allora sappiamo che $f(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{B}$ è l'osservabile che si ottiene applicando f al risultato a di \mathcal{A} . Siccome f è una pura funzione matematica, il risultato $\{f(\mathcal{A})\}'$ della trasformazione di $f(\mathcal{A})$ attraverso una trasformazione di simmetria deve essere identico a quanto si ottiene trasformando \mathcal{A} in \mathcal{A}' e applicando f al risultato di \mathcal{A}' .

Proprietà 1.5

La proprietà si esprime nel formalismo mediante l'equazione

$$\{f(\mathcal{A})\}' = f(\mathcal{A}'),$$

dove \mathcal{A}' è l'operatore che corrisponde all'osservabile \mathcal{A}' dopo la trasformazione di simmetria quantistica e, analogamente, $\{f(\mathcal{A})\}'$ è l'operatore che corrisponde all'osservabile $\{f(\mathcal{A})\}'$.

Osservazione 1.6

La proprietà 1.5 è importante perchè se l'osservabile è rappresentata da un proiettore ortogonale, allora anche all'osservabile, dopo la trasformazione di simmetria quantistica, corrisponde un proiettore ortogonale.

Infatti consideriamo la funzione numerica $f(\lambda) = \lambda^2$, poichè i proiettori ortogonali sono operatori autoaggiunti e idempotenti ($E^2 = E = E^*$), allora vale, per la proprietà 1.5,

$$E'^2 = f(E') = \{f(E)\}' = \{E^2\}' = E'.$$

Per cui la famiglia dei proiettori ortogonali è invariante sotto trasformazione di simmetria.

Adesso abbiamo gli elementi per dare la

Definizione 1.5

Dato un sistema quantistico descritto nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , una trasformazione di simmetria quantistica è una coppia di trasformazioni biunivoche (S_1, S_2)

$$S_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$S_2 : Aut(\mathcal{H}) \rightarrow Aut(\mathcal{H})$$

tali che

$$(i) \quad Tr(\rho A) = Tr(S_1(\rho)S_2(A))$$

$$(ii) \quad S_2(f(A)) = f(S_2(A)).$$

Per effetto delle proprietà 1.3 – 1.5, vale la seguente:

Proposizione 1.1

Se (S_1, S_2) è una trasformazione di simmetria quantistica, le rispettive restrizioni di S_1 e S_2 agli stati puri e ai proiettori ortogonali soddisfano le seguenti proprietà:

(i) $S_1(\Pi_1(\mathcal{H})) \subseteq \Pi_1(\mathcal{H})$, $S_2(\Pi(\mathcal{H})) \subseteq \Pi(\mathcal{H})$;

(ii) Le restrizioni S_1 e S_2 sono biunivoche;

(iii) $Tr(PE) = Tr[S_1(P)S_2(E)]$. Vale la seguente forma del viceversa della proposizione 1.1.

Proposizione 1.2

Se una coppia di trasformazioni (S_1, S_2) soddisfa le condizioni (i)–(iii) della proposizione 1.1, allora essa si può estendere a una trasformazione di simmetria quantistica; basta definire, per ogni $\rho = \sum_k \lambda_k P_k$ e per ogni $A = \int \lambda dE_\lambda$,

$$S_1(\rho) = \sum_k \lambda_k S_1(P_k) \text{ e}$$

$$S_2(A) = \int \lambda dS_2(E_\lambda)$$

e verificare che le proprietà della definizione 1.5 sono soddisfatte.

1.3. Simmetrie e trasformazioni di Wigner.

Studiamo ora come le trasformazioni di Wigner e le trasformazioni di simmetria quantistiche, pur essendo concetti definiti in modo differente, in realtà coincidono.

TEOREMA 1.3

Se $S : \Pi_1(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{H})$ è una trasformazione di Wigner, allora la coppia (S_1, S_2) , dove $S_1 = S$ e $S_2(E) = \sum_{j \in \mathbf{N}} S_1(Q_j)$, dove $Q_j \in \Pi_1(\mathcal{H})$ e $\sum_{j \in \mathbf{N}} Q_j = E$ è una trasformazione di simmetria quantistica.

Dimostrazione

Sia $S : \Pi_1(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{H})$ una trasformazione di Wigner. $S_2(E)$ è ancora un proiettore: infatti $S(Q_j) \perp S(Q_k)$ se $j \neq k$, perchè $Tr[S(Q_j)S(Q_k)] = Tr(Q_j Q_k) = 0$. Per verificare che la coppia (S_1, S_2) è una trasformazione di simmetria quantistica, dimostriamo la proprietà di invarianza della traccia $Tr(PE) = Tr(S_1(P)S_2(E))$.

Per definire S_1 basta considerare $S_1 : \Pi_1(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{H})$ tale che $S_1(P) = S(P)$.

Sia E un proiettore e sia $M = E(\mathcal{H})$ il sottospazio su cui esso proietta; indicando con $\{v_j\}$ una base o.n di M e definendo $Q_j = |v_j\rangle\langle v_j|$, abbiamo $E = \sum_{j \in \mathbf{N}} Q_j$. Possiamo definire quindi

$$S_2(E) = \sum_{j \in \mathbf{N}} S_1(Q_j).$$

Calcolando

$$Tr[S_1(P)S_2(E)] = Tr \left[S_1(P) \sum_{j \in \mathbf{N}} S_1(Q_j) \right]$$

applicando la proprietà di linearità della traccia e tenendo conto dell'ipotesi, S_1 è una trasformazione di Wigner

$$= \sum_{j \in \mathbf{N}} Tr[S_1(P)S_1(Q_j)] = \sum_{j \in \mathbf{N}} Tr(PQ_j) = Tr \left(P \sum_{j \in \mathbf{N}} Q_j \right) = Tr(PE).$$

□

Nel teorema 1.3 abbiamo mostrato come una trasformazione di Wigner qualsiasi si può estendere per formare una trasformazione di simmetria quantistica.

Vediamo ora che una trasformazione di simmetria quantistica (S_1, S_2) è ricostruibile da S_1 , che risulta essere una trasformazione di Wigner.

Prima di dimostrare tale risultato, consideriamo il seguente :

Lemma 1.1

In una trasformazione di simmetria quantistica

$$P \leq E \Leftrightarrow S_1(P) \leq S_2(E)$$

per ogni $P \in \Pi_1(\mathcal{H})$ e per ogni $E \in \Pi(\mathcal{H})$.

Dimostrazione

Partendo dalla relazione $P \leq E$, allora il sottospazio, dello spazio di Hilbert \mathcal{H} , su cui proietta P è contenuto nel sottospazio su cui proietta E . Se $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, allora $\varphi \in E(\mathcal{H})$.

Sappiamo che $Tr(PE) = \langle\varphi|E|\varphi\rangle = 1$, quindi

$$P \leq E \Leftrightarrow Tr(PE) = 1.$$

D'altra parte se $Tr(PE) = 1$, $\langle\varphi|E|\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$, cioè

$$0 = \langle\varphi|(I-E)|\varphi\rangle = \langle(I-E)\varphi|(I-E)\varphi\rangle = \|\varphi - E\varphi\|^2,$$

ovvero, $E\varphi = \varphi \Rightarrow \varphi \in E(\mathcal{H})$.

Ora siccome (S_1, S_2) è una trasformazione di simmetria quantistica, si ha

$$Tr(PE) = Tr(S_1(P)S_2(E)) = 1 \Rightarrow S_1(P) \leq S_2(E).$$

Allora

$$P \leq E \Leftrightarrow S_1(P) \leq S_2(E).$$

□

TEOREMA 1.4

Una qualsiasi trasformazione di simmetria quantistica (S_1, S_2) è ricostruibile dall'applicazione S_1 , che è una trasformazione di Wigner, secondo la procedura del teorema 1.3.

Dimostrazione

Basta dimostrare che, per ogni trasformazione di simmetria quantistica,

$$S_2(E) = \sum_k S_1(P_k)$$

dove $P_k \in \Pi_1(\mathcal{H})$.

Supponiamo di avere due proiettori di rango 1, che indichiamo con P_1 e P_2 , e che valga la relazione² $P_1 \perp P_2$, che implica $Tr(P_1 P_2) = 0$. Poichè P_2 è un proiettore di rango 1 e quindi anche un proiettore, si ha

$$0 = Tr(P_1 P_2) = Tr(S_1(P_1) S_2(P_2)), \text{ cioè } S_1(P_1) \perp S_2(P_2). \quad (1)$$

Ora $P_2 \leq P_2$, quindi dal lemma 1.1

$$S_1(P_2) \leq S_2(P_2). \quad (2)$$

Dalla (1.1) se indichiamo con $M = S_2(P_2)\mathcal{H}$ e con $G = S_1(P_1)\mathcal{H}$, allora $\varphi'_1 \perp \varphi'_2$, $\forall \varphi'_1 \in G, \varphi'_2 \in M$. Dalla (1.2) otteniamo che

$$S_1(P_1) \perp S_1(P_2). \quad (3)$$

Consideriamo ora un qualunque proiettore $E \in \Pi(\mathcal{H})$, esso è somma di proiettori di rango 1, $E = \sum_k P_k$, con $P_j \perp P_k$ se $j \neq k$. Allora

$$P_k \leq E \Rightarrow S_1(P_k) \leq S_2(E), \forall k$$

e $P_k \perp P_j \Rightarrow S_1(P_k) \perp S_1(P_j)$ (dalla (1.3)).

Allora $\sum_k S_1(P_k) \leq S_2(E)$.

Supponiamo per assurdo che $\sum_k S_1(P_k) < S_2(E)$; quindi esiste $P'_0 \in \Pi_1(\mathcal{H})$, tale che

$$P'_0 \leq S_2(E), \quad (4)$$

$$P'_0 \perp S_1(P_k), \forall k. \quad (5)$$

Poichè S_1 è invertibile, esiste $P_0 \in \Pi_1(\mathcal{H})$ tale che $S_1(P_0) = P'_0$, allora dalla (1.4) e dal lemma 1.1 segue che

$$P_0 \leq E. \quad (6)$$

Inoltre dalla (1.5) e dalla (1.3) deriva che

$$P_0 \perp P_k, \forall k \Rightarrow P_0 \perp \sum_k P_k. \quad (7)$$

Ma $E = \sum_k P_k$ quindi dalla (1.6) e (1.7) otteniamo un assurdo perchè le due relazioni valgono solo $E = 0$. Da cui

$$\sum_k S_1(P_k) = S_2(E).$$

□

Possiamo dunque concludere, dai teoremi 1.3 e 1.4 che ogni trasformazione di Wigner si estende a, ed è la restrizione di, una trasformazione di simmetria quantistica.

² $P_1 \perp P_2$ sse $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = 0$

1.4. Rappresentazioni proiettive di un gruppo di simmetria quantistica .

Il teorema 1.4 consente di applicare il teorema di Wigner ad una qualsiasi trasformazione di simmetria quantistica, come esplicitato dalla proprietà 1.6.

Inoltre faremo vedere che una delle implicazioni più importanti del teorema di Wigner è che, ad ogni gruppo di trasformazioni di simmetria quantistica G , corrisponde una *rappresentazione proiettiva* (v. def 1.6) .

Proprietà 1.6

Con il teorema 1.4, abbiamo dimostrato che se abbiamo una trasformazione di simmetria quantistica, questa è determinata da una trasformazione di Wigner. Questo permette di poter applicare il teorema di Wigner:

Se (S_1, S_2) è una trasformazione di simmetria quantistica, allora esiste un operatore unitario o antiunitario U tale che, se $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, allora $S_1(P) = |U\varphi\rangle\langle U\varphi|$ e se

$E = \sum_k P_k$, con $P_k = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ allora

$$S_2(E) = \sum_k S_1(P_k) = \sum_k |U\varphi_k\rangle\langle U\varphi_k|.$$

Se vale che $Tr(PE) = Tr(P'E')$ allora

$$\langle\varphi|E|\varphi\rangle = \langle\varphi'|E'|\varphi'\rangle = \langle U\varphi|E'|U\varphi\rangle = \langle\varphi|U^{-1}E'U|\varphi\rangle$$

$\forall\varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1.$

Siccome lo spazio di Hilbert \mathcal{H} è complesso allora da

$$\langle\varphi|E|\varphi\rangle = \langle\varphi|U^{-1}E'U|\varphi\rangle \Rightarrow E = U^{-1}E'U \Rightarrow E' = UEU^{-1}.$$

Quindi il teorema di Wigner assicura l'esistenza di un operatore unitario o antiunitario $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tale che $S_1(P) = UPU^{-1}$ e $S_2(E) = UEU^{-1}$.

Supponiamo che un gruppo G , munito di un'operazione binaria $''\cdot''$ ed elemento neutro e , sia un gruppo di trasformazioni di simmetria quantistica per un sistema fisico \mathcal{S} descritto nello spazio di Hilbert (complesso e separabile) \mathcal{H} .

Sorge a questo punto la questione se possa accadere che l'applicazione $G \ni g \rightarrow U_g$ sia una rappresentazione lineare di G , ovvero se

$U_{g_1g_2} = U_{g_1}U_{g_2}$, $U_e = I$ e $U_{g^{-1}} = U_g^{-1} \forall g_1, g_2 \in G$, dove $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è l'operatore identità.

La risposta è negativa in quanto la condizione $U_{g_1g_2} = U_{g_1}U_{g_2}$ non è in generale verificata. Infatti se consideriamo l'elemento $g_1g_2 \in G$, ad esso corrisponde la trasformazione di Wigner $S^{g_1g_2}$, per cui, ad esempio

$$S_2^{g_1g_2}(E) = U_{g_1g_2}EU_{g_1g_2}^{-1}.$$

Ma la trasformazione può essere decomposta in due passi: prima trasformando secondo g_2 e poi trasformando il risultato secondo g_1 , essendo l'insieme di trasformazioni un gruppo. Pertanto deve essere

$$S_2^{g_1 g_2}(E) = S_2^{g_1}[S_2^{g_2}(E)];$$

in termini di operatori

$$U_{g_1 g_2} E U_{g_1 g_2}^{-1} = U_{g_1} U_{g_2} E U_{g_2}^{-1} U_{g_1}^{-1}.$$

Ma il teorema di Wigner stabilisce che l'operatore $U_{g_1 g_2}$ che realizza la trasformazione $S_2^{g_1 g_2}$ è unico a meno di un fattore di fase. Quindi

$$U_{g_1} U_{g_2} = \omega(g_1, g_2) U_{g_1 g_2},$$

dove $\omega(g_1, g_2)$ è un numero complesso di modulo 1.

Diamo dunque la seguente:

Definizione 1.6

Se G è un gruppo e \mathcal{H} uno spazio di Hilbert (complesso e separabile), una rappresentazione proiettiva di G su \mathcal{H} è un'applicazione

$$G \ni g \rightarrow U_g$$

$$e \rightarrow U_e = I$$

in cui U_g sono operatori unitari o antiunitari e

$$U_{g_1} U_{g_2} = \omega(g_1, g_2) U_{g_1 g_2}, \forall g_1, g_2 \in G$$

con $|\omega(g_1, g_2)| = 1, \omega(g_1, g_2) \in \mathbf{C}$.

Proprietà 1.7

Nel caso in cui $\omega(g_1, g_2) = 1$ per ogni g_1, g_2 avremo che la rappresentazione proiettiva è una rappresentazione del gruppo.

Fissato l'operatore corrispondente ad e , $U_e = I$, seguono immediatamente le seguenti proprietà:

$$\omega(g, e) = \omega(e, g) = 1.$$

Infatti

$$U_e U_g = U_g = \omega(e, g) U_{eg} = \omega(e, g) U_g \Rightarrow \omega(e, g) = 1.$$

Proprietà 1.8

Il fattore di fase nella rappresentazione proiettiva si può esprimere in termini di una funzione reale f , ovvero vale che

$$\omega(g_1, g_2) = e^{if(g_1, g_2)}.$$

Naturalmente $f(g, e) = f(e, g) + 2k\pi, \forall g$

Diamo ora la definizione di rappresentazione proiettiva unitaria di G su \mathcal{H}

Definizione 1.7

Se G è un gruppo e \mathcal{H} uno spazio di Hilbert (complesso e separabile), una rappresentazione proiettiva unitaria di G su \mathcal{H} è un'applicazione

$$G \ni g \rightarrow U_g$$

$$e \rightarrow U_e = I$$

in cui U_g sono operatori unitari e

$$U_{g_1} U_{g_2} = \omega(g_1, g_2) U_{g_1 g_2}, \forall g_1, g_2 \in G$$

con $|\omega(g_1, g_2)| = 1, \omega(g_1, g_2) \in \mathbf{C}$.

Facciamo vedere che alcune proprietà del gruppo di trasformazioni di simmetria quantistica possono imporre che gli operatori siano tutti unitari.

Proposizione 1.3

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert complesso e sia G un gruppo, se ogni trasformazione $g \in G$ è il prodotto di un numero finito di trasformazioni $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ che ammettono una radice quadrata, ovvero esiste $p_k \in G$ tale che $g_k = p_k \cdot p_k$ per ogni $k = 1..n$, allora gli operatori che si associano alle trasformazioni di simmetria quantistica sono tutti unitari.

Dimostrazione

Sappiamo che $U_{p_k} U_{p_k}$ è lineare anche quando U_{p_k} è antilineare e poichè vale la relazione

$$U_{g_k} = \omega(p_k, p_k) U_{p_k} U_{p_k}$$

allora U_{g_k} è lineare e anche $U_g = U_{g_1 \dots g_n}$ sarà lineare.

□

Esempio 1.1

Se consideriamo un gruppo G ad un parametro reale additivo allora gli operatori $U_g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ corrispondenti alle trasformazioni $g \in G$ sono operatori unitari.

Verifica

Se G è un gruppo ad un parametro additivo reale, ad ogni numero reale x corrisponde un elemento $g(x) \in G$ tale che $g(x+y) = g(x)g(y)$. Partiamo dalla relazione che caratterizza la rappresentazione proiettiva :

$$U_{g(x)} U_{g(y)} = \omega(x, y) U_{g(x+y)}.$$

Possiamo quindi considerare, in particolare,

$$U_{g(x)} = \frac{U_{g(x/2)} U_{g(x/2)}}{\omega(x/2, x/2)} = \frac{(U_{g(x/2)})^2}{\omega(x/2, x/2)}$$

$U_{g(x/2)}$ è un operatore unitario o antiunitario ma, per la prop.1.3, $(U_{g(x/2)})^2$ è unitario, dunque U_g è un operatore unitario.

Faremo vedere ora, che è possibile che le rappresentazioni proiettive di un gruppo ad un parametro reale additivo $(\mathbf{R}, +)$ siano delle rappresentazioni. Questo si può mostrare formalmente nel "teorema di Stone".

