TEORIE RELATIVISTICHE

Dispensa N. 2

CINEMATICA E DINAMICA RELATIVISTICHE

2. CINEMATICA RELATIVISTICA

2.1 Trasformazione delle velocità

In questo paragrafo useremo le trasformazioni di Lorentz per mettere in relazione la velocità di una particella puntiforme misurata in un sistema di riferimento inerziale Σ con quella misurata in un altro sistema di riferimento Σ' che si muove rispetto a Σ con velocità costante $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Indichiamo con $\vec{u}$ la velocità della particella misurata da Σ e consideriamo il moto della particella rispetto ai due sistemi di riferimento.

Supponiamo che la particella si muova rispetto a Σ seguendo la legge del moto $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La velocità $\vec{u}(t)$ rispetto a Σ all'istante t avrà come componenti:

$$\begin{cases} u_x(t) = \frac{dx}{dt}(t) \\ u_y(t) = \frac{dy}{dt}(t) \\ u_z(t) = \frac{dz}{dt}(t); \end{cases}$$

la velocità $\vec{u'}(t')$ rispetto a Σ' all'istante t' avrà come componenti:

$$\begin{cases} u'_x(t') = \frac{dx'}{dt'}(t') \\ u'_y(t') = \frac{dy'}{dt'}(t') \\ u'_z(t') = \frac{dz'}{dt'}(t') \end{cases} \quad .$$

Se è nota $\vec{u}(t)$, è possibile ottenere la velocità $\vec{u'}(t')$ se il tempo t' concide con la coordinata temporale della posizione spazio-temporale $(t', \vec{x'})$ della particella rispetto a Σ' corrispondente, attraverso la trasformazione di Lorentz che lega i due sistemi di riferimento, alla posizione spazio-temporale $(t, \vec{x}(t))$ in Σ. Infatti, in questo caso $x'(t') = [x(t) - vt]/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $y'(t') = y(t)$, $z'(t') = z(t)$. Allora si può scrivere

$$\begin{cases} u'_x(t') = \frac{dx'(t')}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \\ u'_y(t') = \frac{dy'(t')}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \\ u'_z(t') = \frac{dz'(t')}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove possiamo sostituire

$$\frac{dx'(t')}{dt} = \frac{u_x(t) - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{dy'(t')}{dt} = u_y(t);$$

$$\frac{dz'(t')}{dt} = u_z(t).$$

Il fattore $\frac{dt}{dt'}$ si può ottenere derivando rispetto a t la regola di trasformazione del tempo $t' = [t - \frac{v}{c^2}x(t)]/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Quindi otteniamo

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x(t)}.$$

Andando a sostituire nella (2.1) i risultati trovati, siamo in grado di ottenere le leggi di trasformazione delle velocità:

$$\begin{cases} u'_x(t') = \frac{u_x(t)-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x(t)} = \frac{u_x(t)-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x(t)} \\ u'_y(t') = u_y(t) \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x(t)} \\ u'_z(t') = u_z(t) \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c^2}u_x(t)}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Quindi, conoscendo le componenti della velocità di una particella nel sistema di riferimento inerziale Σ e sfruttando le relazioni trovate nella (2.2), possiamo determinare le componenti della velocità della particella nel sistema Σ'.

Possiamo osservare che nei casi in cui le velocità in gioco sono trascurabili rispetto alla velocità della luce, si ha che $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$ e le equazioni della (2.2) si riconducono alle trasformazioni di Galileo della meccanica classica:

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z. \end{cases} \tag{2.3}$$

Per trovare la trasformazione inversa, basta cambiare di segno la velocità :

$$\begin{cases} u_x(t) = \frac{u'_x(t')+v}{1+u'_x(t')\frac{v}{c^2}} \\ u_y(t) = u'_y(t') \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+u'_x(t')\frac{v}{c^2}} \\ u_z(t) = u'_z(t') \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+u'_x(t')\frac{v}{c^2}}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Possiamo osservare che le componenti della velocità di una particella perpendicolari alla direzione del moto relativo, rispetto a Σ', dipendono non solo dalle rispettive compentni rispetto a Σ, ma anche dalla componente u_x.

2.2 Invarianza della velocità della luce

In questo paragrafo dimostreremo che le trasformazioni delle velocità forniscono un risultato sorprendente dal punto di vista della fisica classica: *se se un punto materiale possiede una velocità uguale al valore $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ che appare nelle trasformazioni di Lorentz, la velocità dello stesso punto avrà lo stesso valore numerico c rispetto a qualunque altro sistema di riferimento inerziale!* In altre parole, questa particolare velocità, che è la velocità della luce, è un invariante.

Consideriamo una particella che ad un certo istante possiede una velocità $\vec{u}$ rispetto ad un sistema di riferimento Σ, e sia $\vec{u}'$ la sua velocità rispetto al sistema Σ' che si muove con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a Σ. Per definizione $|\vec{u}'|^2 = {u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2$.

Utilizzando le trasformazioni (2.2) della velocità troviamo:

$$|\vec{u}'|^2 = \frac{1}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2} \cdot \left[u_x^2 + v^2 - 2u_x v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot u_y^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot u_z^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2} \cdot \left[u_x^2 + v^2 - 2u_x v + u_y^2 - \frac{v^2}{c^2}u_y^2 + u_z^2 - \frac{v^2}{c^2}u_z^2\right].$$

Se per ipotesi $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = |\vec{u}|^2 = c^2$,allora

$$|\vec{u}'|^2 = \frac{1}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2} \cdot \left[c^2 + v^2 - 2vu_x - \frac{v^2}{c^2} \cdot (u_y^2 + u_z^2)\right].$$

Ma il termine $(u_y^2 + u_z^2)$ può essere scritto, sfruttando l'ipotesi iniziale, come $(c^2 - u_x^2)$.
Sostituendo tale valore nella nostra equazione otteniamo:

$$\begin{aligned}|\vec{u}'|^2 &= \frac{1}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}\cdot\left[c^2 + v^2 - 2vu_x + \frac{v^2}{c^2}u_x^2 - v^2\right] = \\ &= \frac{1}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}\cdot\left[c^2\cdot\left(1 - 2\frac{v}{c^2}u_x + \frac{v^2}{c^4}u_x^2\right)\right] = \\ &= \frac{1}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}\left[c^2\cdot\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2\right] = c^2.\end{aligned}$$

2.3 Trasformazione delle accelerazioni

Nella relatività speciale si considerano sistemi di riferimento inerziali, cioè non accelerati l'uno rispetto all'altro, rispetto ai quali si osservano i fenomeni naturali. Tuttavia, i corpi osservati possono essere animati da moto accelerato rispetto ai riferimenti considerati, quindi è importante individuare le regole di trasformazione delle accelerazioni.