Diamo innanzitutto la seguente

Definizione 1.8

In uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , una rappresentazione proiettiva U di $(\mathbf{R}, +)$ si dice differenziabile se esiste una varietà lineare D densa in \mathcal{H} per cui converge in \mathcal{H} il limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} \psi \equiv \frac{dU(x)}{dx} \psi$$

per ogni $\psi \in D$. D è il dominio di differenziabilità di U .

Prima di enunciare il teorema di Stone, consideriamo il seguente

Lemma 1.2

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Se $x \rightarrow U(x)$ è una rappresentazione proiettiva di $(\mathbf{R}, +)$ differenziabile su D , allora l'operatore $B : D \rightarrow \mathcal{H}$,

$$B\psi = \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=0} \psi,$$

è un operatore lineare e antihermitiano.

Dimostrazione(euristica)³

Poichè $U(x)$ è differenziabile possiamo scrivere

$$U(\Delta x)\psi = [U(0) + \Delta x B + o(\Delta x)]\psi. \quad (8)$$

Per ipotesi sappiamo che $x \rightarrow U(x)$ è una rappresentazione proiettiva di $(\mathbf{R}, +)$ allora, per la prop. 1.3, U è unitario quindi

$$U^{-1}(\Delta x) = U^*(\Delta x). \quad (9)$$

Considerando l'identità

$$\psi = U^{-1}(\Delta x)[U(\Delta x)]\psi$$

tenendo conto delle (1.8) e (1.9) e che $U(0) = I$, vale che

$$\psi = [I + \Delta x B^* + o^*(\Delta x)][I + \Delta x B + o(\Delta x)]\psi = [I + \Delta x(B^* + B) + o_1(\Delta x)]\psi, \forall \Delta x$$

Affinchè l'identità sia verificata, devono annullarsi necessariamente tutti i coefficienti dello sviluppo di ordine superiore a zero; quindi⁴

$$B^* + B = 0 \Rightarrow B^* = -B.$$

³Per gli scopi di questa trattazione, assumeremo la differenziabilità della rappresentazione proiettiva $x \rightarrow U(x)$. In realtà, essa vale sotto condizioni abbastanza generali. Una trattazione dettagliata e matematicamente rigorosa può essere trovata in [11].

⁴L'identità $B^* = -B$ necessiterebbe la verifica delle condizioni che essa comporta sui domini di definizione, che non verrà presentata in questa trattazione, e per la quale si rimanda a testi specifici [11], cui si rimanda anche per simili verifiche nel seguito della trattazione.

Dunque l'operatore B è antihermitiano.

La linearità di B discende dalla proprietà matematica degli operatori: l'aggiunto di un operatore è sempre lineare.

□

Possiamo ora, enunciare, l'importante teorema di Stone.

TEOREMA DI STONE

Sia $x \rightarrow U(x)$ una rappresentazione proiettiva di un gruppo ad un parametro reale additivo $(\mathbf{R}, +)$, se essa è differenziabile allora esistono un operatore hermitiano $A = A^*$ e $\phi(x) \in \mathbf{C}$, con $|\phi(x)| = 1$, tale che, definendo $V(x) = \phi(x)U(x)$ allora si ha :

$$(i) \quad V'(x) = iAV(x)$$

$$(ii) \quad V(x) = e^{iAx}$$

$$(iii) \quad V(x+y) = V(x)V(y).$$

Dimostrazione

Sia B l'operatore del lemma 1.2, definiamo $A = -iB$ allora $A = A^*$ e

$$U'(0) = iA. \tag{10}$$

Mostriamo che esiste $\phi(x) \in \mathbf{C}$, con $|\phi(x)| = 1$, tale che definendo $V(x) = \phi(x)U(x)$ allora $V'(x) = iAV(x)$.

Consideriamo la relazione che caratterizza le rappresentazioni proiettive

$$U(x)U(y) = \omega(x, y)U(x+y).$$

Derivando rispetto ad x entrambi i membri di questa equazione, tenendo conto della proprietà 1.8, si ha

$$U'(x)U(y) = i \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} e^{if(x, y)} U(x+y) + \omega(x, y)U'(x+y);$$

per $x = 0$ quest'ultima equazione diventa

$$U'(0)U(y) = i \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} e^{if(0, y)} U(y) + \omega(0, y)U'(y). \tag{11}$$

Ponendo $\frac{\partial f(0, y)}{\partial x} = g(y)$ e sostituendo la (1.10) nella (1.11) si ottiene

$$iAU(y) = ig(y)\omega(0, y)U(y) + \omega(0, y)U'(y).$$

Per la proprietà 1.7 si ha

$$iAU(y) = ig(y)U(y) + U'(y)$$

trovando che

$$U'(y) = iAU(y) - ig(y)U(y). \quad (12)$$

Definiamo $\phi(y) = e^{i \int_0^y g(x) dx}$ e

$$V(y) = \phi(y)U(y). \quad (13)$$

Differenziando la (1.13) si ha

$$V'(y) = \phi'(y)U(y) + \phi(y)U'(y)$$

sostituendo la (1.12)

$$V'(y) = \phi'(y)U(y) + i\phi(y)AU(y) - i\phi(y)g(y)U(y) = ig(y)\phi(y)U(y) + i\phi(y)AU(y) - i\phi(y)g(y)U(y).$$

Allora

$$V'(y) = iAV(y). \quad (14)$$

(ii) Dalla (1.13) si trova $V(0) = I$, mostriamo che $V(x) = e^{iAx}$.

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor di $V(x)$ in $x = 0$

$$V(x) = V(0) + V'(0)x + V''(0)\frac{x^2}{2} + \dots + V^n(0)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

Allora dalla (1.14) si ottiene

$$V(x) = V(0) + iAV(0)x + \dots + (iAV(0))^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Quindi⁵

$$V(x) = e^{iAx}.$$

(iii) Mostriamo che $V(x+y) = V(x)V(y)$.

Poichè $x \rightarrow V(x)$ è una rappresentazione proiettiva allora

$$V(x)V(y) = \omega(x, y)V(x+y). \quad (15)$$

⁵Questa dimostrazione richiederebbe la verifica sulla convergenza della serie; per essa si rimanda a [11]

Differenziando tale equazione rispetto ad x si ha

$$V'(x)V(y) = \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x}V(x+y) + \omega(x,y)V'(x+y).$$

Tenendo conto della (1.14) si ottiene

$$iAV(x)V(y) = \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x}V(x+y) + \omega(x,y)iAV(x+y)$$

Dalla (1.15)

$$iAV(x)V(y) = \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x}V(x+y) + \omega(x,y)\frac{iAV(x)V(y)}{\omega(x,y)}.$$

Allora $\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x}V(x+y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial x} = 0$, quindi $\omega(x,y)$ è costante.

Ma $\omega(0,0) = 1 \Rightarrow \omega(x,y) = 1$.

Allora

$$V(x+y) = V(x)V(y).$$

□

2. GENERATORI HERMITIANI DEL GRUPPO DI GALILEI

Consideriamo un sistema quantistico descritto nello spazio di Hilbert \mathcal{H} . Faremo vedere che ogni rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei $\mathcal{G} \ni g \rightarrow U_g$ sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , è unitaria ed è caratterizzata da 9 generatori hermitiani. Troveremo quindi le relazioni di commutazione tra tali generatori. Infine, nel paragrafo 2.6, verranno dimostrate implicazioni derivanti da relazioni di commutazione, che saranno importanti nel seguito della presente trattazione.

2.1. Gruppi e Algebre di Lie.

Poichè il gruppo di Galilei è un gruppo di Lie, ricordiamo la nozione di gruppo di Lie locale [13], introducendo innanzitutto il concetto di sistema di coordinate del gruppo.

Definizione 2.1

Un gruppo topologico separabile G , in cui il prodotto di h e g è indicato con $h \cdot g$, con elemento neutro " e ", ammette un sistema di coordinate se esiste un intorno \mathcal{U} dell'identità ($e \in \mathcal{U} \subseteq G$) ed un omeomorfismo φ da \mathcal{U} in un aperto V di uno spazio euclideo \mathbf{R}^r , tale che

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{U} &\rightarrow V \\ g &\rightarrow \underline{x} = \varphi(g) \\ e &\rightarrow \underline{0} = \varphi(e). \end{aligned}$$

Dunque, ad ogni $g \in \mathcal{U}$ possiamo associare una r -upla di coordinate $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$, ovvero le r coordinate di G su V e le coordinate dell'identità e in V sono $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Per effetto della bijectività e continuità dell'omeomorfismo φ , si può indurre la stessa struttura algebrica di gruppo localmente sulle coordinate. Infatti esiste $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathcal{V}$, si ha che $a \cdot b \in \mathcal{U}$; allora poichè φ è continuo si riesce ad individuare $W \subseteq V$ tale che

$$z = \underline{xy} = \varphi(a \cdot b) \in W, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in W.$$

Le r coordinate del prodotto $\underline{x}\underline{y} = \underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix}$ sono funzioni delle coordinate di

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \text{ e } \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}, \text{ ovvero}$$

$$z_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r), \forall j = 1, \dots, r.$$

Definizione 2.2

Se le funzioni $f_j, \forall j = 1, \dots, r$ sono analitiche allora il gruppo G è detto gruppo di Lie locale.

Supponiamo di considerare un gruppo di Lie G ; essendo le funzioni $f_j, \forall j = 1, \dots, r$ analitiche, queste possono essere sviluppate in serie di Taylor e permettono di ottenere la struttura dell'operazione di prodotto e di inversione del gruppo locale G rispetto al sistema di coordinate.

Presi \underline{x} e \underline{y} nell'aperto W di \mathbf{R}^r , sia $\underline{z} = \underline{x}\underline{y} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}, \underline{y}) \\ f_2(\underline{x}, \underline{y}) \\ \vdots \\ f_r(\underline{x}, \underline{y}) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^r$.

Considerando lo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine di $f_i(\underline{x}, \underline{y})$ troviamo⁶

$$f_i(\underline{x}, \underline{y}) = x_i + y_i + a_{jk}^i x_j y_k + O_3 \quad (16)$$

con $a_{jk}^i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial y_k}(0, 0)$ (O_3 indica un infinitesimo di ordine almeno 3 rispetto al sistema di variabili x_i, y_i) [13].

Dalla (2.1) è evidente che il prodotto al primo ordine è abeliano; pertanto il secondo ordine è il più piccolo ordine non banale.

La struttura del prodotto di un gruppo di Lie locale fino al secondo ordine è determinata dalle costanti a_{jk}^i .

⁶Utilizzando la notazione di Einstein degli indici ripetuti è sottintesa l'operazione di somma sugli indici stessi.

Dato $\underline{x} \in V$, la struttura dell'inversione $\underline{x} \rightarrow \underline{x}^{-1} = g(\underline{x}) = \begin{bmatrix} g_1(\underline{x}) \\ g_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_r(\underline{x}) \end{bmatrix}$ nel gruppo di

Lie, si ottiene dalla soluzione dell'equazione $\underline{xy} = 0$. Tale equazione si riscrive in termini delle funzioni f_j come $f_j(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r) = 0, \forall j = 1, \dots, r$.

Per il teorema del Dini [14] le funzioni g_j sono di classe \mathbf{C}^∞ e lo sviluppo fino al secondo ordine ci permette di ottenere la forma generale dell'operazione di inversione

$$y_i = g_i(x_1, \dots, x_r) = -x_i + a_{jk}^i x_j x_k + O_3 \quad (17)$$

con a_{jk}^i definiti in (2.1). Pertanto, l'operazione di inversione al secondo ordine è determinata dalle stesse costanti che definiscono il prodotto [13].

Mostriamo come ad ogni gruppo di Lie è possibile associare una struttura algebrica che dipende dalla struttura del gruppo ed è chiamata *algebra di Lie*. Ricordiamo innanzitutto la definizione generale di algebra.

Definizione 2.3

Uno spazio vettoriale S su un corpo \mathbf{K} è un'algebra se esiste un'operazione

$$q : S \times S \rightarrow S$$

$$a, b \rightarrow q(a, b)$$

per cui valgono le seguenti proprietà:

- (i) $q(a, b + c) = q(a, b) + q(a, c)$
- (ii) $q(a + b, c) = q(a, c) + q(b, c)$
- (iii) $q(\lambda a, b) = \lambda q(a, b) = q(a, \lambda b)$.

Possiamo, quindi, dare la definizione di algebra di Lie.

Definizione 2.4

Un'algebra S sul campo \mathbf{R} è detta algebra di Lie reale se soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) $q(a, q(b, c)) + q(b, q(c, a)) + q(c, q(a, b)) = 0$ (identità di Jacobi),
- (ii) $q(a, a) = 0, \forall a \in S$ (nilpotenza).

Data una qualunque base (u_k) dello spazio S di dimensione finita r , l' i -esimo coefficiente del prodotto $q(u_j, u_k)$ è un numero reale $c_{jk}^i = q_i(u_j, u_k)$. In un'algebra di Lie valgono:

$$(i) \quad c_{jk}^i = -c_{kj}^i$$

$$(ii) \quad c_{is}^p c_{jk}^s + c_{js}^p c_{ki}^s + c_{ks}^p c_{ij}^s = 0.$$

Osservazione 2.1

Viceversa, se S è un qualunque spazio vettoriale reale di dimensione r , dato un sistema di costanti c_{jk}^i , $i = 1, \dots, r$ che soddisfano (i) e (ii), è sempre possibile conferire a S una struttura di algebra di Lie reale nel seguente modo: fissata una qualunque base (u_k) , si definisce $q(u_j, u_k) = \sum_i c_{jk}^i u_i$. Il prodotto $q(a, b)$ esteso per linearità soddisfa (i), (ii), (iii) della def. 2.3 e (i), (ii) della def. 2.4.

Dati, infatti, $a = a_j u_j \in S$ e $b = b_k u_k \in S$, si ottiene il prodotto

$$q(a, b) = a_j b_k q(u_j, u_k) = c_{jk}^i a_j b_k u_i.$$

Tale prodotto soddisfa la relazione di nilpotenza e l'identità di Jacobi [13]:

$$[a, a] = 0, \quad \forall a \in S$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \quad \forall a, b, c \in S$$

dando così a S la struttura algebrica di Algebra di Lie.

Vediamo, ora, che si ha la possibilità di associare sempre ad un gruppo di Lie locale un'algebra di Lie reale individuando le costanti di struttura del gruppo e mostrando come l'algebra di Lie si definisce sullo "spazio tangente" del gruppo.

Dato un gruppo locale G , si possono considerare nell'intorno V di \mathbf{R}^r le curve differenziabili passanti per l'origine del sistema di coordinate.

Consideriamo adesso un gruppo di Lie locale e definiamo una particolare operazione binaria, diversa dal prodotto di gruppo:

$$q(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} \quad (18)$$

L' i -esima coordinata $q_i(x, y)$ di questo "prodotto" si può esprimere, utilizzando lo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine e tramite la (2.1) e (2.2), come:

$$q_i(x, y) = (a_{jk}^i - a_{kj}^i)x_j y_k + O_3. \quad (19)$$

Le costanti

$$c_{jk}^i = a_{jk}^i - a_{kj}^i \quad (20)$$

sono dette *costanti di struttura del gruppo di Lie locale* G .

Si può dimostrare [13] che le costanti di struttura di un gruppo di Lie locale soddisfano sempre le relazioni (i) e (ii) della definizione 2.4.

Definizione 2.5

Si definisce *spazio tangente del gruppo di Lie locale* G (rispetto ad un sistema di coordinate) l'insieme di tutti i vettori tangenti a cammini passanti per l'origine e differenziabili nell'origine:

$$LG = \left\{ a = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0}, x(0) = 0, \quad x(t) \text{ differenziabile nell'intorno di } t = 0 \right\}.$$

L'insieme LG ha una struttura di spazio vettoriale reale ($LG = \mathbf{R}^r, +, \cdot, \mathbf{R}, [\]$) rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare.

I vettori di LG risultanti dalle operazioni di spazio vettoriale possono essere interpretati in termini di operazioni di gruppo. Presi infatti $a, b \in LG$ con $a = x'(0)$ e $b = y'(0)$ si ha che $a + b \in LG$ e $a + b = \frac{d[x(t)y(t)]}{dt} \Big|_{t=0}$, ovvero la somma di due vettori tangenti è il vettore tangente del cammino che si ottiene come prodotto di Lie di due cammini.

Inoltre, dato $a \in LG$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ con $x'(0) = a$ costruiamo il prodotto di un vettore tangente per uno scalare reale come $\lambda a = \frac{d[x(\lambda t)]}{dt} \Big|_{t=0}$.

Si può sempre dotare LG di una struttura di algebra di Lie. Dati $a, b \in LG$ con $a = x'(0)$ e $b = y'(0)$, consideriamo la seguente operazione detta commutazione tra i due vettori tangenti

$$[a, b]_i = c_{jk}^i a_j b_k,$$

dove c_{jk}^i sono le costanti di struttura definite in (2.5). Costruiamo il seguente cammino differenziabile

$$z(t) = q \left(x(\sqrt{t}), y(\sqrt{t}) \right).$$

Dalla (2.4) si ha

$$z_i(t) = c_{jk}^i x_j(\sqrt{t}) y_k(\sqrt{t}) + O_3(\sqrt{t})$$

Se deriviamo tale cammino:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{q_i(x(\sqrt{t}), y(\sqrt{t}))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} c_{jk}^i \frac{x_j(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \frac{y_k(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} + \frac{O(t^{3/2})}{t} = c_{jk}^i a_j b_k = [a, b]_i.$$

Tale operazione rende lo spazio tangente, su cui essa è definita, un'algebra di Lie.

2.2. Generatori hermitiani del gruppo di Galilei

In tale sezione identificheremo ogni trasformazione di Galilei con il prodotto ordinato che la esprime come composizione di 9 trasformazioni, ognuna presa in un determinato sottogruppo a un parametro additivo. Ciò permetterà di inferire, dal teorema di Wigner e di Stone, una forma di rappresentazione proiettiva unitaria del gruppo \mathcal{G} sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , se il gruppo è un gruppo di simmetria del sistema.

Diamo quindi la definizione di trasformazione di Galilei, trasformazione da un sistema di riferimento inerziale ad un altro in regime non relativistico.

Definizione 2.6

Il gruppo di Galilei \mathcal{G} è il gruppo delle trasformazioni g , ognuna è la composizione di una traslazione spaziale, di una rotazione spaziale e di un "boost" (traslazione della velocità):

$$g = g^{\vec{\tau}} g^R g^{\vec{u}} = g^{\tau^x} g^{\tau^y} g^{\tau^z} R_\alpha^x R_\beta^y R_\gamma^z g^{u_x} g^{u_y} g^{u_z},$$

dove τ^x, τ^y, τ^z sono i parametri delle traslazioni spaziali;

α, β, γ sono gli angoli di rotazione, i parametri delle rotazioni spaziali;

u_x, u_y, u_z sono i parametri dei boost di Galilei.

In questa trattazione, il boost di Galilei individuato da $u_x = u, u_y = 0 = u_z$ è interpretato come la trasformazione tra due sistemi di riferimento inerziali Σ e Σ' , tali che all'istante di tempo t considerato Σ' è sovrapposto a Σ e si muove rispetto ad esso con una velocità $\vec{u} = (-u, 0, 0)$. Pertanto la trasformazione lascia la posizione \vec{r} inalterata $\vec{x} = \vec{x}'$ e cambia solo la velocità. Allora un boost è una trasformazione che agisce come traslazione sulla velocità:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' \\ v'_x = v_x + u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z. \end{cases}$$

Se \mathcal{G} è un gruppo di trasformazioni di Simmetria, indicati con H_1, H_2, H_3 i sottogruppi di \mathcal{G} delle traslazioni spaziali lungo gli assi x, y e z rispettivamente, con H_4, H_5, H_6 i sottogruppi di \mathcal{G} delle rotazioni spaziali attorno agli assi x, y e z rispettivamente, e con H_7, H_8, H_9 i sottogruppi di \mathcal{G} delle traslazioni delle velocità (boost), abbiamo

$$\mathcal{G} \supseteq H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9.$$

Gli elementi che compongono la trasformazione di Galilei, $g = g^{\vec{\tau}} g^R g^{\vec{u}}$, sono trasformazioni di simmetria dei sottogruppi sopra definiti. Quindi, indicando con $h_j(x_j), j =$

$1, \dots, 9$ la trasformazione di H_j , $j = 1, \dots, 9$ individuata dal valore x_j del parametro, allora per la definizione 2.6 si ha che ogni $g \in \mathcal{G}$ è individuato dal vettore $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_9)$, e

$$g = g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_9) = h_1(x_1)h_2(x_2)h_3(x_3)\dots h_9(x_9).$$

(La corrispondenza è, in un intorno dell'identità, individuata da $x_j = 0$, $\forall j$, biunivoca e continua).

Applicando il teorema di Wigner, si ha che

$$e^{if(\underline{x})}U_{g(x_1, \dots, x_9)} = U_{h_1(x_1)}\dots U_{h_9(x_9)},$$

dove U_g è l'operatore unitario o antiunitario individuato dal teorema di Wigner. Pertanto, la corrispondenza $g \rightarrow U_g$ è una rappresentazione proiettiva su \mathcal{H} .

Quindi, ponendo $U_{h_j(x_j)} \equiv U_j(x_j)$, $j = 1, \dots, 9$ abbiamo

$$e^{if(\underline{x})}U_{g(x_1, \dots, x_9)} = U_1(x_1)\dots U_9(x_9).$$

Poichè $H_j \subseteq \mathcal{G}$, $\forall j = 1, \dots, 9$ sono sottogruppi ad un parametro additivo del gruppo di Galilei allora per la proposizione 1.3 gli operatori U_j , $\forall j = 1, \dots, 9$ sono operatori unitari, per cui la rappresentazione

$$x_j \rightarrow U_j(x_j)$$

è una rappresentazione proiettiva unitaria su \mathcal{H} .

Per il teorema di Stone si riescono ad esprimere tali rappresentazioni di gruppi unitari ad un parametro attraverso operatori autoaggiunti: esistono A_j , $j = 1, \dots, 9$, i generatori Hermitiani corrispondenti alle rappresentazioni proiettive unitarie di H_j , $\forall j$ per cui

$$x_j \rightarrow U_j(x_j) = e^{iA_j x_j}. \quad (21)$$

La rappresentazione proiettiva di \mathcal{G} , $g \rightarrow U_g$ su \mathcal{H} , è una rappresentazione proiettiva unitaria ed è determinata da 9 generatori hermitiani.

2.3 Commutatori e costanti di struttura

Troviamo ora le relazioni di commutazione tra i generatori hermitiani del gruppo di Galilei utilizzando la teoria generale del gruppo di Lie locale.

Consideriamo l'operazione binaria di commutazione $q(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$ definita nel gruppo di Lie locale di Galilei. Nel paragrafo 2.3 abbiamo mostrato che se $x(t)$ e $y(t)$ sono

cammini differenziabili nell'origine in modo tale che $x'(0) = a \in LG$ e $y'(0) = b \in LG$ allora si può sempre ottenere un cammino differenziabile nell'origine

$$q(t) = x(\sqrt{t})y(\sqrt{t})x^{-1}(\sqrt{t})y^{-1}(\sqrt{t}) \quad (22)$$

tale che $q'(0) \equiv [a, b]$ e $[a, b]_i = c_{jk}^i a_j b_k$.

Abbiamo visto che una trasformazione del gruppo di Galilei è il prodotto di 9 trasformazioni di sottogruppi ad un parametro unitari, $g(\underline{x}) = h_1(x_1)h_2(x_2)h_3(x_3)\dots h_9(x_9)$, con $h_j \in H_j, \forall j = 1, \dots, 9$.

Definiamo nel sistema di coordinate un cammino differenziabile

$$x_j(t) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ j+1 \\ \vdots \\ 9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in H_j, \forall j = 1, \dots, 9.$$

La variabile t è interpretata come il parametro reale di un cammino differenziabile che passa per l'origine e percorre il sottogruppo H_j del gruppo di Galilei \mathcal{G} .

Usando la (2.7), per ogni coppia i, j consideriamo il cammino

$$q_{jk}(t) = q(x_j(t), x_k(t)) = x_j(\sqrt{t})x_k(\sqrt{t})x_j^{-1}(\sqrt{t})x_k^{-1}(\sqrt{t}) = \begin{bmatrix} q_{jk}^1(t) \\ \vdots \\ q_{jk}^9(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{G} \quad (23)$$

Dalla teoria generale dei gruppi di Lie sappiamo che le 9 coordinate di $q_{jk}(t)$ sono differenziabili in 0 e che $\frac{dq_{jk}^i(t)}{dt} \Big|_{t=0} = c_{jk}^i$.

Riscriviamo la (2.8) in termini di rappresentazione proiettiva, sfruttando la (2.6) si ha

$$e^{iA_j\sqrt{t}}e^{iA_k\sqrt{t}}e^{-iA_j\sqrt{t}}e^{-iA_k\sqrt{t}} = e^{i\phi(t)}e^{iA_1q_{jk}^1(t)}e^{iA_2q_{jk}^2(t)}\dots e^{iA_9q_{jk}^9(t)} \quad (24)$$

con $e^{i\phi(t)}$ fattore di fase, differenziabile e $\phi(0) = 0$.

La relazione (2.9) permette di ottenere una relazione generale per il commutatore tra i generatori hermitiani; per ottenerla, consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor in zero, arrestato al primo ordine in t , di entrambi i membri dell'equazione.

Posto $\phi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t)}{t} = b$, si ha

$$\left[I + iA_j\sqrt{t} - \frac{A_j^2 t}{2} \right] \left[I + iA_k\sqrt{t} - \frac{A_k^2 t}{2} \right] \left[I - iA_j\sqrt{t} - \frac{A_j^2 t}{2} \right] \left[I - iA_k\sqrt{t} - \frac{A_k^2 t}{2} \right] + o_1(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= (I + ibt) \prod_{n=1}^9 (I + itc_{jk}^n A_n) + o_2(t) \\
I + [A_k, A_j]t + o_1(t) &= I + ibt + it \sum_{n=1}^9 (c_{jk}^n A_n) + o_3(t),
\end{aligned}$$

dove o_1, o_2, o_3 sono infinitesimi di ordine almeno $3/2$.

Uguagliando i coefficienti del primo ordine in t si ottiene il seguente risultato

$$[A_k, A_j] = ib + i \sum_{n=1}^9 c_{jk}^n A_n. \quad (25)$$

2.4. Le regole di commutazione.

Nel paragrafo precedente abbiamo determinato l'espressione generale del commutatore tra i 9 generatori hermitiani del gruppo di Galilei. Vediamo ora come si possono ottenere le regole generali di commutazione tra i generatori hermitiani delle rotazioni spaziali, delle traslazioni spaziali e delle traslazioni delle velocità.

Supponiamo di considerare i seguenti operatori⁷:

$$\begin{cases} \hat{J}_x = -A_4 \\ \hat{J}_y = -A_5 \\ \hat{J}_z = -A_6, \end{cases}$$

individuati dai generatori hermitiani delle rotazioni spaziali rispettivamente attorno all'asse x, y, z . I nuovi operatori $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ generano i sottogruppi di operatori unitari che rappresentano le rotazioni, secondo le relazioni

$$e^{iA_4 x_4} = e^{-i\hat{J}_x x_4}, \quad e^{iA_5 x_5} = e^{-i\hat{J}_y x_5}, \quad e^{iA_6 x_6} = e^{-i\hat{J}_z x_6}.$$

Esempio 2.1

Siano dati i generatori hermitiani delle rotazioni spaziali del gruppo di Galilei \mathcal{G} , supponiamo di voler calcolare il commutatore $[\hat{J}_x, \hat{J}_y]$ tra il generatore hermitiano delle rotazioni attorno all'asse x e all'asse y , allora avremo

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = [-A_4, -A_5] = [A_4, A_5].$$

⁷La scelta di usare $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ al posto di A_4, A_5, A_6 è dovuta a ragioni di uniformità con la letteratura scientifica.

Dalla relazione (2.10) si ha

$$[A_4, A_5] = ib + i \sum_{n=1}^9 c_{54}^n A_n.$$

Posto $\epsilon = \sqrt{t}$ e dunque $\epsilon^2 = t$, poichè A_4 e A_5 sono i generatori hermitiani delle rappresentazioni proiettive unitarie dei sottogruppi H_4 e H_5 del gruppo \mathcal{G} e avendo indicato con h_4 e h_5 le trasformazioni di simmetria degli stessi sottogruppi allora, per la (2.8), si ha

$$q_{54}(\epsilon^2) = h_5(\epsilon)h_4(\epsilon)h_5(-\epsilon)h_4(-\epsilon).$$

Vediamo come questa trasformazione agisce su un vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ dello spazio, ricordando che occorre considerare lo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine in t . Dunque

$$\begin{aligned} h_4(-\epsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\epsilon) & -\sin(-\epsilon) \\ 0 & \sin(-\epsilon) & \cos(-\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \cos(-\epsilon)y - \sin(-\epsilon)z \\ \sin(-\epsilon)y + \cos(-\epsilon)z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x \\ (1 - \frac{\epsilon^2}{2})y + z\epsilon \\ -y\epsilon + (1 - \frac{\epsilon^2}{2})z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_5(-\epsilon) \begin{bmatrix} x \\ (1 - \frac{\epsilon^2}{2})y + z\epsilon \\ -y\epsilon + (1 - \frac{\epsilon^2}{2})z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-\epsilon) & 0 & \sin(-\epsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-\epsilon) & 0 & \cos(-\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ (1 - \frac{\epsilon^2}{2})y + z\epsilon \\ -y\epsilon + (1 - \frac{\epsilon^2}{2})z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + y\epsilon^2 - \epsilon z \\ y - \frac{\epsilon^2}{2}y + \epsilon z \\ \epsilon x - y\epsilon + z - \epsilon^2 z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_4(\epsilon) \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + y\epsilon^2 - \epsilon z \\ y - \frac{\epsilon^2}{2}y + \epsilon z \\ \epsilon x - y\epsilon + z - \epsilon^2 z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + y\epsilon^2 - \epsilon z \\ y - \frac{\epsilon^2}{2}y + \epsilon z \\ \epsilon x - y\epsilon + z - \epsilon^2 z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + y\epsilon^2 - \epsilon z \\ y - \epsilon^2 x \\ \epsilon x + z - \frac{\epsilon^2}{2}z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_5(\epsilon) \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + y\epsilon^2 - \epsilon z \\ y - \epsilon^2 x \\ \epsilon x + z - \frac{\epsilon^2}{2}z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\epsilon) & 0 & \sin(\epsilon) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\epsilon) & 0 & \cos(\epsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + y\epsilon^2 - \epsilon z \\ y - \epsilon^2 x \\ \epsilon x + z - \frac{\epsilon^2}{2}z \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x + y\epsilon^2 \\ y - x\epsilon^2 \\ z \end{bmatrix}.$$

Tale trasformazione coincide al 1° ordine in ϵ^2 con una rotazione di un angolo $-\epsilon^2$ attorno all'asse z , dunque è un elemento del sottogruppo H_6 del gruppo di Galilei \mathcal{G} . Il generatore hermitiano corrispondente a tale sottogruppo è A_6 . Quindi l'unica coordinata di q_{45} diversa da zero si ha per $n = 6$, ovvero

$$q_{45}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\epsilon^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che, $\frac{dq_{45}^i(t)}{dt} \Big|_{t=0} = c_{45}^i$, allora

$$c_{45}^6 = -1, \quad c_{45}^j = 0 \quad \text{se } j \neq 6.$$

Questo permette di ottenere l'espressione del commutatore

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = [A_4, A_5] = ib_6 - iA_6 = ib_6 + i\hat{J}_z.$$

Nell'esempio 2.1 abbiamo determinato il commutatore $[\hat{J}_x, \hat{J}_y]$, ovvero il commutatore tra i generatori hermitiani delle rotazioni attorno all'asse x e all'asse y ; mediante lo stesso procedimento si possono ottenere tutte le espressioni dei commutatori tra i 3 generatori delle rotazioni.

Esse possono anche essere ottenute generalizzando per ciclicità degli assi:

$$[\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta] = ib_\gamma + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{J}_\gamma, \quad (26)$$

con

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha, \beta, \gamma \text{ sono ordinati ciclicamente} \\ 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ -1 & \text{se } \alpha, \beta, \gamma \text{ non sono ordinati ciclicamente.} \end{cases}$$

Definendo ora

$$\begin{cases} J_x = \hat{J}_x + b_x \\ J_y = \hat{J}_y + b_y \\ J_z = \hat{J}_z + b_z \end{cases}$$

poichè il commutatore tra un operatore e una costante è zero, allora si ha

$$[J_\alpha, J_\beta] = [\hat{J}_\alpha + b_\alpha, \hat{J}_\beta + b_\beta] = [\hat{J}_\alpha, \hat{J}_\beta] + [b_\alpha, \hat{J}_\beta] + [\hat{J}_\alpha, b_\beta] + [b_\alpha, b_\beta].$$

Ciò ci permette di riscrivere la (2.11) nella seguente relazione

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma. \quad (27)$$

La (2.12) rappresenta in tal modo la regola di commutazione tra i generatori hermitiani delle rotazioni spaziali del gruppo di Galilei \mathcal{G} .

Le trasformazioni di simmetria quantistiche indotte dal sottogruppo unitario

$U_\alpha(x_\alpha) = e^{-iJ_\alpha x_\alpha}$, cioè determinate da J_α , sono identiche a quelle generate da \hat{J}_α . Pertanto possiamo identificare in J_α il generatore delle rotazioni attorno all'asse x_α .

Procedendo nella determinazione dei commutatori, poniamo:

$$\begin{cases} \hat{P}_x = -A_1 \\ \hat{P}_y = -A_2 \\ \hat{P}_z = -A_3. \end{cases}$$

Rappresentiamo con essi i generatori hermitiani delle traslazioni spaziali lungo gli assi x , y e z . Vediamo le relazioni che si possono ottenere per le parentesi di commutazione tra i generatori, ora definiti, e i generatori hermitiani delle rotazioni.

Esempio 2.2

Supponiamo di voler calcolare il commutatore $[\hat{P}_y, J_z]$, ovvero il commutatore tra il generatore delle traslazioni spaziali lungo l'asse y e il generatore hermitiano delle rotazioni attorno all'asse z . Dunque

$$[\hat{P}_y, J_z] = [A_2, A_6].$$

Dalla (2.10) si ha

$$[A_2, A_6] = ib + i \sum_{n=1}^9 c_{62}^n A_n.$$

In maniera analoga a quanto fatto nell'esempio 2.1, andiamo a porre $\epsilon = \sqrt{t}$ e consideriamo

$$q_{62}(\epsilon^2) = h_6(\epsilon)h_2(\epsilon)h_6(-\epsilon)h_2(-\epsilon).$$

Vediamo come questa trasformazione agisce su un vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ dello spazio, sino al 2° ordine in ϵ .

$$h_2(-\epsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y - \epsilon \\ z \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
h_6(-\epsilon) \begin{bmatrix} x \\ y - \epsilon \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-\epsilon) & -\sin(-\epsilon) & 0 \\ \sin(-\epsilon) & \cos(-\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - \epsilon \\ z \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + \epsilon y - \epsilon^2 \\ -\epsilon x + y - \frac{\epsilon^2}{2}y - \epsilon \\ z \end{bmatrix}. \\
h_2(\epsilon) \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + \epsilon y - \epsilon^2 \\ -\epsilon x + y - \frac{\epsilon^2}{2}y - \epsilon \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + \epsilon y - \epsilon^2 \\ -\epsilon x + y - \frac{\epsilon^2}{2}y \\ z \end{bmatrix}. \\
h_6(\epsilon) \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + \epsilon y - \epsilon^2 \\ -\epsilon x + y - \frac{\epsilon^2}{2}y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) & 0 \\ \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{\epsilon^2}{2}x + \epsilon y - \epsilon^2 \\ -\epsilon x + y - \frac{\epsilon^2}{2}y \\ z \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} x - \epsilon^2 \\ y \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

La trasformazione complessiva è una traslazione di $-\epsilon^2$ lungo l'asse x , è dunque un elemento del sottogruppo H_1 del gruppo di Galilei \mathcal{G} . Il generatore hermitiano corrispondente a tale sottogruppo è A_1 . Poichè l'unica coordinata di q_{62} diversa da zero si ottiene per $n = 1$ allora

$$q_{62}(t) = \begin{bmatrix} -\epsilon^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Da ciò

$$c_{62}^1 = \frac{dq_{62}^1(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -1, \quad c_{62}^j = 0 \quad \text{se } j \neq 1.$$

e quindi

$$[\hat{P}_y, J_z] = [A_2, A_6] = ib_1 - iA_1 = ib_1 + i\hat{P}_x.$$

Tramite l'esempio (2.2) abbiamo trovato l'espressione del commutatore tra il generatore hermitiano delle traslazioni lungo l'asse x e il generatore delle rotazioni attorno

all'asse z ; poichè le coordinate degli assi sono in rotazione ciclica, allora si ottiene la seguente regola di commutazione:

$$[J_\alpha, \hat{P}_\beta] = ib_\gamma + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{P}_\gamma. \quad (28)$$

Se invece consideriamo il generatore di una rotazione lungo un asse e il generatore delle traslazioni lungo lo stesso asse, questi commutano; quindi in generale vale

$$[J_\alpha, \hat{P}_\alpha] = ic_\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbf{R}. \quad (29)$$

Diamo ora la seguente:

Proprietà 2.1

I generatori hermitiani delle rotazioni e delle traslazioni spaziali di un gruppo di Galilei soddisfano la relazione

$$[J_\alpha, \hat{P}_\beta] = -[J_\beta, \hat{P}_\alpha].$$

Per verificarla, consideriamo l'identità di Jacobi sulla terna (J_x, J_z, \hat{P}_x) , ovvero

$$[J_x, [J_z, \hat{P}_x]] + [J_z, [\hat{P}_x, J_x]] + [\hat{P}_x, [J_x, J_z]] = 0.$$

Sfruttando le espressioni (2.12), (2.13) e (2.14) si ottiene

$$[J_x, \hat{P}_y] = -[J_y, \hat{P}_x].$$

Occupiamoci di determinare la costante reale della relazione (2.14).