L'accelerazione di una particella P rispetto ad un sistema di riferimento inerziale Σ, avrà come componenti:

$$\begin{cases} a_x = \frac{d}{dt}u_x \\ a_y = \frac{d}{dt}u_y \\ a_z = \frac{d}{dt}u_z. \end{cases} \tag{2.4}$$

L'accelerazione, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale Σ' in moto relativo uniforme rispetto con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a Σ, ha come componenti:

$$\begin{cases} a'_x = \frac{d}{dt'}u'_x \\ a'_y = \frac{d}{dt'}u'_y \\ a'_z = \frac{d}{dt'}u'_z. \end{cases} \tag{2.5}$$

Procedendo come abbiamo visto per le velocità possiamo scrivere:

$$\begin{cases} a'_x(t') = \frac{d}{dt}u'_x \cdot \frac{dt}{dt'} \\ a'_y(t') = \frac{d}{dt}u'_y \cdot \frac{dt}{dt'} \\ a'_z(t') = \frac{d}{dt}u'_z \cdot \frac{dt}{dt'}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Per ricavare i termini $\frac{d}{dt}u'_x$, $\frac{d}{dt}u'_y$, $\frac{d}{dt}u'_z$, possiamo derivare rispetto al tempo le equazioni per la trasformazione delle velocità valide nel sistema di riferimento Σ'. In tal modo otteniamo:

$$\frac{d}{dt}u'_x = \frac{a_x\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)+\frac{v}{c^2}a_x(u_x-v)}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2};$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u'_y &= a_y\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)}+u_y\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{v}{c^2}a_x}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}=\\&=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{\left[a_y-\frac{v}{c^2}u_xa_y+\frac{v}{c^2}u_ya_x\right]}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u'_z &= a_z\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)}+u_z\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{v}{c^2}a_x}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}=\\&=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{\left[a_z-\frac{v}{c^2}u_xa_z+\frac{v}{c^2}u_za_x\right]}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}.\end{aligned}$$

Andando a sostituire nella (2.6) i risultati appena trovati, siamo in grado di ottenere le equazioni per trasformare le componenti dell'accelerazione di una particella:

$$\begin{aligned}a'_x(t') &= \frac{a_x\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)+\frac{v}{c^2}a_x(u_x-v)}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)}=\\&=\frac{a_x\cdot\left[1-\frac{v}{c^2}u_x+\frac{v}{c^2}u_x-\frac{v^2}{c^2}\right]\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^3}=\\&=\frac{a_x\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^3};\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$a'_y(t') = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{\left[a_y-\frac{v}{c^2}u_xa_y+\frac{v}{c^2}u_ya_x\right]}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{(1-\frac{v}{c^2}u_x)}=$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[a_y\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) + \frac{v}{c^2}u_y a_x\right]}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)^3}; \tag{2.8}$$

$$a'_z(t') = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\left[a_z - \frac{v}{c^2}u_x a_z + \frac{v}{c^2}u_z a_x\right]}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[a_z\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) + \frac{v}{c^2}u_z a_x\right]}{(1 - \frac{v}{c^2}u_x)^3}. \tag{2.9}$$

Dalle espressioni precedenti possiamo osservare che l'accelerazione di un corpo non è invariante e quindi, al contrario di quanto previsto dalle teoria classica, ha valori diversi rispetto a diversi sitemi di riferimento inerziali. Il risultato relativistico si riduce a quello classico quando $\vec{v}$ è trascurabile rispetto a c, cioè quando $\frac{v}{c} \to 0$.

2.4 Dilatazione dei tempi.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale Σ, ed un altro sistema di riferimento inerziale Σ' che si muove con velocità costante $\vec{v}$ rispetto al primo. Supponiamo che in un certo punto P di coordinate (x, y, z) rispetto a Σ si verifichino due eventi in tempi diversi che vengono misurati da un orologio in quiete rispetto a Σ. Indichiamo i tempi misurati con t_1 e t_2. Un osservatore solidale con Σ' vedrà tali eventi verificarsi in posizioni diverse, ma anche a tempi diversi che indichiamo con t'_1 e t'_2.
Utilizzando le trasformazioni di Lorentz per le coordinate temporali troviamo che

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.10}$$

Dalla relazione trovata si deduce che la durata temporale di un fenomeno rispetto a un riferimento in moto uniforme rispetto al riferimento in cui esso si verifica in un punto fisso, risulta maggiore della durato rispetto al primo riferimento. Questa dilatazione dei tempi è un tipico effetto relativistico.

Supponiamo che in Σ si verifichino allo stesso istante t due eventi nei punti (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2). Un osservatore solidale con Σ', misurando il tempo in cui si verificano gli eventi troverà che il primo avviene al tempo

$$t'_1 = \frac{(t - \frac{v}{c^2} x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

e il secondo al tempo

$$t'_2 = \frac{(t - \frac{v}{c^2} x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Allora

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(x_1 - x_2)\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.11}$$

Ciò significa che per l'osservatore in Σ' gli eventi non avvengono contemporaneamente a meno che $x_1 = x_2$.

Quindi in relatività speciale anche la simultaneità degli eventi è una proprietà relativa. In generale, se un osservatore verifica che due eventi avvengono simultaneamente, questo non accadrà per gli osservatori in moto rispetto al primo.

3. IL FORMALISMO DELLA RELATIVITÀ

3.1 Il concetto di tempo proprio

Nel capitolo precedente abbiamo visto che la velocità della luce nel vuoto, c, non dipende dal sistema di riferimento inerziale rispetto al quale viene misurata. Il carattere invariante di c conduce all'esistenza di un altro invariante: il *tempo proprio*.

Consideriamo una particella che si muove in un sistema di riferimento inerziale Σ. Al tempo t, il corpo possiede una posizione $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}$ e una velocità $\vec{u}(t)$ che, in generale, dipende da t. Possiamo considerare, per ogni istante t, un sistema di riferimento *inerziale* Σ_p che si muove, rispetto a Σ, con la stessa velocità $\vec{u}(t)$ del corpo all'istante t. Il sistema Σ_p è detto *sistema di riferimento proprio* della particella. Esso è un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale il corpo ha velocità nulla. È importante sottolineare che non si può, in generale, assegnare un unico sistema di riferimento proprio ad un particella. Se ad esempio, la particella possiede un'accelerazione, la sua velocità è diversa ad ogni istante diverso, pertanto ci sarà un sistema proprio diverso ad ogni istante. L'evento $\underline{x} = (t, \vec{x}(t))$ corrisponde all'evento $\underline{\xi} = (\tau, \vec{\xi}(\tau))$ in Σ_p, dove $\vec{\xi}(\tau) = (\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau))$.

Dopo un tempo dt in Σ la variazione – al primo ordine rispetto a t – della posizione della particella è

$$d\vec{x} = \vec{u}(t)dt. \tag{3.1}$$

La quantità dt, rappresenta la distanza temporale tra gli eventi $\underline{x} = (t, \vec{x})$ e $\underline{x} + d\underline{x} = (t + dt, \vec{x} + d\vec{x})$ rispetto a Σ. Determineremo adesso la relazione che intercorre fra la variazione temporale dt tra gli eventi $\underline{x}$ e $\underline{x} + d\underline{x}$ rispetto a Σ (variazione del tempo *coordinato*) e la variazione temporale $d\tau$ tra gli eventi corrispondenti $\underline{\xi}$ e $\underline{\xi} + d\underline{\xi}$ in Σ_p (variazione del tempo *proprio*).

Per fare ciò, fissato t, introduciamo un sistema inerziale $\hat{\Sigma}$ spazialmente rototraslato ma in quiete rispetto a Σ, in modo che l'asse x di $\hat{\Sigma}$ abbia la direzione della velocità della particella al tempo t, e tale che l'evento $(t, \vec{x}(t))$ corrisponda all'evento $(0, \vec{0})$ in $\hat{\Sigma}$. Le variazioni temporali tra eventi non subiscono variazioni nel passare dalla descrizione in Σ a quella in $\hat{\Sigma}$. Inoltre, la velocità della particella rispettto a $\hat{\Sigma}$ all'istante t è $(u, 0, 0)$, con $u = |\vec{u}(t)|$.

Introduciamo un ulteriore sistema di riferimento $\hat{\Sigma}_p$, in quiete rispetto a Σ_p, in cui l'evento $(\tau, \vec{\xi}(\tau))$ rispetto a Σ_p è rappresentato da $(0, \vec{0})$, con l'asse x che si sovrappone all'asse x di $\hat{\Sigma}$ per cui $\hat{\Sigma}_p$ si muove con velocità costante $(u, 0, 0)$ rispetto a $\hat{\Sigma}$ e ciò implica che la particella risulta ferma all'istante τ anche rispetto a $\hat{\Sigma}_p$.

Le variazioni temporali tra eventi non subiscono variazioni nel passare da Σ_p a $\hat{\Sigma}_p$. Pertanto la relazione tra le variazioni temporali dt e $d\tau$ coincide con la relazione tra le variazioni temporali valutate in $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\Sigma}_p$: basta applicare la trasformazione di Lorentz che lega $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\Sigma}_p$:

$$dt = \frac{d\tau + \frac{u}{c^2} d\hat{\xi}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};$$

ma $d\hat{\xi} = 0$, poichè in $\hat{\Sigma}_p$ la velocità della particella è nulla; pertanto

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{3.2}$$

da cui si ottiene

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \tag{3.3}$$

Questa relazione permette di calcolare il valore di $d\tau$, cioè la differenza tra le coordinate temporali rispetto al sistema proprio degli eventi corrispondenti agli eventi $\underline{x} + d\underline{x}$ e $\underline{x}$ di Σ. Questa grandezza è un invariante: per calcolare questa grandezza rispetto ad un sistema Σ' in moto relativo uniforme rispetto a Σ, dalla (3.3) dobbiamo scrivere

$$d\tau' = dt'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}, \tag{3.3'}$$

dove dt' è la differenza temporale tra gli eventi $(\underline{x} + d\underline{x})'$ e $\underline{x}'$, e v è la velocità della particella rispetto a Σ'. Un semplice argomento indica che deve essere $d\tau = d\tau'$. Infatti, se consideriamo il moto della particella rispetto a Σ' al corrispondente tempo t', il sistema proprio Σ'_p individuato da Σ' deve essere in quiete rispetto a Σ_p. Pertanto le variazioni temporali $d\tau$ e $d\tau'$ sono uguali.

3.2 Quadrivettori.

Una rotazione dello spazio tridimensionale comporta una trasformazione lineare delle componenti di un vettore; analogamente, le trasformazioni di Lorentz comportano una trasformazione lineare delle quattro coordinate spazio-temporali. Modifichiamo il formalismo in maniera da rendere omogenee le dimensioni fisiche delle componenti del vettore di $\mathbf{R}^4$ che rappresenta la posizione spazio-temporale di un evento. In generale, indicheremo tale posizione mediante il vettore

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_\circ \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

dove x_0 è la nuova coordinata temporale, che assume le dimensioni fisiche delle altre coordinate, cioè queele di lunghezza. Usando tale notazione, possiamo riscrivere le trasformazioni di Lorentz nel seguente modo:

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} x'_\circ \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\circ \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= L \begin{bmatrix} x_\circ \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Un *quadrivettore* è una grandezza fisica vettoriale rappresentabile, rispetto a un riferimento inerziale Σ, mediante un vettore $\underline{q} = (q_0, \vec{q})$ di $\mathbf{R}^4$, tale che il suo valore (vettoriale!) $\underline{q}'$ rispetto ad un altro riferimento inerziale Σ' si ottiene applicando a $\underline{q}$ la stessa trasformazione di Lorentz L che trasforma gli eventi:

$$\underline{q}' = L\underline{q}. \tag{3.5}$$

La componente q_0 di un quadrivettore $\underline{q}$ è detta parte temporale di $\underline{q}$, mentre il vettore $\vec{q}$ ne costituisce la parte spaziale.