Operiamo l'identità di Jacobi sulla terna (\hat{P}_x, J_y, J_z) :

$$[\hat{P}_x, [J_y, J_z]] + [J_y, [J_z, \hat{P}_x]] + [J_z, [\hat{P}_x, J_y]] = 0.$$

Per effetto delle relazioni (2.12), (2.13) e della proprietà 2.1 abbiamo

$$[P_x, iJ_x] + [J_y, ib_y + i\hat{P}_y] + [J_z, [J_x, \hat{P}_y]] = 0$$

da cui, continuando i calcoli si ha

$$-[J_x, \hat{P}_x] + [J_y, \hat{P}_y] + [J_z, \hat{P}_z] = 0.$$

Per la (2.14) ognuno di questi commutatori è una costante immaginaria; quindi si ha

$$[J_x, \hat{P}_x] = i\xi,$$

$$[J_y, \hat{P}_y] = i\eta,$$

$$[J_z, \hat{P}_z] = i\zeta,$$

con $\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{R}$; considerando tutti i cambiamenti di segno nella rotazione ciclica delle tre coordinate degli assi, otteniamo il seguente sistema di 3 equazioni nelle altrettante incognite ξ, η, ζ

$$\begin{cases} -\xi + \eta + \zeta = 0 \\ -\eta + \zeta + \xi = 0 \\ -\zeta + \xi + \eta = 0. \end{cases}$$

Poichè la matrice dei coefficienti associata al sistema è non singolare, essendo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

il sistema ammette l'unica soluzione banale, per cui $\xi = \eta = \zeta = 0$ e la (2.14) si riscrive nella forma

$$[J_\alpha, \hat{P}_\alpha] = 0. \quad (30)$$

Definendo gli operatori hermitiani,

$$\begin{cases} P_x = \hat{P}_x + b_x \\ P_y = \hat{P}_y + b_y \\ P_z = \hat{P}_z + b_z, \end{cases}$$

essi possono essere considerati come i generatori delle traslazioni, analogamente a quanto fatto per i generatori delle rotazioni. Allora le due espressioni (2.13) e (2.15) si possono riscrivere nella seguente regola generale di commutazione tra generatori delle rotazioni spaziali e generatori delle traslazioni spaziali per un gruppo di Galilei \mathcal{G} :

$$[J_\alpha, P_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}P_\gamma. \quad (31)$$

Esempio 2.3

Nel calcolare le parentesi di commutazioni tra due generatori delle traslazioni spaziali, lungo assi perpendicolari tra loro, occorre osservare che le traslazioni commutano sempre tra di loro, dunque varrà

$$[P_\alpha, P_\beta] = ir_{\alpha\beta}, \quad r_{\alpha\beta} \in \mathbf{R}. \quad (32)$$

Mostriamo che $r_{\alpha\beta}$ è zero, usando l'identità di Jacobi sulla terna (J_x, P_y, P_z) ,

$$[J_x, [P_y, P_x]] + [P_y, [P_x, J_x]] + [P_x, [J_x, P_y]] = 0.$$

utilizzando i risultati delle relazioni (2.16) e (2.17) si ha

$$[P_x, P_z] = 0.$$

Quindi, generalizzando per ciclicità si ottiene

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0. \quad (33)$$

essa rappresenta la regola di commutazione tra due generatori hermitiani delle traslazioni spaziali.

Esempio 2.4

Studiamo ora le regole di commutazione generali riguardanti i generatori corrispondenti ai sottogruppi delle traslazioni delle velocità.

Definendo, $\hat{G}_x = A_7, \hat{G}_y = A_8, \hat{G}_z = A_9$, troveremo $[J_\alpha, \hat{G}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{G}_\gamma + ib_\gamma$, analogamente alla (2.13).

Se poniamo

$$\begin{cases} G_x = \hat{G}_x + b_7 \\ G_y = \hat{G}_y + b_8 \\ G_z = \hat{G}_z + b_9, \end{cases}$$

poichè le rotazioni agiscono sulle velocità in maniera identica a come agiscono sulle posizioni, allora la regola di commutazione $[J_\alpha, G_\beta]$ si può ottenere, analogamente alla (2.16), sarà

$$[J_\alpha, G_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}G_\gamma. \quad (34)$$

Inoltre, così come accade per il commutatore tra due generatori delle traslazioni lungo assi perpendicolari, anche due generatori dei boost di Galilei, lungo assi tra di loro perpendicolari, commutano, ovvero

$$[G_\alpha, G_\beta] = id_{\alpha\beta}, \quad d_{\alpha\beta} \in \mathbf{R}.$$

Si dimostra che tale costante reale è zero, applicando l'identità di Jacobi alla terna (J_x, G_y, G_x) , da cui risulta la regola di commutazione

$$[G_\alpha, G_\beta] = 0. \quad (35)$$

Esempio 2.5

Per trovare l'espressione del commutatore tra il generatore delle traslazioni spaziali e il generatore delle traslazioni delle velocità, si osserva che una traslazione nello spazio delle velocità commuta con una traslazione nello spazio delle posizioni, ovvero

$$[G_\alpha, P_\beta] = i\mu_{\alpha\beta}. \quad (36)$$

Per determinare tale costante, procediamo innanzitutto considerando l'identità di Jacobi sulla terna (J_x, G_y, P_x) :

$$[J_x, [G_y, P_x]] + [G_y, [P_x, J_x]] + [P_x, [J_x, G_y]] = 0;$$

applicando la (2.16), (2.19) e (2.21) si ha

$$[J_x, i\mu_{yx}] + 0 + [P_x, iG_z] = 0;$$

allora

$$[P_x, G_z] = 0.$$

Per cui la (2.21) si scrive come

$$[G_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}\mu_\alpha. \quad (37)$$

Ora mostriamo che la costante reale μ_α nella (2.22) non dipende dall'indice α considerato.

Considerando, infatti, l'identità di Jacobi sulla terna (J_x, G_y, P_z) si ottiene

$$[J_x, [G_y, P_z]] + [G_y, [P_z, J_x]] + [P_z, [J_x, G_y]] = 0.$$

Per la (2.16), (2.19) e (2.22), si ha

$$[G_y, P_y] - [G_z, P_z] = 0;$$

allora

$$[G_y, P_y] = [G_z, P_z].$$

Procedendo allo stesso modo, pertanto dall'identità di Jacobi su (J_y, G_z, P_x) , si ottiene

$$[G_z, P_z] = [G_x, P_x].$$

Quindi, indicando con μ il parametro della rappresentazione proiettiva, scriviamo nella seguente espressione la regola di commutazione tra il generatore hermitiano delle traslazioni spaziali e il generatore hermitiano delle traslazioni delle velocità:

$$[G_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}\mu. \quad (38)$$

2.4. Implicazioni generali di relazioni di commutazione.

Mostriamo che una qualsiasi famiglia di operatori $\vec{S} = (S_\alpha, S_\beta, S_\gamma)$ che verifica la condizione:

$$[J_\alpha, S_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma, \quad (39)$$

soddisfa la seguente relazione

$$[J_\alpha, S_\beta^n] = nS_\beta^{n-1}(i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma). \quad (40)$$

Dimostrazione

Procediamo dimostrando la (2.25) per induzione su n e considerando $\alpha = x$, $\beta = y$ e $\gamma = z$.

$n = 1$. Dalla (2.24) si ottiene

$$[J_x, S_y] = iS_z.$$

$n = 2$.

$$\begin{aligned} [J_x, S_y^2] &= J_x S_y^2 - S_y^2 J_x = J_x S_y^2 - S_y J_x S_y + S_y J_x S_y - S_y^2 J_x = \\ &= [J_x, S_y] S_y + S_y [J_x, S_y] = \\ &= iS_z S_y + iS_y S_z = 2S_y (iS_z). \end{aligned}$$

Supponiamo che la tesi valga per $(n - 1)$

$$[J_x, S_y^{n-1}] = (n - 1)S_y^{n-2}(iS_z),$$

e dimostriamola per n .

$$\begin{aligned} [J_x, S_y^n] &= J_x S_y^n - S_y^{n-1} J_x S_y + S_y^{n-1} J_x S_y - S_y^n J_x = \\ &= [J_y, S_y^{n-1}] S_y + S_y^{n-1} [J_x, S_y] = \\ &= (n - 1)S_y^{n-2}(iS_z) S_y + S_y^{n-1}(iS_z) = \\ &= nS_y^{n-1}(iS_z). \end{aligned}$$

□

Proprietà 2.2

La relazione (2.25) ci permette di dimostrare che, data una funzione analitica $\phi(\vec{S})$, a valori di operatore, dell'operatore \vec{S} , è soddisfatta la seguente regola di commutazione:

$$[J_\alpha, \phi(\vec{S})] = i \left(\frac{\partial \phi(\vec{S})}{\partial S_\beta} S_\gamma - \frac{\partial \phi(\vec{S})}{\partial S_\gamma} S_\beta \right), \quad (41)$$

dove α, β, γ sono in permutazione ciclica.

Dimostrazione

La funzione ϕ può essere espressa come $\phi(\vec{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f_{nk}(S_\alpha) S_\beta^k S_\gamma^{n-k}$; allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} [J_\alpha, \phi(\vec{S})] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n [J_\alpha, f_{nk}(S_\alpha) S_\beta^k S_\gamma^{n-k}] = {}^8 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \{ [J_\alpha, f_{nk}(S_\alpha)] S_\beta^k S_\gamma^{n-k} + f_{nk}(S_\alpha) [J_\alpha, S_\beta^k] S_\gamma^{n-k} + f_{nk}(S_\alpha) S_\beta^k [J_\alpha, S_\gamma^{n-k}] \} = \\ &\text{(sfruttando la relazione 2.25)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \{ 0 S_\beta^k S_\gamma^{n-k} + f_{nk}(S_\alpha) k S_\beta^{k-1} (i S_\gamma) S_\gamma^{n-k} + f_{nk}(S_\alpha) S_\beta^k (n-k) S_\gamma^{n-k-1} (-i S_\beta) \} = \\ &= i \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f_{nk}(S_\alpha) k S_\beta^{k-1} S_\gamma^{n-k+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n f_{nk}(S_\alpha) S_\beta^{k+1} (n-k) S_\gamma^{n-k-1} \right\} = \\ &= i \left\{ \frac{\partial \phi(\vec{S})}{\partial S_\beta} S_\gamma - \frac{\partial \phi(\vec{S})}{\partial S_\gamma} S_\beta \right\}. \end{aligned}$$

□

Proprietà 2.3

Indicata con $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ una qualsiasi terna di operatori autoaggiunti che soddisfa la regola di commutazione (2.24), supponendo che le coordinate x, y, z siano ordinate ciclicamente, allora valgono le seguenti relazioni:

se n è dispari:

$$J_x^n S_y = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k} (i S_z) J_x^{2k} + \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \binom{n}{2k-1} S_y J_x^{2k-1}. \quad (42)$$

se n è pari:

$$J_x^n S_y = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} S_y J_x^{2k} + \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n}{2k-1} (i S_z) J_x^{2k-1}. \quad (43)$$

⁸In generale, considerato il commutatore $[A, B_1 B_2 B_3] = AB_1 B_2 B_3 - B_1 B_2 B_3 A$, esso può essere riscritto come $AB_1 B_2 B_3 - B_1 B_2 B_3 A = AB_1 B_2 B_3 - B_1 A B_2 B_3 + B_1 A B_2 B_3 - B_1 B_2 A B_3 + B_1 B_2 A B_3 - B_1 B_2 B_3 A = [A, B_1] B_2 B_3 + B_1 [A, B_2] B_3 + B_1 B_2 [A, B_3]$.

Dimostrazione

Dimostriamo le relazioni (2.27) e (2.28) per induzione su n .

$$n = 1 : \quad J_x S_y = [J_x, S_y] + S_y J_x = iS_z + S_y J_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} iS_z + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} S_y J_x.$$

$$\begin{aligned} n = 2 : \quad J_x^2 S_y &= J_x(J_x S_y) = iJ_x S_z + J_x S_y J_x = i[J_x, S_z] + iS_z J_x + iS_z J_x + S_y J_x^2 = \\ &= S_y + 2iS_z J_x + S_y J_x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} S_y + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} iS_z J_x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} S_y J_x^2. \end{aligned}$$

Ora supponiamo che se le relazioni siano entrambe vere per $n - 1$, saranno vere per n .

Dimostriamo che la relazione (2.27) è vera per n dispari, utilizzando la relazione (2.28) che, per ipotesi induttiva è vera per $n - 1$.

$$\begin{aligned} J_x^n S_y &= J_x(J_x^{n-1} S_y) = J_x \left(\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n-1}{2k} S_y J_x^{2k} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \binom{n-1}{2k-1} (iS_z) J_x^{2k-1} \right) = \\ &= J_x \left(\binom{n-1}{0} S_y + \binom{n-1}{2} S_y J_x^2 + \binom{n-1}{4} S_y J_x^4 + \dots + \binom{n-1}{n-1} S_y J_x^{n-1} \right) + \\ &\quad + J_x \left(\binom{n-1}{1} (iS_z) J_x + \binom{n-1}{3} (iS_z) J_x^3 + \dots + \binom{n-1}{n-2} (iS_z) J_x^{n-2} \right) = \\ &= \binom{n-1}{0} J_x S_y + \binom{n-1}{2} J_x S_y J_x^2 + \binom{n-1}{4} J_x S_y J_x^4 + \dots + \binom{n-1}{n-1} J_x S_y J_x^{n-1} + \\ &\quad + \binom{n-1}{1} iJ_x S_z J_x + \binom{n-1}{3} iJ_x S_z J_x^3 + \dots + \binom{n-1}{n-2} iJ_x S_z J_x^{n-2} = \end{aligned}$$

(Per effetto della relazione vera nel caso $n = 1$, e della relazione $iJ_x S_z = S_y + iS_z J_x$, la catena di uguaglianze prosegue con)

$$\begin{aligned} &= \binom{n-1}{0} (iS_z + S_y J_x) + \binom{n-1}{2} (iS_z + S_y J_x) J_x^2 + \binom{n-1}{4} (iS_z + S_y J_x) J_x^4 + \dots + \\ &+ \binom{n-1}{n-1} (iS_z + S_y J_x) J_x^{n-1} + \binom{n-1}{1} (S_y + iS_z J_x) J_x + \binom{n-1}{3} (S_y + iS_z J_x) J_x^3 + \dots + \\ &\quad + \binom{n-1}{n-2} (S_y + iS_z J_x) J_x^{n-2} = \\ &= \binom{n}{0} iS_z + \binom{n}{2} (iS_z) J_x^2 + \binom{n}{4} (iS_z) J_x^4 + \dots + \binom{n}{n-1} (iS_z) J_x^{n-1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n}{1} S_y J_x + \binom{n}{3} S_y J_x^3 + \dots + \binom{n}{n-2} S_y J_x^{n-2} + \binom{n}{n} S_y J_x^n = \\
& = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k} (iS_z) J_x^{2k} + \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \binom{n}{2k-1} S_y J_x^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Nelle ultime due uguaglianze si sono utilizzate le identità:

$$\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n} = 1, \quad (44)$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \quad (45)$$

Abbiamo così dimostrato la validità della relazione (2.27).

Vediamo ora che la (2.28) è vera per n pari se, per ipotesi induttiva, la (2.27) è vera per $n-1$.

$$\begin{aligned}
J_x^n S_y & = J_x (J_x^{n-1} S_y) = J_x \left(\sum_{k=0}^{(n-2)/2} \binom{n-1}{2k} (iS_z) J_x^{2k} + \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n-1}{2k-1} S_y J_x^{2k-1} \right) = \\
& = J_x \left(\binom{n-1}{0} iS_z + \binom{n-1}{2} iS_z J_x^2 + \binom{n-1}{4} iS_z J_x^4 + \dots + \binom{n-1}{n-2} iS_z J_x^{n-2} \right) + \\
& \quad + J_x \left(\binom{n-1}{1} S_y J_x + \binom{n-1}{3} S_y J_x^3 + \dots + \binom{n-1}{n-1} S_y J_x^{n-1} \right) = \\
& = \binom{n-1}{0} iJ_x S_z + \binom{n-1}{2} iJ_x S_z J_x^2 + \binom{n-1}{4} iJ_x S_z J_x^4 + \dots + \binom{n-1}{n-2} iJ_x S_z J_x^{n-2} + \\
& \quad + \binom{n-1}{1} J_x S_y J_x + \binom{n-1}{3} J_x S_y J_x^3 + \dots + \binom{n-1}{n-1} J_x S_y J_x^{n-1} =
\end{aligned}$$

(Per effetto della relazione vera nel caso $n=1$, e della relazione $iJ_x S_z = S_y + iS_z J_x$, la catena di uguaglianze prosegue con)

$$\begin{aligned}
& = \binom{n-1}{0} (S_y + iS_z J_x) + \binom{n-1}{2} (S_y + iS_z J_x) J_x^2 + \binom{n-1}{4} (S_y + iS_z J_x) J_x^4 + \dots + \\
& + \binom{n-1}{n-2} (S_y + iS_z J_x) J_x^{n-2} + \binom{n-1}{1} (iS_z + S_y J_x) J_x + \binom{n-1}{3} (iS_z + S_y J_x) J_x^3 + \dots +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{n-1}{n-1} (iS_z + S_y J_x) J_x^{n-1} = \\
& = \binom{n}{0} S_y + \binom{n}{2} S_y J_x^2 + \binom{n}{4} S_y J_x^4 + \dots + \binom{n}{n-2} S_y J_x^{n-2} + \\
& + \binom{n}{n} S_y J_x^n + \binom{n}{1} iS_z J_x + \binom{n}{3} iS_z J_x^3 + \dots + \binom{n}{n-1} iS_z J_x^{n-1} = \\
& = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} S_y J_x^{2k} + \sum_{k=1}^{n/2} \binom{n}{2k-1} (iS_z) J_x^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Anche qui, nelle ultime due uguaglianze, abbiamo fatto uso di (2.29) e (2.30). Abbiamo così dimostrato la validità della relazione (2.28).