Potrebbe sembrare, a prima vista, che per ottenere un quadrivettore basti considerare ogni trivettore della fisica e trovare la rimanente componente. In realtà non è così. Ad esempio, il vettore velocità $\vec{u}$ di una particella non può essere esteso ad un quadrivettore $\underline{u} = (u_0, \vec{u})$ aggiungendo una opportuna parte temporale u_0. Infatti, comunque si scelga u_0, la componene y della velocità rispetto a un riferimento Σ' in moto con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0,)$ rispetto a Σ sarà data dalla (2.2)

$$u'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} u_y$$

che è diversa dalla componente y di $L(u_0, \vec{u})$, che è semplicemente

$$(L\underline{u})_y = u_y.$$

Il seguente teorema fornisce un importante strumento per generare quadrivettore da quadrivettori.

Teorema 3.1. Se $\underline{q}$ è un quadrivettore che rappresenta una grandezza vettoriale di un particella, per cui è possibile applicare il concetto di tempo proprio, la sua derivata rispetto al tempo proprio, $\underline{\alpha}(t) = \frac{d\underline{q}(t)}{d\tau}$ è ancora un quadrivettore.

Dimostrazione. Siano Σ e Σ' due sistemi di riferimento inerziali legati dalla trasfrmazione di Lorentz L. Sia $\vec{x}(t)$ la posizione della particella rispetto a Σ; dunque $(ct', \vec{x}'(t')) = L(ct, \vec{x}(t))$. Allora

$$\underline{\alpha}'(t') = \frac{d\underline{q}'(t')}{d\tau'} = \frac{d\underline{q}'(t')}{d\tau}$$

per l'invarianza del tempo prorio. D'altronde $\underline{q}'(t') = L\underline{q}(t)$, pertanto

$$\underline{\alpha}'(t') = \frac{d\underline{q}'(t')}{d\tau} = \frac{d\underline{q}(t)}{d\tau} = L\frac{d\underline{q}(t)}{d\tau} = L\underline{\alpha}(t).$$

Pertanto la grandezza vettorial $\underline{\alpha}$ definita da $\underline{\alpha} = \frac{d\underline{q}}{d\tau}$ è un quadrivettore.

3.3 La quadrivelocità

Come accennato nel paragrafo precedente, il vettore velocità non può essere esteso a un quadrivettore. Il precedente teorema permette però di generare un quadrivettore, la *quadrivelocità*, da cui è possibile ottenere direttamente la velocità.

Consideriamo nello spazio di Minkowski un evento $\underline{x}(t) = (ct, \vec{x}(t))$ che rappresenta la posizione spazio-temporale di una particella. Esso è un quadrivettore; pertanto possiamo generare un altro quadrivettore derivando $\underline{x}$ rispetto al tempo proprio:

$$\frac{d\underline{x}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{x}) = \frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{d\tau}ct \\ \frac{d}{d\tau}x \\ \frac{d}{d\tau}y \\ \frac{d}{d\tau}z \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Dalla (3.3) otteniamo

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt} \tag{3.7}$$

dove v è il modulo della velocità $\vec{v}$ della particella. Allora

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{dx}{d\tau} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases},$$

cioè

$$\Rightarrow \frac{d\underline{x}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

La grandezza vettoriale $\underline{q}(t) = \frac{d\underline{x}}{d\tau}$ è un quadrivettore per il teorema precedente. Esso avrà come componenti:

$$\begin{cases} q_\circ = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \vec{q} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Si può ottenere la velocità $\vec{v}'$ di una particella rispetto ad un altro sistema di riferimento Σ' legato a Σ dalla trasformazione di Lorentz L dall'equazione

$$\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v'}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \right) = \vec{q'} = L \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

3.4 La quadriaccelerazione

Definiamo, ora, un quadrivettore legato direttamente all'accelerazione di un corpo, ovvero la *quadriaccelerazione*. Essa può essere ricavata direttamente dalla quadrivelocità derivando quest'ultima rispetto al tempo proprio. Così facendo otteniamo:

$$\underline{\alpha} = \frac{d\underline{q}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \right) = \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \right).$$

Procedendo con i calcoli si ottiene
$\underline{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[-\frac{2}{c^2}(v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z)\right] =$
$= \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{a} \end{bmatrix} + \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \cdot \frac{\vec{v}\vec{a}}{c^2} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix}.$
L'interpretazione delle varie componenti della quadriaccelerazione risulta chiara se la riferiamo a un sistema di riferimento Σ in cui la direzione dell'asse x coincide con la direzione del moto della particella, per cui la sua velocità risulta essere $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Sotto queste ipotesi, l'espressione della quadriaccelerazione diventa:

$$\underline{\alpha} = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \begin{bmatrix} 0 \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \cdot \frac{va_x}{c^2} \begin{bmatrix} c \\ v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{va_x}{c(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \\ \frac{a_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \\ \frac{a_y}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \\ \frac{a_z}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_\circ \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Vediamo in generale quali sono le proprietà della quadriaccelerazione. Consideriamo un sistema di riferimento a riposo Σ_p la cui origine coincide con quella di Σ all'istante iniziale. In Σ_p l'accelerazione non è nulla ma, ponendo

$$L^{(v,0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

essa è data da

$$\underline{\alpha}_p = L^{(v,0,0)} \underline{\alpha}. \tag{3.11}$$

Per calcolare l'accelerazione in Σ dobbiamo utilizzare la matrice di trasformazione inversa di Lorentz:

$$\underline{\alpha} = L^{(-v,0,0)}\underline{\alpha}_p, \tag{3.12}$$

dove

$$L^{(-v,0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma nel riferimento Σ_p la velocità è nulla quindi, per trovare l'espressione della quadriaccelerazione in tale sistema, basta sostituire il valore $v = 0$ nella (3.10).
Così facendo troviamo che

$$\underline{\alpha}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{p_x} \\ a_{p_y} \\ a_{p_z} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Riscriviamo la (3.12) in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \alpha_\circ \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ a_{p_x} \\ a_{p_y} \\ a_{p_z} \end{bmatrix}.$$

Possiamo riscrivere tale equazione effettuando un prodotto righe per colonne:

$$\begin{cases} \alpha_\circ = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} a_{p_x} \\ \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} a_{p_x} \\ \alpha_y = a_{p_y} \\ \alpha_z = a_{p_z} \end{cases} \tag{3.14}$$

Eguagliando la (3.10) con la (3.14) possiamo ricavare la relazione esistente fra le accelerazioni nei due sistemi di riferimento Σ_p e Σ:

$$\begin{cases} \frac{va_x}{c(1-\frac{v^2}{c^2})^2} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} a_{p_x} \\ \frac{a_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} a_{p_x} \\ \frac{a_y}{(1-\frac{v^2}{c^2})} = a_{p_y} \\ \frac{a_z}{(1-\frac{v^2}{c^2})} = a_{p_z}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = a_{p_x}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}} \\ a_y = a_{p_y}(1-\frac{v^2}{c^2}) \\ a_z = a_{p_z}(1-\frac{v^2}{c^2}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Calcolando a_{p_x}, a_{p_y} e a_{p_z}, possiamo ricavare le equazioni di trasformazione dell'accelerazione nella direzione parallela al moto e nelle direzioni ad esso perpendicolari:

$$\begin{cases} a_{p_x} = \frac{a_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \\ a_{p_y} = \frac{a_y}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \\ a_{p_z} = \frac{a_z}{(1-\frac{v^2}{c^2})}. \end{cases} \quad (3.16)$$

3.5 La quadridensità di corrente elettrica.

I quadrivettori considerati sinora sono tutti di natura cinematica. Individueremo adesso un quadrivettore di natura elettromagnetica. In generale la carica elettrica di una particella è indipendente dal suo stato di moto, quindi è un invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. La *densità di carica elettrica*, invece, non è invariante a causa della contrazione delle lunghezze. Infatti, se consideriamo un sistema di riferimento inerziale Σ, dove la densità di carica è descritta dalla funzione $\rho(\underline{x}) = \rho(ct, \vec{x})$, una carica dq in quiete rispetto a Σ occupa un elemento di volume dV in maniera tale che

$$dq = \rho(\underline{x})dV. \tag{3.17}$$

In un sistema di riferimento Σ' in moto rispetto al primo con una velocità costante $\vec{v}$, lo stesso elemento di volume, contenente quindi la stessa carica elettrica dq, appare contratto di un fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ nella direzione del moto relativo per effetto della contrazione di Lorentz; pertanto avremo $dq = \rho(\underline{x})\, dV = \rho'(\underline{x}')\, \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dV$, cioè

$$\rho'(\underline{x}') = \frac{\rho(\underline{x})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.18}$$

Quindi la densità di carica non è un invariante.

Con questo non si è però risolto il problema generale di trasformare la densità di carica elettrica, poichè in generale le cariche la cui distribuzione è descritta da ρ sono in moto rispetto a Σ stesso, con una velocità $\vec{v}$ che può cambiare da punto a punto e nel tempo. Consideriamo allora il caso in cui le cariche la cui distribuzione è descritta da $\rho(\underline{x})$ in Σ siano in moto in maniera tale che nel punto $\vec{x}$ al tempo t la loro velocità sia $\vec{v} = \vec{v}(ct, \vec{x})$. Fissato un punto $\vec{x}$ al tempo t, sia $\Sigma_p(\underline{x})$ il sistema a riposo per le cariche in $\underline{x}$. In questa situazione possiamo applicare la (3.18):

$$\rho(\underline{x}) = \frac{\rho_p(\underline{\xi})}{\sqrt{1 - \frac{v^2(\underline{x})}{c^2}}}, \tag{3.19}$$

dove $\rho_p(\underline{\xi})$ è la densità di carica rispetto a $\Sigma_p(\underline{x})$ nel punto $\underline{\xi}$ corrispondente a $\underline{x}$ (per cui in $\underline{\xi}$ le cariche sono in quiete rispetto a $\Sigma_p(\underline{x})$). Otteniamo allora la relazione

$$\rho_p(\underline{\xi}) = \rho(\underline{x})\sqrt{1 - \frac{v^2(\underline{x})}{c^2}},$$

che permette di calcolare la densità di carica in $\Sigma_p(\underline{x})$, mentre cerchiamo la relazione per la densità di carica in un qualunque sistem di riferimento Σ'. Sfruttando la (3.19) possiamo definire la seguente funzione scalare:

$$\rho_0(\underline{x}) = \rho_p(\underline{\xi}(\underline{x})) = \rho(\underline{x})\sqrt{1 - \frac{v^2(\underline{x})}{c^2}}.$$

Per ogni $\underline{x}$, $\rho_0(\underline{x})$ è il valore della densità di carica rispetto a $\Sigma_p(\underline{x})$ calcolato nel punto $\underline{\xi}(\underline{x})$ corrispondente a $\underline{x}$, pertanto è un invariante!

Se moltiplichiamo questo invariante per un quadrivettore otteremo ovviamente un quadrivettore. Allora il campo vettoriale definito da

$$\underline{j}(\underline{x}) = \rho_0(\underline{x})\underline{q}(\underline{x}), \tag{3.21}$$

dove $\underline{q}(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(\underline{x})}{c^2}}} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v}(\underline{x}) \end{bmatrix}$ è la quadrivelocità delle cariche in $\underline{x}$ rispetto a Σ, è un quadrivettore. Ora, la densità di corrente in Σ è data da $\vec{j}(\underline{x}) = \rho(\underline{x})\vec{v}(\underline{x})$. Allora la (3.21) può essere riscritta come

$$\underline{j}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \rho(\underline{x})c \\ \vec{j}(\underline{x}) \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Dunque la grandezza $\underline{j}(\underline{x})$ può essere ridefinita come il quadrivettore che ha come parte spaziale la densità di corrente $\vec{j}(\underline{x})$, e come parte temporale $j_0(\underline{x}) = \rho(\underline{x})c$, – essenzialmente la densità di carica. Il carattere quadrivettoriale di $\underline{j}$ implica che la quadridensità di corrente rispetto a un riferimento Σ' che si muove con velocità costante $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ rispetto a Σ è

$$\underline{j}'(\underline{x}') = \begin{bmatrix} \rho'(\underline{x}')c \\ \vec{j}'(\underline{x}') \end{bmatrix} = L\underline{j}(\underline{x});$$

in particolare

$$\rho'(\underline{x}') = \frac{1}{c}\frac{\rho(\underline{x})c - \frac{v_0}{c}j_x(\underline{x})}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Quindi, la densità di carica in Σ' non dipende solo dalla densità di carica in Σ, ma anche dalla densità di corrente $\vec{j}(\underline{x})$.