□

3. RAPPRESENTAZIONI PROIETTIVE DEL GRUPPO DI GALILEI

In questa sezione mostreremo come realizzare le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Galilei \mathcal{G} tramite il *teorema di imprimitività di Mackey* [15]. Seguiremo un approccio che miri a formulare una teoria che prescindendo dal particolare sistema fisico considerato. Applicandola ad una particella puntiforme libera localizzabile nello spazio delle coordinate \mathbf{R}^3 , si trova una teoria coincidente con la usuale Meccanica Quantistica di una particella non relativistica.

3.1. Sistemi di imprimitività e rappresentazioni indotte.

Diamo innanzitutto la seguente proprietà.

Proprietà 3.1

Nel capitolo 1, abbiamo mostrato che una proprietà soddisfatta da una trasformazione di simmetria quantistica è che essa preserva le relazioni funzionali tra le osservabili:

$$\{f(A)\}' = f(A'), \quad (46)$$

dove A' è l'operatore che corrisponde all'osservabile \mathcal{A}' (il risultato della trasformazione di \mathcal{A}) e A è l'operatore corrispondente ad \mathcal{A} nello spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Abbiamo inoltre verificato, che se abbiamo una trasformazione di simmetria quantistica questa è determinata (Teorema 1.4) da una trasformazione di Wigner e dunque, applicando il teorema di Wigner, questo assicura l'esistenza di un operatore unitario o antiunitario $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ per cui

$$A' = UAU^{-1}. \quad (47)$$

Tale relazione permette di stabilire il legame tra le risoluzioni dell'identità di A e A' . Prendiamo infatti come funzione numerica la funzione caratteristica di un intervallo $\Delta = (-\infty, \lambda]$, $f = \chi_\Delta$, e consideriamo l'operatore di proiezione $E(\Delta) = \chi_\Delta(A)$.

Dalle relazioni (3.1) e (3.2) si ha

$$UE_\lambda U^{-1} = U\chi_\Delta(A)U^{-1} = \chi_\Delta(UAU^{-1}) = \int_0^\lambda \lambda E'_\mu = E'_\lambda.$$

Da ciò ne consegue che $E'_\lambda = UE_\lambda U^{-1}$.

Definizione 3.1

Sia G un gruppo transitivo di trasformazioni di uno spazio S .

Sia U una rappresentazione unitaria di G sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Una misura a valori di proiezione di \mathcal{H} in S

$$\Delta \rightarrow E(\Delta),$$

tale che

$$U_g E(\Delta) U_g^{-1} = E(g^{-1}(\Delta)),$$

è detto sistema di imprimitività relativo alla rappresentazione U di G .

Prima di formulare il *teorema di Mackey*, vediamo com'è possibile ottenere una rappresentazione del gruppo di Euclide, gruppo delle rototraslazioni nello spazio delle coordinate \mathbf{R}^3 , indotta da una rappresentazione unitaria del gruppo delle rotazioni $SO(3)$.

Sia dato il gruppo di Euclide \mathcal{E} come gruppo di trasformazioni di \mathbf{R}^3 ; formuliamo la definizione di rappresentazione indotta in questo caso particolare.

Il gruppo di Euclide \mathcal{E} agisce transitivamente su \mathbf{R}^3 , cioè per ogni coppia di punti $s_1, s_2 \in \mathbf{R}^3$ esiste $g \in \mathcal{E}$ tale che $g(s_1) \equiv s_1 g = s_2$.

Poichè \mathcal{E} agisce transitivamente su \mathbf{R}^3 , scelto un punto $s_0 \in \mathbf{R}^3$, possiamo considerare il sottogruppo delle trasformazioni che lasciano fisso s_0 :

$$K_{s_0} = \{h \in \mathcal{E} \mid s_0 h = s_0\}.$$

K_{s_0} è evidentemente il sottogruppo delle rotazioni attorno s_0 . Ne segue dunque che

$$\mathbf{R}^3 \equiv \mathcal{E}/K_{s_0}.$$

Sia

$$k \rightarrow D_k$$

una rappresentazione unitaria di K_{s_0} nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 .

Possiamo considerare lo spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3, \mathcal{H}_0) = \left\{ f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_0 \mid \int_{\mathbf{R}^3} \|f(\vec{x})\|_{\mathcal{H}_0}^2 d\vec{x}^3 < \infty \right\}.$$

Dato $g \in \mathcal{E}$, abbiamo $g(\vec{x}) = k(\vec{x}) + \vec{\tau}$, cosicchè g è identificato da k e $\vec{\tau}$; definiamo per ogni $f \in L_2(\mathbf{R}^3, \mathcal{H}_0)$

$$(U_g f)(s) = D_k f(g(s)).$$

L'operatore U_g è unitario e la corrispondenza

$$g \rightarrow U_g$$

è una rappresentazione unitaria.

Definizione 3.2

Sia data una rappresentazione unitaria $D : K_{s_0} \rightarrow \mathcal{H}_0$, la rappresentazione

$$\mathcal{E} \ni g \rightarrow U_g \in U(\mathcal{H}),$$

costruita sopra, si dice indotta dalla rappresentazione unitaria D del sottogruppo K_{s_0} .

Caso particolare.

Supponendo di scegliere, nello spazio delle coordinate \mathbf{R}^3 , il punto s_0 coincidente con l'origine, allora il sottogruppo delle trasformazioni che lasciano fisso l'origine di \mathbf{R}^3 è il gruppo delle rotazioni $SO(3)$.

Si ha che

$$\mathbf{R}^3 \equiv \mathcal{E}/SO(3).$$

Sia data dunque

$$R \rightarrow D(R)$$

una rappresentazione di $SO(3)$ nello spazio di Hilbert \mathcal{H}_0 , e sia $g \in \mathcal{E}$, con $g = (\tau, R)$, allora la corrispondenza

$$g \rightarrow U_g$$

tale che

$$(U_g f)(s) = D(R)f(g(s))$$

è la rappresentazione indotta dalla rappresentazione unitaria del sottogruppo $SO(3)$.

La definizione 3.2 si può estendere al caso in cui le rappresentazioni del gruppo di Euclide siano rappresentazioni proiettive nel gruppo degli operatori unitari sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}[15]$.

E' facile costruire un sistema di imprimitività (def. 3.1) da una rappresentazione indotta secondo la def. 3.2. Data la rappresentazione indotta, dato un boreliano $\Delta \subseteq \mathbf{R}^3$, l'operatore

$$E(\Delta) : L_2(\mathbf{R}^3, \mathcal{H}_0) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^3, \mathcal{H}_0),$$

tale che

$$(E(\Delta)f)(\vec{x}) = \chi_\Delta(\vec{x})f(\vec{x}),$$

è una misura a valori di proiezione su \mathbf{R}^3 .

Essa soddisfa, per costruzione, la relazione

$$U_g E(\Delta) U_g^{-1} = E(g^{-1}(\Delta)).$$

Pertanto, essa è un sistema di imprimitività relativo alla rappresentazione indotta U .

Il teorema di Mackey [9], che ci accingiamo a presentare, stabilisce che vale il viceversa: ogni sistema di imprimitività relativo a una rappresentazione del gruppo di Euclide è equivalente a una rappresentazione indotta da una rappresentazione di $SO(3)$.

Osservazione 3.1

La condizione di esistenza di una misura a valore di proiezione su \mathbf{R}^3

$$\Delta \rightarrow E(\Delta)$$

che soddisfi

$$U_g E(\Delta) U_g^{-1} = E(g^{-1}(\Delta)),$$

è equivalente all'esistenza di una terna di operatori autoaggiunti $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ tali che

$$U_g \vec{F} U_g^{-1} = g^{-1}(\vec{F}).$$

TEOREMA DI MACKKEY (di imprimitività)

Sia

$$U : \mathcal{E} \rightarrow U(\mathcal{H})$$

una rappresentazione unitaria irriducibile del gruppo di Euclide \mathcal{E} . Sia $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ una terna di operatori autoaggiunti per cui, per ogni $g \in \mathcal{E}$

$$U_g^{-1} \vec{F} U_g = g(\vec{F}). \quad (48)$$

La rappresentazione U è unitariamente equivalente a una rappresentazione indotta da una rappresentazione irriducibile

$$D : SO(3) \rightarrow U(\mathcal{H}_0).$$

In altre parole, U e \vec{F} formano un sistema di imprimitività basato sul gruppo di Euclide. Inoltre, nella rappresentazione indotta

$$(F_\alpha f)(\vec{x}) = x_\alpha f(\vec{x}).$$

Di conseguenza:

$$(P_\alpha f)(\vec{x}) = -i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_\alpha}.$$

Il teorema di imprimitività può essere generalizzato al caso di rappresentazioni proiettive.

TEOREMA DI MACKEY GENERALIZZATO

Sia

$$U : \mathcal{E} \rightarrow U(\mathcal{H})$$

una rappresentazione proiettiva irriducibile del gruppo di Euclide \mathcal{E} . Sia $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ una terna di operatori autoaggiunti per cui, per ogni $g \in \mathcal{E}$

$$U_g^{-1} \vec{F} U_g = g(\vec{F}).$$

La rappresentazione U è unitariamente equivalente a una rappresentazione indotta da una rappresentazione proiettiva irriducibile

$$D : SO(3) \rightarrow U(\mathcal{H}_0).$$

Nella rappresentazione proiettiva indotta

$$(F_\alpha f)(\vec{x}) = x_\alpha f(\vec{x}).$$

Di conseguenza:

$$(P_\alpha f)(\vec{x}) = -i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_\alpha}.$$

3.2. Sistemi di imprimitività di \mathcal{E} e rappresentazioni del gruppo di Galilei.

Mostriamo ora che le regole di commutazione tra i generatori hermitiani delle rappresentazioni proiettive del gruppo di Galilei, ottenute nel cap.2, una volta definito l'operatore

$$\vec{F} = \frac{\vec{G}}{\mu}, \quad (49)$$

implicano che vale in generale la seguente relazione:

$$U_g^{-1} \vec{F} U_g = g(\vec{F}), \quad (50)$$

dove g è una qualunque trasformazione del sottogruppo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$ delle rototraslazioni, cioè il cosiddetto gruppo di Euclide. Questo ci permetterà di individuare, in corrispondenza di ogni rappresentazione proiettiva di \mathcal{G} , un sistema di imprimitività relativo alla rappresentazione di \mathcal{E} , e quindi di applicare il teorema di Mackey per ottenere le rappresentazioni di \mathcal{G} .

Occupiamoci innanzitutto di verificare che la relazione (3.5) è soddisfatta quando la trasformazione di simmetria quantistica è una traslazione spaziale.

Abbiamo determinato, nel capitolo 2, la regola di commutazione (2.23) tra il generatore hermitiano dei boost di Galilei e il generatore hermitiano delle traslazioni spaziali. Per effetto della (3.4), possiamo ricrivere la (2.23) come

$$[F_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}. \quad (51)$$

Se consideriamo la componente F_x dell'operatore $\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$ e il generatore hermitiano delle traslazioni spaziali lungo la stessa coordinata allora possiamo dimostrare la seguente identità

$$e^{iP_x a} F_x e^{-iP_x a} = F_x + a.$$

Ricordiamo che l'operatore unitario $e^{-iP_x a}$ corrisponde, in accordo al teorema di Wigner, alla traslazione spaziale secondo il vettore di traslazione $\tau = (a, 0, 0)$.

Verifica

Abbiamo

$$\begin{aligned} e^{iP_x a} F_x e^{-iP_x a} &= e^{iP_x a} (F_x e^{-iP_x a} - e^{-iP_x a} F_x) + e^{iP_x a} e^{-iP_x a} F_x = \\ &= e^{iP_x a} [F_x, e^{-iP_x a}] + I F_x = \end{aligned}$$

(utilizzando la relazione (3.6))

$$\begin{aligned} &= e^{iP_x a} i(-i a e^{-iP_x a}) + F_x = \\ &= a I + F_x = \\ &= F_x + a. \end{aligned}$$

□

Con lo stesso procedimento mostriamo cosa accade se la traslazione avviene lungo una direzione diversa dalla componente di \vec{F} . In questo caso si ha

$$e^{iP_y a} F_x e^{-iP_y a} = F_x.$$

La componente x dell'operatore \vec{F} rimane inalterata nella traslazione del sistema lungo l'asse y .

Verifica

Abbiamo

$$\begin{aligned} e^{iP_y a} F_x e^{-iP_y a} &= e^{iP_y a} (F_x e^{-iP_y a} - e^{-iP_y a} F_x) + e^{iP_y a} e^{-iP_y a} F_x = \\ &= e^{iP_y a} [F_x, e^{-iP_y a}] + I F_x = \end{aligned}$$

(per effetto della relazione (3.6))

$$\begin{aligned} &= e^{iP_x a} 0 (-i a e^{-iP_y a}) + F_x = \\ &= 0 + F_x = \\ &= F_x. \end{aligned}$$

□

Generalizzando, la relazione (3.5) vale quando g è una traslazione spaziale, in quanto

$$e^{iP_\alpha a} F_\beta e^{-iP_\alpha a} = F_\beta + \delta_{\alpha\beta} a.$$

Verifichiamo ora che la relazione (3.5) è soddisfatta anche quando g è una rotazione spaziale. Innanzitutto riscriviamo la (2.19), in termini dell'operatore definito in (3.4):

$$[J_\alpha, F_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_\gamma. \quad (52)$$

Se g è una rotazione di un angolo a attorno all'asse z abbiamo

$$g(\vec{F}) = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a)F_x - \sin(a)F_y \\ \sin(a)F_x + \cos(a)F_y \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Consideriamo la componente x dell'equazione; affinché sia verificata la relazione (3.5) si deve avere che

$$e^{iJ_z a} F_x e^{-iJ_z a} = F_x \cos(a) - F_y \sin(a).$$

Verifica

Per effetto della relazione (3.7), l'operatore \vec{F} definito in (3.4) verifica le proprietà del paragrafo 2.7 del capitolo 2; pertanto

$$[J_\alpha, F_\beta^n] = n F_\beta^{n-1} (i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} F_\gamma)$$

e

$$[J_\alpha, \phi(\vec{F})] = i \left\{ \frac{\partial \phi(\vec{F})}{\partial F_\beta} F_\gamma - \frac{\partial \phi(\vec{F})}{\partial F_\gamma} F_\beta \right\}, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1. \quad (53)$$

Supponendo che $\alpha = x$, $\beta = y$ e $\gamma = z$, definiamo l'operatore $\phi(\vec{F}) = \arctan \frac{F_y}{F_x}$; allora per la (3.8) si ha

$$\begin{aligned}
[J_\alpha, \phi(\vec{F})] &= i \left\{ \frac{\partial \phi(\vec{F})}{\partial F_x} F_y - \frac{\partial \phi(\vec{F})}{\partial F_y} F_x \right\} \\
&= i \left\{ \frac{-F_y}{F_x^2 + F_y^2} F_y - \frac{F_x}{F_x^2 + F_y^2} F_x \right\} \\
&= -i.
\end{aligned} \tag{54}$$

Allora, utilizzando la (3.9), otteniamo

$$\begin{aligned}
e^{iJ_z a} \phi(\vec{F}) e^{-iJ_z a} &= e^{iJ_z a} \{ \phi(\vec{F}) e^{-iJ_z a} - e^{-iJ_z a} \phi(\vec{F}) \} + e^{iJ_z a} e^{-iJ_z a} \phi(\vec{F}) \\
&= e^{iJ_z a} [\phi(\vec{F}), e^{-iJ_z a}] + \phi(\vec{F}) \\
&= -e^{iJ_z a} [e^{-iJ_z a}, \phi(\vec{F})] + \phi(\vec{F}) \\
&= -e^{iJ_z a} (-i a e^{-iJ_z a}) (-i) + \phi(\vec{F}) \\
&= a + \phi(\vec{F}).
\end{aligned} \tag{55}$$

Posto

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

si ha

$$F_x = |F| \cos \phi(\vec{F}),$$

e

$$F_y = |F| \sin \phi(\vec{F}).$$

Utilizzando la relazione (3.8) quando $\phi(\vec{F}) = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ si ha :

$$[J_z, F_x^2 + F_y^2] = i(2F_x F_y - 2F_y F_x) = 0.$$

Allo stesso modo, se

$$\phi(\vec{F}) = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

vale la seguente relazione

$$\left[J_z, \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \right] = 0. \tag{56}$$

Dunque,

$$e^{iJ_z a} F_x e^{-iJ_z a} = e^{iJ_z a} |F| \cos \phi(\vec{F}) e^{-iJ_z a} =$$

(per effetto della relazione (3.11))

$$= |F| e^{iJ_z a} \cos \phi(\vec{F}) e^{-iJ_z a} =$$

(utilizzando la (3.10) e poichè $e^{iJ_z a} f(\phi) e^{-iJ_z a} = f(\phi + a)$)

$$\begin{aligned} &= |F| \cos(\phi(\vec{F}) + a) = |F| \cos \phi(\vec{F}) \cos a - |F| \sin \phi(\vec{F}) \sin a = \\ &= F_x \cos a - F_y \sin a. \end{aligned}$$

□

Allo stesso modo si può verificare la validità dell'equazione per le altre coppie di componenti.

Procediamo ora, dimostrando la relazione (3.5) nel caso in cui consideriamo una generica trasformazione del gruppo di Euclide.

Sappiamo che \mathcal{E} è un gruppo di trasformazioni di simmetria; indicati con H_1, H_2, H_3 i sottogruppi di \mathcal{E} delle traslazioni spaziali lungo gli assi x, y, z rispettivamente e con H_4, H_5, H_6 i sottogruppi delle rotazioni spaziali attorno agli assi x, y, z rispettivamente, allora una generica trasformazione $g \in \mathcal{E}$ è individuata da una sestupla $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$, secondo la notazione utilizzata nel paragrafo 2.4 capitolo 2:

$$g \equiv g(\underline{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_6) = h_1(x_1)h_2(x_2)\dots h_6(x_6).$$

Per il teorema di Wigner, tale relazione può essere riscritta come

$$e^{if(\underline{x})} U_{g(x_1, x_2, \dots, x_6)} = U_{h_1(x_1)} U_{h_2(x_2)} \dots U_{h_6(x_6)}.$$

Per dimostrare la relazione (3.5) vediamo innanzitutto come una generica trasformazione del gruppo di Euclide agisce sugli operatori che compongono \vec{F} .