4. TRASFORMAZIONI DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI

Lo scopo di questo capitolo è la determinazione delle regole di trasformazione del campo elettromagnetico che consentono di ottenere il campo in un sistema inerziale Σ' quando esso è noto in un sistema Σ. Per fare ciò seguiremo il metodo seguente. Date le equazioni di Maxwell valide in un certo sistema di riferimento inerziale Σ, si esprimeranno come funzioni delle variabili $\underline{x}'$, $\vec{v}'$, etc., di un altro sistema di riferimento inerziale Σ' tutti i termini nelle equazioni per cui tali funzioni sono note (ad esempio, $x = x(t', x') = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$). Nelle equazioni risultanti individueremo quei campi $\vec{E}'(\vec{E}, \vec{B})$ e $\vec{B}'(\vec{E}, \vec{B})$ per i quali le equazioni sono equivalenti alle equazioni di Maxwell rispetto a Σ'. Allora tali $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ devono rappresentare i campi elettromagnetici in Σ', e quindi le funzioni $\vec{E}'(\vec{E}, \vec{B})$ e $\vec{B}'(\vec{E}, \vec{B})$ sono da interpretare come le leggi di trasformazione che consentono di determinare il campo elettromagnetico in Σ' se è noto in Σ.

In realtà applicheremo questo metodo per ottenere le leggi di trasformazione dei potenziali elettromagnetici ϕ e $\vec{A}$, dai quali è facile ottenere successivamente i campi attraverso le equazioni

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\bigtriangledown}\phi\,, \quad \vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{A}\,.$$

4.1 Le equazioni di Maxwell per i potenziali

In presenza di cariche e di correnti elettriche distribuite rispettivamente con densità ρ e $\vec{j}$, le equazioni di Maxwell assumono la seguente forma:

1) $\bigtriangledown \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_\circ}$
2) $\bigtriangledown \cdot \vec{B} = 0$
3) $\vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$
4) $c^2 \cdot \vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}.$

La relazione (2) implica l'esistenza di un campo vettoriale $\vec{A}$, detto *potenziale vettore*, tale che:

$$\vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{A}. \tag{4.1}$$

Infatti, si verifica direttamente che la divergenza di un rotore di un campo $\vec{C}$ è sempre nulla:

$$\vec{\bigtriangledown}\wedge\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}C_z - \frac{\partial}{\partial z}C_y\right) i_x + \left(\frac{\partial}{\partial z}C_x - \frac{\partial}{\partial x}C_z\right) i_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}C_y - \frac{\partial}{\partial y}C_x\right) i_z$$

da cui $\vec{\bigtriangledown} \cdot (\vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{C}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}C_z - \frac{\partial}{\partial z}C_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}C_x - \frac{\partial}{\partial x}C_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}C_y - \frac{\partial}{\partial y}C_x\right) = 0$

Ricordiamo che vale anche il viceversa: se la divergenza di un campo è nulla, cioè il campo è solenoidale, allora si può esprimere tale campo come il rotore di un altro campo. Pertanto, per il campo magnetico avremo

$$\vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{ovvero} \qquad \begin{cases} B_x = \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \\ B_y = \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z \\ B_z = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x. \end{cases}$$

L'equazione (2) può essere scritta come:

$$\bigtriangledown \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x}B_x + \frac{\partial}{\partial y}B_y + \frac{\partial}{\partial z}B_z = 0.$$

Sostituendo la nuova espressione di $\vec{B}$ nella (3) otteniamo:

$$\vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\vec{\bigtriangledown} \wedge \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\bigtriangledown} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0.$$

Tale relazione indica che il campo $\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ è irrotazionale e può essere espresso come il gradiente di un campo scalare ϕ. Quindi

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\bigtriangledown}\phi. \tag{4.2}$$

Il campo scalare ϕ che compare nella (4.2) è detto *potenziale scalare*.

Il potenziale vettore $\vec{A}$ non è univocamente determinato dalla relazione $\vec{B} = \vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{A}$ perchè essa continua ad essere soddisfatta se ad $\vec{A}$ si somma il gradiente di un arbitrario campo scalare ψ. Infatti, $\vec{\bigtriangledown} \wedge (\vec{\bigtriangledown}\psi) = 0$ è valida per ogni funzione scalare ψ ; quindi, il potenziale vettore è determinato a meno del gradiente di un arbitrario campo scalare.

Se $\phi_\circ$ è il potenziale scalare corrispondente ad $\vec{A}_\circ$, cioè se vale

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_\circ - \vec{\bigtriangledown}\phi_\circ$$

allora i seguenti potenziali

$$\begin{cases} \vec{A} = \vec{A}_\circ - \vec{\bigtriangledown}\psi \\ \phi = \phi_\circ + \frac{\partial}{\partial t}\psi \end{cases} \tag{4.3}$$

dove $\psi(t, x, y, z)$ è una funzione qualsiasi di $\vec{x}$ e t, sostituiti nelle relazioni precedenti forniscono gli stessi campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

La trasformazione $(\vec{A}_\circ, \phi_\circ) \to (\vec{A}, \phi)$ definita dalla (4.3) è detta *trasformazione di gauge*. Una trasformazione di gauge lascia invariati i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Siccome i potenziali non sono univocamente determinati dalle equazioni di Maxwell, possiamo sceglierli in maniera che soddisfino ad un'ulteriore condizione, oltre che a quelle imposte dalle equazioni di Maxwell. Una condizione molto usata è la seguente

$$\vec{\bigtriangledown} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\phi = 0 \tag{4.4}$$

detta *gauge di Lorentz*. Vediamo quali sono le equazioni per i potenziali derivanti dalle equazioni di Maxwell quando adottiamo tale gauge. Consideriamo l'equazione (4)

$$c^2 \cdot \vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}.$$

Sfruttando la (4.1) e la (4.2) si ha:

$$c^2\left(\vec{\bigtriangledown}\wedge(\vec{\bigtriangledown}\wedge\vec{A})\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\bigtriangledown}\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=\frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ}. \tag{4.5}$$

Ma per ogni campo $\vec{C}$ vale l'identità:

$$\vec{\bigtriangledown}\wedge(\vec{\bigtriangledown}\wedge\vec{C})=\vec{\bigtriangledown}(\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{C})-\Delta\vec{C}$$

dove l'operatore $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è il *laplaciano*; applicando ad $\vec{A}$ questa relazione la (4.5) diventa:

$$c^2\cdot\vec{\bigtriangledown}(\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A})-c^2\cdot\Delta\vec{A}+\vec{\bigtriangledown}\frac{\partial}{\partial t}\phi+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=\frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ}.$$

Dividendo tutti i termini per c^2 otteniamo:

$$\vec{\bigtriangledown}(\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}+\frac{1}{c^2}\cdot\vec{\bigtriangledown}\frac{\partial}{\partial t}\phi+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\vec{A}=\frac{\vec{j}}{c^2\epsilon_\circ}$$

cioè

$$\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\vec{A}-\Delta\vec{A}+\vec{\bigtriangledown}\left(\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A}+\frac{\partial}{c^2\partial t}\phi\right)=\frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ c^2}.$$

Tenendo conto della gauge di Lorentz otteniamo:

$$\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ c^2} \tag{4.6}$$

che è l'equazione per il potenziale vettore.