Calcoliamo $g(\vec{F})$:

$$g(\vec{F}) = h_1(x_1)h_2(x_2)h_3(x_3)h_4(x_4)h_5(x_5)h_6(x_6)(\vec{F}).$$

Allora

$$\begin{aligned} h_6(x_6) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_x \cos x_6 - F_y \sin x_6 \\ F_x \sin x_6 + F_y \cos x_6 \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{bmatrix}, \\ h_5(x_5) \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F'_x \cos x_5 + F'_z \sin x_5 \\ F'_y \\ -F'_x \sin x_5 + F'_z \cos x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F''_x \\ F''_y \\ F''_z \end{bmatrix}, \\ h_4(x_4) \begin{bmatrix} F''_x \\ F''_y \\ F''_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F''_x \\ F''_y \cos x_4 - F''_z \sin x_4 \\ F''_y \sin x_4 + F''_z \cos x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'''_x \\ F'''_y \\ F'''_z \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3(x_3) \begin{bmatrix} F_x''' \\ F_y''' \\ F_z''' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_x''' \\ F_y''' \\ F_z''' + x_3 \end{bmatrix}, \\
h_2(x_2) \begin{bmatrix} F_x''' \\ F_y''' \\ F_z''' + x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_x''' \\ F_y''' + x_2 \\ F_z''' + x_3 \end{bmatrix}, \\
h_1(x_1) \begin{bmatrix} F_x''' \\ F_y''' + x_2 \\ F_z''' + x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_x''' + x_1 \\ F_y''' + x_2 \\ F_z''' + x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Allora, affinchè valga la relazione (3.5) per una trasformazione generica del gruppo di Euclide, dobbiamo verificare che essa vale per ogni componente di \vec{F} . Per la componente x si ha

$$\begin{aligned}
&e^{iJ_z x_6} e^{iJ_y x_5} e^{iJ_x x_4} e^{iP_z x_3} e^{iP_y x_2} e^{iP_x x_1} F_x e^{-iP_x x_1} e^{-iP_y x_2} e^{-iP_z x_3} e^{-iJ_x x_4} e^{-iJ_y x_5} e^{-iJ_z x_6} = \\
&= (F_x \cos x_6 - F_y \sin x_6) \cos x_5 + F_z \sin x_5 + x_1.
\end{aligned}$$

Verifica

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
&e^{iP_x x_1} F_x e^{-iP_x x_1} = F_x + x_1, \\
&e^{iP_y x_2} (F_x + x_1) e^{-iP_y x_2} = e^{iP_y x_2} F_x e^{-iP_y x_2} + x_1 = F_x + x_1, \\
&e^{iP_z x_3} (F_x + x_1) e^{-iP_z x_3} = e^{iP_z x_3} F_x e^{-iP_z x_3} + x_1 = F_x + x_1, \\
&e^{iJ_x x_4} (F_x + x_1) e^{-iJ_x x_4} = e^{iJ_x x_4} F_x e^{-iJ_x x_4} + x_1 = F_x + x_1, \\
&e^{iJ_y x_5} (F_x + x_1) e^{-iJ_y x_5} = e^{iJ_y x_5} F_x e^{-iJ_y x_5} + x_1 = F_x \cos x_5 + F_z \sin x_5 + x_1, \\
&e^{iJ_z x_6} (F_x \cos x_5 + F_z \sin x_5 + x_1) e^{-iJ_z x_6} = (e^{iJ_z x_6} F_x e^{-iJ_z x_6}) \cos x_5 + F_z \sin x_5 + x_1 = \\
&= (F_x \cos x_6 - F_y \sin x_6) \cos x_5 + F_z \sin x_5 + x_1.
\end{aligned}$$

□

Allo stesso modo si verifica che la (3.5) vale per le altre componenti.

3.3. Una dimostrazione alternativa.

Mostriamo ora che è possibile verificare la relazione (3.5), quando la trasformazione di simmetria $g \in \mathcal{E}$ è una rotazione spaziale, procedendo con una *dimostrazione alternativa*. Considerando la componente y della terna di operatori autoaggiunti \vec{F} e la componente x del generatore hermitiano delle rotazioni spaziali, dobbiamo verificare la seguente identità:

$$e^{iJ_x a} F_y e^{-iJ_x a} = F_y \cos a - F_z \sin a. \quad (57)$$

Verifica

La validità della relazione (3.12) può essere dimostrata riscrivendo la stessa relazione, tramite lo sviluppo in serie di Taylor:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iJ_x a)^j}{j!} F_y = \left\{ F_y \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a^{2j}}{(2j)!} \right) - F_z \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{a^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \right\} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iJ_x a)^j}{j!}.$$

Verifichiamo dunque tale relazione, verificando l'uguaglianza dei termini dello stesso ordine in a .

Per $j = 0$ l'uguaglianza è banalmente soddisfatta:

$$F_y = F_y.$$

Per $j = 1$ la condizione è:

$$iJ_x a F_y = F_y a iJ_x - F_z a;$$

Essa è soddisfatta per effetto della proprietà 2.3

$$i(iF_z + F_y J_x) = iF_y J_x - F_z$$

$$iF_y J_x - F_z = iF_y J_x - F_z.$$

Per $j = 2$ la condizione è:

$$\frac{i^2 a^2 J_x^2}{2!} F_y = F_y \left(\frac{i^2 a^2 J_x^2}{2!} \right) - F_y \frac{a^2}{2!} \left(\frac{i^0 a^0 J_x^0}{0!} \right) - F_z a \left(\frac{ia J_x}{1!} \right), \quad \text{cioè}$$

$$\frac{i^2 a^2}{2!} J_x^2 F_y = \frac{-a^2}{2!} F_y + \frac{i^2 a^2}{2!} F_y J_x^2 - a^2 i F_z J_x,$$

tramite la proprietà 2.3 otteniamo infatti un'identità:

$$F_y + 2iF_z J_x + F_y J_x^2 = F_y + 2iF_z J_x + F_y J_x^2.$$

Ora distinguiamo due casi distinti, $j = n$ pari e $j = n$ dispari, e verifichiamo l'identità sfruttando le relazioni (2.27) e (2.28).

Per $j = n$ pari, la condizione da soddisfare è:

$$\begin{aligned} \frac{(iaJ_x)^n}{n!} F_y &= F_y \left(\frac{i^n a^n J_x^n}{n!} \right) - F_y \frac{a^2}{2!} \left(\frac{i^{n-2} a^{n-2} J_x^{n-2}}{(n-2)!} \right) + F_y \frac{a^4}{4!} \left(\frac{i^{n-4} a^{n-4} J_x^{n-4}}{(n-4)!} \right) + \dots + \\ &+ (-1)^n F_y \frac{a^n}{n!} \left(\frac{i^0 a^0 J_x^0}{0!} \right) - F_z a \left(\frac{i^{n-1} a^{n-1} J_x^{n-1}}{(n-1)!} \right) + F_z \frac{a^3}{3!} \left(\frac{i^{n-3} a^{n-3} J_x^{n-3}}{(n-3)!} \right) + \dots + \\ &+ (-1)^n F_z \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{iaJ_x}{1!} \right). \end{aligned}$$

Sostituendo la relazione (2.28) si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{(ia)^n}{n!} \left\{ \binom{n}{0} F_y + \dots + \binom{n}{n-4} F_y J_x^{n-4} + \binom{n}{n-2} F_y J_x^{n-2} + \binom{n}{n} F_y J_x^n \right\} + \\ &+ \frac{(ia)^n}{n!} \left\{ \binom{n}{1} i F_z J_x + \dots + \binom{n}{n-3} i F_z J_x^{n-3} + \binom{n}{n-1} i F_z J_x^{n-1} \right\} = \\ &= \frac{a^n i^n}{n!} F_y J_x^n - \frac{a^n i^{n-2}}{(n-2)! 2!} F_y J_x^{n-2} + \frac{a^n i^{n-4}}{(n-4)! 4!} F_y J_x^{n-4} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} F_y - \frac{a^n i^{n-1}}{(n-1)!} F_z J_x^{n-1} + \\ &+ \frac{a^n i^{n-3}}{(n-3)! 3!} F_z J_x^{n-3} + \dots + (-1)^n \frac{a^n i}{(n-1)!} F_z J_x. \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} &\frac{i^n a^n}{n!} F_y + \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-4)! 4!} F_y J_x^{n-4} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-2)! 2!} F_y J_x^{n-2} + \frac{i^n a^n}{n!} F_y J_x^n + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} i F_z J_x + \\ &+ \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-3)! 3!} i F_z J_x^{n-3} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} i F_z J_x^{n-1} = \frac{a^n i^n}{n!} F_y J_x^n - \frac{a^n i^{n-2}}{(n-2)! 2!} F_y J_x^{n-2} + \\ &+ \frac{a^n i^{n-4}}{(n-4)! 4!} F_y J_x^{n-4} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} F_y - \frac{a^n i^{n-1}}{(n-1)!} F_z J_x^{n-1} + \frac{a^n i^{n-3}}{(n-3)! 3!} F_z J_x^{n-3} + \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{a^n i}{(n-1)!} F_z J_x. \end{aligned}$$

Allora otteniamo l'identità seguente:

$$\begin{aligned} &\frac{i^n a^n}{n!} F_y + \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-4)! 4!} F_y J_x^{n-4} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-2)! 2!} F_y J_x^{n-2} + \frac{i^n a^n}{n!} F_y J_x^n + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} i F_z J_x + \\ &+ \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-3)! 3!} i F_z J_x^{n-3} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} i F_z J_x^{n-1} = \frac{a^n i^n}{n!} F_y J_x^n + i^2 \frac{a^n i^{n-2}}{(n-2)! 2!} F_y J_x^{n-2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i^4 \frac{a^n i^{n-4}}{(n-4)!4!} F_y J_x^{n-4} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} F_y + i^2 \frac{a^n i^{n-1}}{(n-1)!} F_z J_x^{n-1} + i^4 \frac{a^n i^{n-3}}{(n-3)!3!} F_z J_x^{n-3} + \dots + \\
& + (-1)^n \frac{a^n i}{(n-1)!} F_z J_x.
\end{aligned}$$

Per $j = n$ dispari, la condizione da soddisfare è:

$$\begin{aligned}
\frac{(iaJ_x)^n}{n!} F_y &= F_y \left(\frac{i^n a^n J_x^n}{n!} \right) - F_y \frac{a^2}{2!} \left(\frac{i^{n-2} a^{n-2} J_x^{n-2}}{(n-2)!} \right) + F_y \frac{a^4}{4!} \left(\frac{i^{n-4} a^{n-4} J_x^{n-4}}{(n-4)!} \right) + \dots + \\
& + (-1)^{n-1} F_y \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{iaJ_x}{1!} \right) - F_z a \left(\frac{i^{n-1} a^{n-1} J_x^{n-1}}{(n-1)!} \right) + F_z \frac{a^3}{3!} \left(\frac{i^{n-3} a^{n-3} J_x^{n-3}}{(n-3)!} \right) + \dots + \\
& + (-1)^n F_z \frac{a^n}{n!} \left(\frac{i^0 a^0 J_x^0}{0!} \right).
\end{aligned}$$

Sostituendo la relazione (2.27) si ha:

$$\begin{aligned}
& \frac{(ia)^n}{n!} \left\{ \binom{n}{1} F_y J_x + \dots + \binom{n}{n-4} F_y J_x^{n-4} + \binom{n}{n-2} F_y J_x^{n-2} + \binom{n}{n} F_y J_x^n \right\} + \\
& + \frac{(ia)^n}{n!} \left\{ \binom{n}{0} i F_z + \dots + \binom{n}{n-3} i F_z J_x^{n-3} + \binom{n}{n-1} i F_z J_x^{n-1} \right\} = \\
& = \frac{a^n i^n}{n!} F_y J_x^n - \frac{a^n i^{n-2}}{(n-2)!2!} F_y J_x^{n-2} + \frac{a^n i^{n-4}}{(n-4)!4!} F_y J_x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a^n i}{(n-1)!} F_y J_x - \frac{a^n i^{n-1}}{(n-1)!} F_z J_x^{n-1} + \\
& + \frac{a^n i^{n-3}}{(n-3)!3!} F_z J_x^{n-3} + \dots + (-1)^n \frac{a^n}{n!} F_z.
\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}
& \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} F_y J_x + \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-4)!4!} F_y J_x^{n-4} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-2)!2!} F_y J_x^{n-2} + \frac{i^n a^n}{n!} F_y J_x^n + \frac{i^n a^n}{n!} i F_z + \\
& + \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-3)!3!} i F_z J_x^{n-3} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} i F_z J_x^{n-1} = \frac{a^n i^n}{n!} F_y J_x^n - \frac{a^n i^{n-2}}{(n-2)!2!} F_y J_x^{n-2} + \\
& + \frac{a^n i^{n-4}}{(n-4)!4!} F_y J_x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a^n i}{(n-1)!} F_y J_x - \frac{a^n i^{n-1}}{(n-1)!} F_z J_x^{n-1} + \frac{a^n i^{n-3}}{(n-3)!3!} F_z J_x^{n-3} + \dots + \\
& + (-1)^n \frac{a^n}{n!} F_z.
\end{aligned}$$

Allora otteniamo l'identità:

$$\frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} F_y J_x + \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-4)!4!} F_y J_x^{n-4} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-2)!2!} F_y J_x^{n-2} + \frac{i^n a^n}{n!} F_y J_x^n + \frac{i^n a^n}{n!} i F_z +$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-3)!3!} i F_z J_x^{n-3} + \frac{i^n a^n}{n!} \frac{n!}{(n-1)!} i F_z J_x^{n-1} = \frac{a^n i^n}{n!} F_y J_x^n + i^2 \frac{a^n i^{n-2}}{(n-2)!2!} F_y J_x^{n-2} + \\
& + i^4 \frac{a^n i^{n-4}}{(n-4)!4!} F_y J_x^{n-4} + \dots + i^4 (-1)^{n-1} \frac{a^n i}{(n-1)!} F_y J_x + i^2 \frac{a^n i^{n-1}}{(n-1)!} F_z J_x^{n-1} + i^4 \frac{a^n i^{n-3}}{(n-3)!3!} F_z J_x^{n-3} + \dots + \\
& \qquad \qquad \qquad + (-1)^n \frac{a^n}{n!} F_z.
\end{aligned}$$

□

3.4. Applicazione del teorema di Mackey al gruppo di Galilei.

In questo paragrafo mostreremo come ottenere un teorema di rappresentazione del gruppo di Galilei \mathcal{G} tramite il teorema di Mackey. Ciò permetterà di individuare tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Galilei.

Se $g \rightarrow U_g$ è una qualunque rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei \mathcal{G} sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , possiamo affermare che esistono 9 generatori hermitiani $P_x, P_y, P_z, J_x, J_y, J_z, G_x, G_y, G_z$, e un numero reale μ tali che:

$$\begin{aligned}
[J_\alpha, P_\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma, \\
[J_\alpha, G_\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma, \\
[J_\alpha, J_\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma, \\
[P_\alpha, P_\beta] &= 0, \\
[G_\alpha, G_\beta] &= 0, \\
[G_\alpha, P_\beta] &= i\delta_{\alpha\beta}\mu.
\end{aligned}$$

Ora, data la terna di operatori autoaggiunti definiti in (3.4):

$$\vec{F} = \frac{\vec{G}}{\mu},$$

abbiamo verificato che essa soddisfa, per ogni $g \in \mathcal{E}$, la seguente relazione

$$U_g^{-1} \vec{F} U_g = g(\vec{F}).$$

La terna di operatori \vec{F} , o equivalentemente la misura spettrale di \mathbf{R}^3 , $\Delta \rightarrow E(\Delta)$ associata ad essa, costituisce allora un sistema di imprimitività relativo alla rappresentazione proiettiva $g \rightarrow U_g$ $g \in \mathcal{E}$ del gruppo di Euclide \mathcal{E} , ottenuta restringendo a \mathcal{E} la rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei \mathcal{G} . Ciò permette di applicare il teorema di Mackey generalizzato, ottenendo il seguente teorema di rappresentazione.

Teorema di rappresentazione del gruppo di Galilei

Sia

$$U : \mathcal{G} \rightarrow U(\mathcal{H})$$

una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei \mathcal{G} , con generatori hermitiani

$P_x, P_y, P_z, J_x, J_y, J_z, G_x, G_y, G_z$, caratterizzata dalla regola $[G_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}\mu$.

Allora la restrizione a \mathcal{E} di $U : \mathcal{G} \rightarrow U(\mathcal{H})$ è unitariamente equivalente a una rappresentazione proiettiva di \mathcal{E} indotta da una rappresentazione proiettiva

$$D : SO(3) \rightarrow U(\mathcal{H}_0),$$

dove

$$\vec{F} = \frac{\vec{G}}{\mu} = (F_\alpha, F_\beta, F_\gamma).$$

La terna di operatori autoaggiunti \vec{F} nella rappresentazione indotta è definita da

$$(F_\alpha f)(\vec{x}) = x_\alpha f(\vec{x}).$$

Pertanto, tutti i generatori delle Rappresentazioni proiettive di \mathcal{G} sono identificati nella rappresentazione indotta di \mathcal{E} individuata:

$$\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3, \mathcal{H}_0);$$

$$(P_\alpha \psi)(\vec{x}) = -i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi(\vec{x});$$

$$(G_\alpha \psi)(\vec{x}) = \left(\frac{1}{\mu} F_\alpha \psi \right) (\vec{x}) = \frac{x_\alpha}{\mu} \psi(\vec{x}).$$

Il teorema di rappresentazione così ottenuto vale per ogni sistema quantistico per il quale \mathcal{G} è un gruppo di trasformazioni di Simmetria Quantistiche. Esso permette di individuare il tipo di spazio di Hilbert per formulare la teoria quantistica di un tale sistema e di individuare concretamente i generatori hermitiani e quindi la rappresentazione proiettiva.

Per esplicitare completamente la teoria del sistema occorre identificare gli operatori corrispondenti alle osservabili del sistema. Naturalmente, questi dipendono dal sistema specifico considerato. Ogni sistema specifico è caratterizzato da una specifica famiglia di osservabili, in generale diversa per diversi sistemi. Pertanto, per esplicitare completamente la teoria bisogna essere in grado, per il sistema specifico considerato, di specificare concretamente la specifica famiglia di operatori corrispondenti alle osservabili del sistema.

3.5. La Teoria Meccanica Quantistica non Relativistica di una particella localizzabile.

La locuzione "particella puntiforme libera localizzabile in \mathbf{R}^3 " indica un sistema quantistico localizzabile in un punto di \mathbf{R}^3 : il sistema possiede 3 osservabili Q_x, Q_y, Q_z , interpretate come le tre coordinate della posizione, e altre tre osservabili V_x, V_y, V_z interpretate come le tre componenti della velocità.

La interpretazione induce la validità delle seguenti regole di commutazione

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0, \quad [V_\alpha, V_\beta] = 0.$$

L'aggettivo "libera" indica che il sistema non interagisce con il resto dell'universo fisico, e pertanto, in una teoria non relativistica, il gruppo di Galilei costituisce un gruppo di trasformazioni di simmetria. Questo implica, per il teorema di Wigner, che sullo spazio di Hilbert della teoria quantistica del sistema, debba essere definita una rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei, che oltre alle regole di commutazione valide per ogni rappresentazione proiettiva del gruppo di Galilei, deve soddisfare delle relazioni di covarianza che riflettono l'azione delle trasformazioni su posizione e velocità.

Indichiamo con Q_α e V_α , $\alpha = x, y, z$, gli operatori che compongono l'operatore posizione \vec{Q} e l'operatore velocità \vec{V} .

Sia

$$g = g^{\vec{r}} g^R g^{\vec{u}} = g^{\tau^x} g^{\tau^y} g^{\tau^z} R_\alpha^x R_\beta^y R_\gamma^z g^{u_x} g^{u_y} g^{u_z}$$

una trasformazione del gruppo di Galilei \mathcal{G} , allora le relazioni di covarianza per gli operatori posizione e velocità si esprimono nel seguente modo:

$$\vec{Q}' = g_{\vec{Q}}^{-1}(\vec{Q}) = U_g \vec{Q} U_g^{-1} \quad (58)$$

$$\vec{V}' = g_{\vec{V}}^{-1}(\vec{V}) = U_g \vec{V} U_g^{-1} \quad (59)$$

Le relazioni (4.1) e (4.2) ci permettono di determinare le regole di commutazione tra i generatori delle trasformazioni di Galilei e gli operatori corrispondenti alle osservabili posizione e velocità della particella.

Esempio 4.1

Supponiamo di voler determinare la regola di commutazione $[Q_\alpha, P_\beta]$ tra l'operatore autoaggiunto Q_α , che rappresenta la componente α dell'osservabile posizione, e il generatore hermitiano P_β corrispondente alla coordinata β delle traslazioni spaziali.

Sia $g = g^{\tau_a^\beta}$ la traslazione spaziale di un valore a lungo x_β , allora $U_{g^{\tau_a^\beta}} = e^{-iP_\beta a}$.
La relazione (4.1) diventa

$$Q'_\alpha = g_Q^{-1}(Q_\alpha) = {}^9Q_\alpha - \delta_{\alpha\beta}a = e^{-iP_\beta a}Q_\alpha e^{iP_\beta a}.$$

Sviluppiamo il secondo membro di questa uguaglianza arrestandolo al primo ordine in a

$$\begin{aligned} Q_\alpha - \delta_{\alpha\beta}a &= (I - iP_\beta a + o_1(a))Q_\alpha(I + iP_\beta a + o_2(a)) \\ &= Q_\alpha - iP_\beta Q_\alpha a + iQ_\alpha P_\beta a + o_3(a) \\ &= Q_\alpha - i[P_\beta, Q_\alpha]a + o_3(a). \end{aligned} \tag{60}$$

Uguagliando i termini del primo ordine in a della relazione (4.3) otteniamo

$$[Q_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}.$$

Procedendo come nell'esempio 4.1 riusciamo a determinare tutte le regole di commutazione tra i generatori hermitiani e gli operatori rappresentanti le osservabili posizione e velocità:

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, P_\beta] &= i\delta_{\alpha\beta}; \\ [J_\alpha, Q_\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma; \\ [J_\alpha, V_\beta] &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}V_\gamma; \\ [G_\alpha, Q_\beta] &= 0; \\ [P_\alpha, V_\beta] &= 0; \\ [G_\alpha, V_\beta] &= i\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Proprietà 4.1

Se con G_α abbiamo indicato i generatori hermitiani dei boost del gruppo di Galilei e con V_α gli operatori autoaggiunti corrispondenti alle osservabili velocità allora vale:

$$[G_\alpha, V_\alpha^n] = inV_\alpha^{n-1}.$$

Dimostrazione

⁹Osserviamo che la trasformazione di Galilei $g = g^{\tau_a^\beta}$, che in tal caso è una traslazione di un fattore a lungo l'asse β , agisce sull'operatore posizione Q_α solo se esso è la componente dell'operatore del medesimo asse, ovvero solo se $\alpha = \beta$

Dimostriamo la relazione per induzione su n :

$n = 1$ Poichè sappiamo che vale la regola di commutazione $[G_\alpha, V_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}$ allora

$$[G_\alpha, V_\alpha] = i.$$

Supponendo che la relazione sia soddisfatta per $(n - 1)$

$$[G_\alpha, V_\alpha^{n-1}] = inV_\alpha^{n-2},$$

dimostriamone la validità per n :

$$\begin{aligned} [G_\alpha, V_\alpha^n] &= [G_\alpha, V_\alpha^{n-1}]V_\alpha + V_\alpha^{n-1}[G_\alpha, V_\alpha] = (n-1)iV_\alpha^{n-2}V_\alpha + V_\alpha^{n-1}i = \\ &= niV_\alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

□

3.6. Particelle senza spin.

Ora faremo vedere che, tramite le proprietà strutturali, consistenti nelle regole di commutazione tra i generatori hermitiani, del gruppo di Galilei e le regole di commutazione trovate, si riesce ad ottenere l'identificazione tra osservabili e operatori per una particella localizzabile libera corrispondente alla rappresentazione proiettiva di dimensione 1 di $SO(3)$, cioè

$$\begin{aligned} D_0 &: SO(3) \rightarrow U(\mathbf{C}) \\ R &\rightarrow D_0(R) = e^{if(R)}. \end{aligned}$$

La teoria conseguente risulterà coincidere con l'usuale meccanica quantistica di una particella di spin 0. L'identificazione degli operatori posizione e velocità non sarà postulata, ma sarà il risultato di proprietà di simmetria e covarianza del gruppo di Galilei \mathcal{G} .

Abbiamo visto nel capitolo precedente, come risultato del teorema di Mackey, che ogni rappresentazione proiettiva irriducibile del gruppo di Galilei, caratterizzata da un dato valore del parametro μ , è equivalente ad una rappresentazione indotta da una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni $SO(3)$.

Se consideriamo la possibilità più semplice, $\mathcal{H}_0 = \mathbf{C}$, tra tutte le rappresentazioni proiettive irriducibili del gruppo delle rotazioni troviamo la rappresentazione di dimensione 1:

$$\begin{aligned} D_0 &: SO(3) \rightarrow U(\mathbf{C}) \\ R &\rightarrow I \equiv 1. \end{aligned}$$

Ogni altra rappresentazione proiettiva di dimensione 1, $D_0^f(R) = e^{if(R)}$, è riconducibile banalmente a D_0 , moltiplicando $D_0^f(R)$ per $e^{-if(R)}$.

Allora lo spazio di Hilbert sarà $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3, \mathbf{C})$. Per effetto del teorema di Mackey, abbiamo visto che la terna di operatori autoaggiunti $\vec{F} = \frac{\vec{G}}{\mu}$, nella rappresentazione indotta, ha la seguente espressione

$$(F_\alpha f)(\vec{x}) = x_\alpha f(\vec{x}).$$

Di conseguenza, si ha che la terna di generatori hermitiani \vec{P} rappresentanti le traslazioni spaziali assume la forma

$$(P_\alpha f)(\vec{x}) = -i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^\alpha}.$$

Dimostriamo che in questo caso tanto gli operatori \vec{F} che gli operatori \vec{P} , formano un sistema *completo*.

Definizione 4.1

Una famiglia di operatori autoaggiunti commutanti $\{T_k\}$ di uno spazio di Hilbert è detta *completa* se accade che, per ogni operatore A , tale che $[A, T_k] = 0, \forall k$, esiste una funzione ϕ tale che $A = \phi(T_1, T_2, \dots)$.

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 4.1

Sia F l'operatore autoaggiunto dello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R})$ che agisce come operatore di moltiplicazione:

$$(F\psi)(x) = x\psi(x). \tag{61}$$

Se un operatore A commuta con F , $[A, F] = 0$, allora esiste una funzione $\phi(x)$ per cui $A = \phi(F)$.

Se prescindiamo dalle condizioni sui domini di definizione degli operatori, possiamo argomentare come segue.

Sia dato un vettore $\psi(x)$ su cui è definito A ; fissato un qualunque vettore $\psi_0(x)$ non identicamente nullo, possiamo scrivere

$$\psi(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_0(x)} \psi_0(x) = \varphi(x) \psi_0(x).$$

Definiamo un operatore B la cui azione su un vettore f è definita da

$$(Bf)(x) = \varphi(x) f(x).$$

In virtù della (4.4) si ha che

$$B = \varphi(F). \quad (62)$$

Poichè, per ipotesi, A commuta con F , allora commuta anche con B , per effetto della (4.5),

$$[A, B] = 0. \quad (63)$$

Vediamo come l'operatore A agisce su $\psi(x)$.

Posto $A\psi_0(x) = \varphi_0(x)$, si ha

$$A\psi(x) = A[\varphi(x)\psi_0(x)] = AB\psi_0(x) = BA\psi_0(x) = B\varphi_0(x) = \varphi(x)\varphi_0(x) = \varphi_0(x)\varphi(x).$$

Quindi

$$A\psi(x) = \varphi_0(x)\varphi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}\psi(x).$$

Esiste dunque $\phi(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}$ funzione fissata, per cui

$$A\psi(x) = \phi(x)\psi(x).$$

Per la (4.4), otteniamo

$$A = \phi(F).$$

□

Questo argomento non è la dimostrazione in senso tecnico, che più elaborata si può trovare in letteratura[11].

Il teorema 4.1 può essere generalizzato:

TEOREMA 4.2

Sia $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3)$. La famiglia degli operatori di moltiplicazione F_x, F_y, F_z è completa.

Si può dimostrare, sfruttando la proprietà dell'operatore di Fourier Plancherel, che anche la famiglia di osservabili, descritta dagli operatori $\{P_\alpha\}$, è completa.

Possiamo individuare esplicitamente ora quali operatori descrivono le osservabili posizione e velocità nello spazio di Hilbert. Occorre innanzitutto la seguente proprietà.

Proprietà 4.2

Le osservabili \mathcal{F} e \mathcal{P} , che nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3)$ sono descritte rispettivamente dagli operatori autoaggiunti \vec{F} e \vec{P} , non sono commisurabili¹⁰. Tali operatori, che per ogni $\psi(x) \in \mathcal{H}$ sono della forma

$$\begin{aligned}(F_\alpha\psi)(\vec{x}) &= x_\alpha\psi(\vec{x}) \\ (P_\alpha\psi)(\vec{x}) &= -i\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial x_\alpha},\end{aligned}$$

non commutano, ovvero si verifica

$$[F, P] = i \neq 0.$$

Verifica

Prendiamo il commutatore $[F, P]$ tra i due operatori autoaggiunti e mostriamo come esso agisce su una funzione d'onda $\psi(x)$ nello spazio di Hilbert.

Sia

$$\begin{aligned}\{[F, P]\psi\}(x) &= (FP\psi)(x) - (PF\psi)(x) \\ &= x \cdot \left(-i\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right) - \left(-i\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) + x\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right)\right) \\ &= -ix\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} + i\psi(x) + ix\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} \\ &= i\psi(x).\end{aligned}\tag{64}$$

Dunque, per la (4.7) si ha che

$$[F, P] = i \neq 0.$$

Nel caso più generale in cui $\mathcal{H} = L_2(\mathbf{R}^3)$, si ha che $[F_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}$.

¹⁰Nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , due osservabili \mathcal{A} e \mathcal{B} , descritte dagli operatori autoaggiunti A e B , sono commisurabili se e solo se i due operatori A e B commutano.

Osservazione 4.1

Poichè entrambe le terne di operatori autoaggiunti \vec{F} e \vec{P} sono sistemi completi, se esiste un operatore C che commuta con ogni componente di F_α e P_α , cioè se

$$[C, F_\alpha] = [C, P_\alpha] = 0 \quad \forall \alpha,$$

C sarà dunque funzione di \vec{F} e \vec{P} . Ma in virtù della proprietà 4.2 questo può accadere solo se l'operatore C è costante, ovvero

$$C = cI \quad c \in \mathbf{C}.$$

In altre parole, il sistema $\{\vec{F}, \vec{P}\}$ è *irriducibile*.

Mostriamo com'è possibile determinare esplicitamente gli operatori Q_α con $\alpha = x, y, z$ e V_α con $\alpha = x, y, z$ tramite le regole di commutazione tra quest'ultimi e i generatori delle trasformazioni di simmetria del gruppo di Galilei. Consideriamo le due relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [F_\alpha, P_\beta] &= i\delta_{\alpha\beta}, \\ [Q_\alpha, P_\beta] &= i\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Sottraendo le due equazioni troviamo

$$[F_\alpha - Q_\alpha, P_\beta] = 0. \quad (65)$$

Inoltre

$$[F_\alpha, Q_\beta] = [G_\alpha/\mu, Q_\beta] = 0,$$

e

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = 0.$$

Sottraendo queste due equazioni si ha

$$[F_\alpha - Q_\alpha, Q_\beta] = 0. \quad (66)$$

Dalla (4.8) e (4.9) si ha

$$F_\alpha - Q_\alpha = c_\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbf{C}.$$

Mostriamo che tale costante complessa deve essere zero. Consideriamo il commutatore

$$[J_\alpha, F_\beta - Q_\beta] = [J_\alpha, c_\beta] = 0.$$

Ma possiamo anche riscrivere lo stesso commutatore come

$$[J_\alpha, F_\beta - Q_\beta] = [J_\alpha, F_\beta] - [J_\alpha, Q_\beta] =$$

$$= [J_\alpha, G_\beta/\mu] - [J_\alpha, Q_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{G_\gamma}{\mu} - i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_\gamma = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} (F_\gamma - Q_\gamma).$$

Quindi, affinché tale commutatore sia zero, $F_\gamma - Q_\gamma = c_\gamma = 0$. Allora, in generale

$$\begin{aligned} F_\alpha - Q_\alpha &= c_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = x, y, z \\ Q_\alpha &= F_\alpha. \end{aligned} \tag{67}$$

Dunque l'espressione per l'operatore corrispondente alle osservabili posizione sarà

$$(Q_\alpha f)(\vec{x}) = x_\alpha f(\vec{x}).$$

Vediamo ora come identificare gli operatori velocità. Consideriamo le due seguenti relazioni di commutazione, tenendo presente che vale la (4.10)

$$\begin{aligned} [G_\alpha, V_\beta] &= [\mu Q_\alpha, V_\beta] = [Q_\alpha, \mu V_\beta] = i\delta_{\alpha\beta}, \\ [Q_\alpha, P_\beta] &= i\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Sottraendo le due relazioni troviamo

$$[Q_\alpha, P_\beta - \mu V_\beta] = 0. \tag{68}$$

Inoltre sappiamo che

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0$$

e

$$[P_\alpha, \mu V_\beta] = \mu [P_\alpha, V_\beta] = 0.$$

Sottraendo queste ultime due relazioni troviamo

$$[P_\alpha, P_\beta - \mu V_\beta] = 0. \tag{69}$$

Dunque dalle (4.11) e (4.12) otteniamo

$$P_\beta - \mu V_\beta = d_\beta, \quad d_\beta \in \mathbf{C}.$$

Si può verificare che tale costante complessa è zero, prendendo il commutatore

$$[J_\alpha, P_\beta - \mu V_\beta] = [J_\alpha, d_\beta] = 0.$$

Tale commutatore può anche essere decomposto come

$$[J_\alpha, P_\beta - \mu V_\beta] = [J_\alpha, P_\beta] - \mu [J_\alpha, V_\beta] =$$

$$= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}P_\gamma - \mu i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}V_\gamma = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(P_\gamma - \mu V_\gamma) = 0.$$

Poichè il commutatore deve essere zero, dobbiamo avere necessariamente

$$(P_\gamma - \mu V_\gamma) = d_\gamma = 0.$$

Allora, in generale

$$\begin{aligned} P_\alpha - \mu V_\alpha &= d_\alpha = 0 \quad \forall \alpha = x, y, z \\ V_\alpha &= \frac{P_\alpha}{\mu}. \end{aligned} \tag{70}$$

Allora l'espressione per l'operatore velocità sarà

$$(V_\alpha f)(\vec{x}) = -\frac{i}{\mu} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^\alpha}.$$

3.7. Evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e lo schema di Heisenberg.

I sistemi fisici evolvono nel tempo; le regole che governano tale evoluzione costituiscono la teoria dinamica.

Per descrivere la dinamica del sistema quantistico assumiamo innanzitutto che esso mantiene la sua identità con il passare del tempo. Questa assunzione implica che, la struttura matematica costituita dallo spazio di Hilbert e dagli operatori necessari per formulare la teoria, non si altera con lo scorrere del tempo. La nostra trattazione riguarda sistemi per cui vale questa condizione.

Supponiamo che il sistema sia descritto all'istante $t_0 = 0$ da un proiettore di rango 1:

$$P = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

ma che la misurazione di un'osservabile \mathcal{A} avvenga ad un istante successivo t .

Nel frattempo, in accordo con la nostra assunzione il sistema mantiene la propria identità. All'istante t avviene la misurazione di \mathcal{A} rappresentata dall'operatore A . Non si può escludere che i risultati delle misurazioni effettuate al tempo t siano gli stessi di quelli che si "sarebbero" ottenuti al tempo $t_0 = 0$. Questo implica una possibile variazione dei valori di aspettazione, e dunque dello stato quantistico.

Se al tempo $t = 0$ lo stato quantistico è descritto dal proiettore P , al tempo t generico in cui si effettua la misurazione di \mathcal{A} lo stato quantistico sarà descritto da un

eventualmente diverso proiettore di rango 1, P_t , generato dal vettore di stato $|\psi_t\rangle$. Al tempo t generico, secondo lo schema di Schroedinger, la misurazione di un'osservabile \mathcal{A} , per il teorema 1.1, dovrà essere consistente col valore d'aspettazione:

$$v_t(\mathcal{A}) = Tr(P_t A),$$

dove A è l'operatore autoaggiunto corrispondente all'osservabile \mathcal{A}

Tuttavia, questa stessa situazione fisica può essere descritta in maniera diversa: il tempo d'attesa t , prima di effettuare la misurazione, nello schema di Heisenberg viene considerato parte della procedura di misurazione. Allora secondo questo punto di vista lo stato rimane $P = |\psi\rangle\langle\psi|$, mentre l'osservabile misurata non è più \mathcal{A} , bensì \mathcal{A}_t , rappresentata da A_t : la misurazione di \mathcal{A}_t utilizza la stessa procedura di \mathcal{A} , ma si esegue dopo aver atteso un tempo t . Per il valore di aspettazione avremo

$$v(\mathcal{A}_t) = Tr(P A_t).$$

Nonostante le due descrizioni siano formalmente differenti, i valori di aspettazione si riferiscono a situazioni fisiche; per cui deve valere

$$Tr(P_t A) = Tr(P A_t). \quad (71)$$

Possiamo a questo punto introdurre una coppia di trasformazioni biunivoche :

$$S_1 : \Sigma \rightarrow \Sigma,$$

$$R_2 : Aut(\mathcal{H}) \rightarrow Aut(\mathcal{H})$$

tali che, nello schema di Schroedinger,

$$S_1(P) = P_t$$

e, secondo lo schema di Heisenberg,

$$R_2(A) = A_t.$$

Posto $S_2 = R_2^{-1}$ si può verificar immediatamente che la coppia (S_1, S_2) costituisce una trasformazione di simmetria quantistica. Definiamo $B = R_2(A)$ e calcoliamo, per effetto della (5.1):

$$Tr(PB) = Tr(PR_2(A)) = Tr(S_1(P)A) = Tr(S_1(P)S_2(B)).$$

Per la definizione (1.5) la coppia (S_1, S_2) è una trasformazione di simmetria quantistica; allora $S = S_1$ è una trasformazione di Wigner, pertanto è possibile applicare il teorema di Wigner, ottenendo

$$P_t = S_1(P) = U_t P U_t^{-1}, \quad (72)$$

$$A_t = S_2^{-1}(A) = U_t^{-1} A U_t. \quad (73)$$

3.8. Equazioni di evoluzione temporale nel caso di tempo omogeneo.

Nel capitolo precedente, abbiamo formulato la teoria Quantistica non relativistica per una particella localizzabile nello spazio delle coordinate \mathbf{R}^3 . Abbiamo indicato con $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ la terna di operatori autoaggiunti corrispondenti alle osservabili posizione nello spazio di Hilbert \mathcal{H} e con $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ la terna di operatori autoaggiunti corrispondenti alle osservabili velocità.