Dall'equazione (1), tenendo conto della (4.2), otteniamo:

$$\bigtriangledown\cdot\vec{E}=\vec{\bigtriangledown}\cdot\left(-\vec{\bigtriangledown}\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}$$

$$\text{ovvero}\quad -\Delta\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A}=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}.$$

Sommando ad ambo i membri la quantità $\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\phi$ otteniamo:

$$-\Delta\phi+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\phi=\frac{\rho}{\epsilon_\circ}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\bigtriangledown}\cdot\vec{A}+\frac{\partial}{c^2\partial t}\phi\right).$$

Tenendo conto della gauge di Lorentz si ha:

$$\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\phi - \Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_\circ} \tag{4.7}$$

che è l'equazione per il potenziale scalare.

4.2 Operatori differenziali relativistici

Introduciamo ora gli operatori differenziali che estendono al formalismo relativistico, caratterizzato da quattro variabili spazio-temporali, i tradizionali operatori *divergenza*, *gradiente* e *laplaciano* cheagiscono come operatori differeniali rispetto a tre variabili spaziali.

Cominciamo dal gradiente spaziale definito da $\vec{\bigtriangledown} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Aggiungiamo la componente temporale per ottenere un "gradiente" a quattro componenti:

$$\underline{\hat{\bigtriangledown}} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{4.8}$$

Se consideriamo una qualunque funzione scalare $f(\underline{x})$, le cui variabili sono le coordinate relative ad un sistema di riferimento inerziale Σ, il vettore $\underline{\hat{\bigtriangledown}} f(\underline{x})$ non è un quadrivettore, nel senso che $\underline{\hat{\bigtriangledown}}' g(\underline{x}') \neq L\underline{\hat{\bigtriangledown}} f(\underline{x})$, dove g è la funzione delle coordinate $\underline{x}'$ di un altro sistema inerziale Σ', legato a Σ dalla trasformazione di Lorentz L, definita da $g(\underline{x}') = f(\underline{x})$ per $\underline{x}' = L\underline{x}$ (in altri termini, g è definita come la funzione che nel punto $\underline{x}'$ di Σ' assume il valore numerico assunto da f nel punto $\underline{x}$ di Σ che corrispone a $\underline{x}'$). Vedremo ora che è possibile definire un gradiente relativistico $\underline{\bigtriangledown}$ che generalizza il tradizionale gradinte spaziale in maniera da soddisfare la seguente proprietà di covarianza:

$$\underline{\bigtriangledown}'\phi(\underline{x}') = L \cdot \underline{\bigtriangledown}\phi(\underline{x}). \tag{4.9}$$

Verifichiamo che (4.8) non soddisfa la (4.9). Infatti, applicando $\underline{\hat{\bigtriangledown}}'$ alla funzione $g(\underline{x}') = f(\underline{x})$ otteniamo:
$\hat{\bigtriangledown}'_\circ g(\underline{x}') = \frac{\partial}{c\partial t'} g(\underline{x}') = \frac{\partial}{c\partial t'} f(\underline{x}) =$

$= \frac{\partial}{c\partial t} f \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x} f \cdot \frac{\partial x}{c\partial t'} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial}{c\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x} f \cdot \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{c\partial t} f + \frac{v}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f\right] =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\hat{\bigtriangledown}_\circ f + \frac{v}{c} \cdot \hat{\bigtriangledown}_x f\right]$

e

$\hat{\bigtriangledown}'_x g(x') = \frac{\partial}{\partial x'} g(x') = \frac{\partial}{\partial x'} f(x) =$
$= \frac{\partial}{\partial t} f \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x} f \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} =$
$= \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} f =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x} f\right] =$
$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{v}{c^2} \cdot \hat{\bigtriangledown}_\circ f + \hat{\bigtriangledown}_x f\right].$

Come possiamo constatare, il gradiente quadridimensionale (4.8) non si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz poichè $\hat{\bigtriangledown}_\circ{}'$ e $\hat{\bigtriangledown}_x{}'$ come appena calcolati, sono diversi dalle prime due componenti di $L\underline{\hat{\bigtriangledown}}$.

Per ottenere una generalizzazione del gradiente che soddisfa la (4.9) dobbiamo definire il *quadrigradiente* come:

$$\underline{\bigtriangledown} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{4.10}$$

Utilizzando tale definizione nel nostro caso si ha:

$$\bigtriangledown'_\circ g = \frac{\partial}{c\partial t'} f = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\bigtriangledown_\circ f - \frac{v}{c} \cdot \bigtriangledown_x f\right] \tag{4.11}$$

e

$$\bigtriangledown'_x g = -\frac{\partial}{\partial x'} f = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\bigtriangledown_x f - \frac{v}{c} \cdot \bigtriangledown_\circ f\right]. \tag{4.12}$$

Adottiamo la (4.10) come definizione di quadrigradiente. Vale il seguente risultato.

Teorema 4.1. Sia ψ una funzione scalare *invariante* della variabile vettoriale $\underline{x} = (ct, \vec{x})$, cioè tale che $\psi(\underline{x}') = \psi(\underline{x})$ per ogni $\underline{x}$ e $\underline{x}' = L\underline{x}$. Allora

$$\underline{\bigtriangledown}'\psi(\underline{x}') = L\underline{\bigtriangledown}\psi(\underline{x}).$$

Detto in altri termini, dato un qualunque campo scalare invariante, il suo quadrigradiente è un campo quadrivettoriale.

Introduciamo ora la generalizzazione relativistica della divergenza, cioè la *quadridivergenza* di un campo $\underset{\sim}{C} = (C_\circ, C_x, C_y, C_z)$:

$$\underline{\bigtriangledown} \cdot \underset{\sim}{C} = \frac{\partial}{c\partial t}C_\circ + \frac{\partial}{\partial x}C_x + \frac{\partial}{\partial y}C_y + \frac{\partial}{\partial z}C_z \tag{4.13}$$

che è un operatore differenziale che ad un campo quadrivettoriale associa uno scalare.