Nel paragrafo precedente abbiamo ottenuto le relazioni (5.2) e (5.3) sviluppando la descrizione dell'evoluzione temporale di un sistema quantistico secondo lo schema di Schroedinger e di Heisenberg. Poichè il sistema quantistico che stiamo considerando è quello di una particella libera, si ha che per essa vale una particolare trasformazione di simmetria per l'evoluzione temporale:

$$S_{t+\tau}(P) = S_\tau(S_t(P)), \quad (74)$$

ovvero, la trasformazione di evoluzione temporale per lo stato P al tempo $t + \tau$ è, in assenza di interazioni con l'esterno, la stessa trasformazione che si avrebbe al tempo t con lo stato P_t e lasciando passare un tempo τ .

Per effetto dell'espressione (5.2), possiamo interpretare la relazione (5.4) in termini di operatori unitari, quindi

$$V_{t+\tau} P V_{t+\tau}^{-1} = V_\tau (V_t P V_t^{-1}) V_\tau^{-1} = (V_\tau V_t) P (V_\tau V_t)^{-1}.$$

L'operatore unitario, la cui esistenza è garantita dal teorema di Wigner, è unico a meno di un fattore di fase:

$$V_\tau V_t = e^{i\alpha(t,\tau)} V_{t+\tau}. \quad (75)$$

Pertanto la corrispondenza

$$t \rightarrow V_t$$

è una rappresentazione proiettiva della retta reale additiva; se assumiamo che tale corrispondenza è differenziabile, si può applicare il teorema di Stone; esiste, pertanto, un operatore hermitiano A e una funzione complessa $\phi(t)$ con $|\phi(t)| = 1$, tale che $U(t) = \phi(t)V(t)$ è una rappresentazione unitaria della retta dei tempi:

$$U_t = e^{iAt}, \quad (76)$$

$$U_{t+\tau} = U_t U_\tau.$$

Il generatore hermitiano A è indipendente dal tempo e ci permette di ottenere le equazioni di evoluzione temporale nel caso di tempo omogeneo.

Posto $H = -A$, la (5.6) si riscrive come

$$U_t = e^{-iHt}, \quad (77)$$

Abbiamo visto che, nella descrizione dell'evoluzione temporale secondo lo schema di Schroedinger, se lo stato quantistico al tempo $t = 0$ è dato dal proiettore di rango 1, $P = |\psi\rangle\langle\psi|$, dopo un tempo t generico è dato dal proiettore $P_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$.

Ora, sapendo che è verificata la relazione (5.2), possiamo scrivere

$$\psi_t = U_t\psi.$$

Deriviamo, quindi, entrambi i membri di questa equazione rispetto al tempo e abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_t}{dt} &= \frac{d(e^{-iHt}\psi)}{dt} \\ \frac{d\psi_t}{dt} &= -iH\psi_t \\ i\frac{d\psi_t}{dt} &= H\psi_t.\end{aligned}\tag{78}$$

L'espressione (5.8) è nota come equazione di Schroedinger per l'evoluzione temporale degli stati in omogeneità temporale.

Considerando ora l'equazione (5.3), possiamo sostituire in essa l'espressione (5.7) e otteniamo:

$$A_t = U_t^{-1}AU_t = e^{iHt}Ae^{-iHt}.$$

Deriviamo tale equazione rispetto al tempo:

$$\frac{dA_t}{dt} = iHe^{iHt}Ae^{-iHt} + e^{iHt}A(-iH)e^{-iHt} = ie^{iHt}(HA - AH)e^{-iHt}.$$

Quindi

$$\frac{dA_t}{dt} = \{i[H, A]\}_t.\tag{79}$$

La (5.9) rappresenta l'equazione di Heisenberg per l'evoluzione temporale delle osservabili nel caso di tempo omogeneo.

Posto $\dot{A} = \frac{dA_t}{dt}$, questa stessa equazione può essere scritta nel caso di $t = 0$ come

$$\dot{A} = i[H, A].\tag{80}$$

Proprietà 5.1

Se \mathcal{G} è un gruppo di trasformazioni di simmetria quantistica, possiamo attribuire alle trasformazioni rigide, cioè le trasformazioni del gruppo di Euclide, il carattere di *simmetria* dinamica: cioè, indicando con $P' = U_g P U_g^{-1} = S_1(P)$, dove $g \in \mathcal{E}$, si ha

$$[P_t]' = [P']_t.$$

Tale relazione si può riscrivere in termini di operatori unitari, la cui esistenza è garantita dal teorema di Wigner, come:

$$U_g(U_t P U_t^{-1}) U_g^{-1} = U_t U_g P U_g^{-1} U_t^{-1}.$$

Nel caso in cui g è una traslazione lungo x_α , tale relazione diventa:

$$e^{-iP_\alpha a} e^{-iHt} P e^{iHt} e^{iP_\alpha a} = e^{-iHt} e^{-iP_\alpha a} P e^{iP_\alpha a} e^{iHt}.$$

Nel caso di una rotazione abbiamo

$$e^{-iJ_\alpha a} e^{-iHt} P e^{iHt} e^{iJ_\alpha a} = e^{-iHt} e^{-iJ_\alpha a} P e^{iJ_\alpha a} e^{iHt}.$$

In entrambe le relazioni, poichè la trasformazione di simmetria quantistica è unica a meno di un fattore di fase, i generatori del gruppo commutano con l'operatore hermitiano H a meno di una costante immaginaria:

$$[H, P_\alpha] = ib_\alpha \quad b_\alpha \in \mathbf{R}, \quad (81)$$

$$[H, J_\alpha] = ic_\alpha \quad b_\alpha \in \mathbf{R}. \quad (82)$$

Mostriamo che tali costanti reali sono nulle.

Verifica

Consideriamo l'identità di Jacobi sulla terna (J_α, H, P_γ) :

$$[J_\alpha, [H, P_\gamma]] + [H, [P_\gamma, J_\alpha]] + [P_\gamma, [J_\alpha, H]] = 0$$

Per effetto della relazione (2.16) e delle relazioni (5.11) e (5.12) allora

$$[J_\alpha, ib_\gamma] + [H, iP_\beta] + [P_\gamma, -ic_\alpha] = 0,$$

da cui

$$[H, P_\beta] = 0 \Rightarrow b_\beta = 0.$$

Se, allo stesso modo, consideriamo l'identità di Jacobi sulla terna (J_α, H, J_γ) avremo:

$$[J_\alpha, [H, J_\gamma]] + [H, [J_\gamma, J_\alpha]] + [J_\gamma, [J_\alpha, H]] = 0$$

Utilizzando le relazioni (2.12) e (5.12) allora

$$[J_\alpha, ic_\gamma] + [H, iJ_\beta] + [J_\gamma, -ic_\alpha] = 0,$$

da cui

$$[H, J_\beta] = 0 \Rightarrow c_\beta = 0.$$

Si ottiene così, in definitiva,

$$[H, P_\alpha] = 0 \quad (83)$$

$$[H, J_\alpha] = 0. \quad (84)$$

3.9. L'operatore H della particella libera.

Nel capitolo 4 abbiamo indicato con Q l'operatore che corrisponde all'osservabile posizione nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , se scriviamo la relazione di Heisenberg in termini dell'operatore Q allora si ha:

$$\dot{Q}_\beta = i[H, Q_\beta]. \quad (85)$$

Sfruttando l'identità di Jacobi sulla terna (J_α, H, Q_β) e la relazione (5.15), riusciamo ad ottenere

$$\begin{aligned} [J_\alpha, \dot{Q}_\beta] &= i[J_\alpha, [H, Q_\beta]] = -i[H, [Q_\beta, J_\alpha]] - i[Q_\beta, [J_\alpha, H]] \\ &= -i[H, -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma] = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma \\ &= i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\gamma. \end{aligned} \quad (86)$$

Allo stesso modo, se sfruttiamo l'identità di Jacobi sulla terna (P_α, H, Q_β) e le relazioni (5.13) e (5.15), si ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} [P_\alpha, \dot{Q}_\beta] &= i[P_\alpha, [H, Q_\beta]] = -i[H, [Q_\beta, P_\alpha]] - i[Q_\beta, [P_\alpha, H]] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (87)$$

Poichè la famiglia di osservabili descritte dagli operatori P_α è completa allora, la relazione (5.17) ci permette di avere

$$\dot{Q}_\beta = f_\beta(\vec{P}),$$

inoltre, per effetto della (4.13) si ottiene

$$\dot{Q}_\beta = \phi_\beta(\vec{V}). \quad (88)$$

Proprietà 5.2

Sia $\phi_\beta(\vec{V})$ la funzione dipendente dalla terna di operatori velocità $\vec{V} = (V_\alpha, V_\beta, V_\gamma)$ della relazione (5.18), supponendo che essa sia analitica:

$$\phi_\beta(\vec{V}) = \sum_{n=0}^{\infty} V_\alpha^n f_n(V_\beta, V_\gamma),$$

allora si può dimostrare che vale la seguente relazione di commutazione:

$$[G_\alpha, \phi_\beta(\vec{V})] = i \frac{\partial \phi_\beta(\vec{V})}{\partial V_\alpha} \quad (89)$$

Dimostrazione

Sostituendo l'espressione di $\phi_\beta(\vec{V})$ all'interno del commutatore $[G_\alpha, \phi_\beta(\vec{V})]$ si ha :

$$\begin{aligned} [G_\alpha, \phi_\beta(\vec{V})] &= \sum_{n=0}^{\infty} [G_\alpha, V_\alpha^n] f_n(V_\beta, V_\gamma) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (inV_\alpha^{n-1}) f_n(V_\beta, V_\gamma) = i \frac{\partial \phi_\beta(\vec{V})}{\partial V_\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proprietà 5.3

Siano dati i generatori dei boost del gruppo di Galilei \mathcal{G} , allora è soddisfatta la seguente identità:

$$[G_\alpha, \phi_\beta(\vec{V})] = [G_\beta, \phi_\alpha(\vec{V})],$$

Per effetto della proprietà 5.2 si ottiene per cui l'uguaglianza

$$\frac{\partial \phi_\beta(\vec{V})}{\partial V_\alpha} = \frac{\partial \phi_\alpha(\vec{V})}{\partial V_\beta}. \quad (90)$$

Dimostrazione

Dalla relazione (5.18) e dalla relazione di Heisenberg per l'operatore \vec{Q} si ottiene

$$[G_\alpha, \phi_\beta(\vec{V})] = [G_\alpha, \dot{Q}_\beta] = [G_\alpha, i[H, Q_\beta]] =$$

tramite l'uguaglianza (4.10) e l'espressione $F_\alpha = \frac{G_\alpha}{\mu}$ abbiamo

$$\begin{aligned} &= [\mu Q_\alpha, i[H, Q_\beta]] = -i\mu \{ [Q_\beta, [Q_\alpha, H]] + [H, [Q_\beta, Q_\alpha]] \} = \\ &[\mu Q_\beta, i[H, Q_\alpha]] = [G_\beta, \dot{Q}_\alpha] = [G_\beta, \phi_\alpha(\vec{V})]. \end{aligned}$$

□

La proprietà 5.3 permette di ottenere la relazione (5.20); il campo $\vec{\phi}$ è dunque irrotazionale e pertanto esiste dunque un campo scalare u tale che :

$$\phi_\alpha(\vec{V}) = \frac{\partial u(\vec{V})}{\partial V_\alpha}. \quad (91)$$

Poichè la terna di operatori autoaggiunti $\vec{V} = (V_\alpha, V_\beta, V_\gamma)$ commuta con i generatori delle rotazioni spaziali secondo tale regola di commutazione:

$$[J_\alpha, V_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}V_\gamma,$$

allora qualsiasi funzione analitica di \vec{V} verifica la proprietà 2.2 e dunque si ha

$$[J_\alpha, \phi_\beta(\vec{V})] = i \left(\frac{\partial \phi_\beta(\vec{V})}{\partial V_\beta} V_\gamma - \frac{\partial \phi_\beta(\vec{V})}{\partial V_\gamma} V_\beta \right). \quad (92)$$

Indicando con x, y, z le variabili reali della ϕ , corrispondenti a V_x, V_y e V_z rispettivamente, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial V_x} &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \\ \frac{\partial u}{\partial V_y} &= \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \\ \frac{\partial u}{\partial V_z} &= \frac{\partial u}{\partial z} = u_z. \end{aligned}$$

Quindi, per effetto delle relazioni (5.16) e (5.22) e per rotazione ciclica delle coordinate x, y, z , otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{cases} zu_{yy} - yu_{yz} = u_z \\ xu_{zz} - zu_{zx} = u_x \\ yu_{xx} - xu_{xy} = u_y. \end{cases}$$

Poichè il commutatore (5.22), per la (5.16), è nullo quando si considera la relazione di commutazione tra i due operatori nella stessa coordinata, allora riscrivendola con la nuova notazione e ciclando le coordinate degli assi, si ottiene il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} zu_{xy} - yu_{xz} = 0 \\ xu_{yz} - zu_{yx} = 0 \\ yu_{zx} - xu_{zy} = 0 \end{cases}$$

Queste condizioni sono soddisfatte se e soltanto se la funzione u ha simmetria sferica, cioè $u(x, y, z) = u(x^2 + y^2 + z^2)$.

Occupiamoci ora di determinare l'espressione esplicita dell'operatore Hamiltoniano H , osservando innanzitutto che la relazione (5.13), poichè la famiglia di osservabili decritte dagli operatori P_α è completa, permette di concludere che

$$H = f(\vec{P}). \quad (93)$$

Assumiamo che la derivata temporale dell'operatore posizione della particella libera sia uguale all'operatore velocità della stessa particella

$$\dot{Q}_\alpha = V_\alpha,$$

allora si può riscrivere la relazione di Heisenberg per l'operatore Q come

$$i[H, Q_\alpha] = V_\alpha. \quad (94)$$

Se assumiamo la validità della relazione (5.24), poichè vale la (5.23), dovrà esistere un operatore

$$H_0 = \sum_\alpha \frac{P_\alpha^2}{2\mu}$$

per cui

$$i[H_0, Q_\alpha] = V_\alpha. \quad (95)$$

Verifica

Sostituendo l'espressione di H_0 nella relazione di commutazione (5.25), poichè

$$[Q_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta},$$

allora ponendo $\alpha = x$, si ha

$$\left[\frac{P_x^2}{2\mu}, Q_x \right] = \frac{1}{2\mu} (P_x P_x Q_x - Q_x P_x P_x).$$

Sommando e sottraendo all'interno di tale relazione $P_x Q_x P_x$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} (P_x P_x Q_x - P_x Q_x P_x + P_x Q_x P_x - Q_x P_x P_x) &= \frac{1}{2\mu} (P_x [P_x, Q_x] + [P_x, Q_x] P_x) = \\ &= -i \frac{P_x}{\mu} = -i V_x. \end{aligned}$$

Quindi

$$i[H_0, Q_x] = V_x.$$

□

Verificata la relazione (5.25), andiamo a sottrarre quest'ultima dall'espressione (5.24) ottenendo

$$i[H - H_0, Q_\alpha] = 0. \quad (96)$$

Poichè gli operatori H e H_0 sono funzioni dell'operatore \vec{P} , possiamo anche scrivere che

$$i[H - H_0, P_\alpha] = 0. \quad (97)$$

L'osservazione 4.1 del capitolo precedente ci permette di avere, per effetto della (5.26) e (5.27), che

$$H - H_0 = \epsilon_0 I \quad \epsilon_0 \in \mathbf{R}.$$

Quindi

$$H = \sum_{\alpha} \frac{P_{\alpha}^2}{2\mu} + \epsilon_0 I. \quad (98)$$

Otteniamo, quindi, l'usuale espressione dell'operatore Hamiltoniano della Meccanica Quantistica non relativistica di una particella libera.

Bibliografia

- [1] G. Gamow, *Thirty years that shook Physics*, Dover Publications, New York 1968.
- [2] B.L. Van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, North Holland Pub. Co., Amsterdam 1967.
- [3] J. Von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton University Press, Princeton 1955.
- [4] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Benjamin/ Cummings, Menlo Park (CA) 1982.
- [5] P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, USA 1988.
- [6] E. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Theory of Atomic Spectra*, Academic Press, Boston 1959.
- [7] E. Wigner, *On unitary Representations of the inhomogeneous Lorentz Group*, p.149, Annals of Mathematics vol. 40 n°1 January 1939.
- [8] Bargmann and Wigner, *Group Theoretical discussion of relativistic wave equations*, p. 211, National Academy of Sciences vol. 34 n°5 May 1948.
- [9] G.W. Mackey, *Induced Representations of locally compact Groups I*, p. 101, Annals of Mathematics vol. 55 n°1 January 1952.
- [10] A.O. Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representations and applications* , World Scientific, Singapore 1986.
- [11] V. Moretti, *Teoria spettrale e Meccanica Quantistica*, Springer, Milano 2010.
- [12] <http://www.mat.unical.it/~nistico/dispense/VonNeumann.pdf> .
- [13] L.S. Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach, New York 1966.
- [14] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Bollati Boringhieri, Torino 1989.

- [15] G.W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, Benjamin, New York 1968.
- [16] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, tome I, Dunod, Paris 1960.
- [17] Leslie L. Foldy, *Synthesis of Covariant Particle Equations*, p.568, Physical Review vol. 102 n°2 April 1956.