La quadridivergenza di un campo quadrivettoriale è un campo scalare invariante. Infatti, sia $\underset{\sim}{C} = (C_\circ, C_x, C_y, C_z)$ un campo quadrivettoriale. (Per semlpificare la trattazione consideriamo solo due dimensioni). Allora

$$C'_\circ = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[C_\circ - \frac{v}{c}C_x\right]$$

e

$$C'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[-\frac{v}{c}C_\circ + C_x\right].$$

Calcoliamo la quadridivergenza $\underline{\bigtriangledown}'\underset{\sim}{C}'$.

Per la derivata temporale temporale si ha:

$\bigtriangledown'_\circ C'_\circ = \frac{\partial}{c\partial t'}C'_\circ =$

$= \frac{\partial}{c\partial t'}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(C_\circ - \frac{v}{c}C_x\right)\right] =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{c\partial t'}C_\circ - \frac{v}{c} \cdot \frac{\partial}{c\partial t'}C_x\right] =$

$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{c\partial t}C_\circ \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}C_\circ \cdot \frac{\partial x}{c\partial t'} - \frac{v}{c} \cdot \frac{\partial}{c\partial t}C_x \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} - \frac{v}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial x}C_x \cdot \frac{\partial x}{c\partial t'}\right] =$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{\partial}{c\partial t}C_\circ+\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}C_\circ-\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{\partial}{c\partial t}C_x-\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}C_x\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\cdot\left[\triangledown_\circ C_\circ+\frac{v}{c}\cdot\triangledown_x C_\circ-\frac{v}{c}\cdot\triangledown_\circ C_x-\frac{v^2}{c^2}\cdot\triangledown_x C_x\right]. \qquad (4.14)$$

Passiamo alla derivata spaziale:

$$\triangledown'_x C'_x=\frac{\partial}{\partial x'}C'_x=\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left(-\frac{v}{c}C_\circ+C_x\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left[-\frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial x'}C_\circ+\frac{\partial}{\partial x'}C_x\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left[-\frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}C_\circ\cdot\frac{\partial t}{\partial x'}-\frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial x}C_\circ\cdot\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t}C_x\cdot\frac{\partial t}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial x}C_x\cdot\frac{\partial x}{\partial x'}\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\cdot\left[-\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{\partial}{c\partial t}C_\circ-\frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial x}C_\circ+\frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{c\partial t}C_x+\frac{\partial}{\partial x}C_x\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\cdot\left[-\frac{v^2}{c^2}\cdot\triangledown_\circ C_\circ-\frac{v}{c}\cdot\triangledown_x C_\circ+\frac{v}{c}\cdot\triangledown_\circ C_x+\triangledown_x C_x\right]. \qquad (4.15)$$

Allora:

$$\triangledown'_\circ C'_\circ+\triangledown'_x C'_x=\triangledown_\circ C_\circ+\triangledown_x C_x.$$

Abbiamo trovato, quindi, che la quadridivergenza di un quadrivettore è uno scalare invariante, cioè:

$$(\underline{\triangledown}'\cdot\underline{C}')(\underline{x}')=(\underline{\triangledown}\cdot\underline{C})(\underline{x}).$$

Vediamo, ora, come poter definire la versione relativistica del laplaciano.

In tre dimensioni il laplaciano è definito come la divergenza del gradiente, cioè:

$$\Delta=\underline{\triangledown}\cdot\vec{\triangledown}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Questo ci suggerisce di definire un operatore relativistico come la quadridivergenza del quadrigradiente. Allora poniamo:

$$\Box\phi=(\underline{\triangledown}\cdot\underline{\triangledown})\phi=$$

$$=\left(\frac{\partial}{c\partial t}\cdot\frac{\partial}{c\partial t}\right)\phi-\left[\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\phi-\left[\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\cdot\phi-\left[\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi=$$

$$=\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\phi-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi=$$

$$= \tfrac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\phi - \Delta\phi. \tag{4.16}$$

L'operatore $\Box$ è noto come operatore *dalembertiano.*

Se applichiamo il dalembertiano ad un campo quadrivettoriale $\underline{C}$, otteniamo un nuovo campo quadridimensionale:

$$\Box\underline{C} = (\Box C_\circ, \Box C_x, \Box C_y, \Box C_z). \tag{4.17}$$

Il dalembertiano possiede la seguente notevole proprietà di covarianza

$$\Box f(\underline{x}) = \Box' g(\underline{x}')\,, \quad \text{dove } g(\underline{x}') = f(\underline{x}) \text{ e } \underline{x}' = L\underline{x} \tag{4.18}$$

per ogni funzione scalare f. Infatti, consideriamo due sistemi di riferimento Σ e Σ'. (Come prima, per semplicità lavoriamo in due dimensioni)
In Σ

$$\Box = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

In Σ'

$$\Box' = \frac{\partial^2}{c^2\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}. \tag{4.19}$$

Andiamo a ricavare le quantità $\frac{\partial^2}{c^2\partial t'^2}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x'^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{c\partial t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'}\cdot\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial x}{c\partial t'}\cdot\frac{\partial}{\partial x} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left[\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial^2}{c^2\partial t'^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\left[\frac{\partial}{c\partial t'}\cdot\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{v}{c}\cdot\frac{\partial}{c\partial t'}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right] = \\
= \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})}&\cdot\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \frac{v}{c}\cdot\frac{\partial^2}{c\partial t\partial x} + \frac{v}{c}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + \frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] = \\
&= \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\cdot\left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + 2\frac{v}{c}\cdot\frac{\partial^2}{c\partial t\partial x} + \frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]
\end{aligned} \tag{4.20.a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{v}{c} \cdot \frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \cdot \left[\frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + 2\frac{v}{c} \cdot \frac{\partial^2}{c\partial t \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \qquad (4.20.b)$$

Sostituendo nella (4.19) i risultati trovati nelle (4.20), otteniamo:

$$\Box' = \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \cdot \left[\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + 2\frac{v}{c} \cdot \frac{\partial^2}{c\partial t\partial x} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - 2\frac{v}{c} \cdot \frac{\partial^2}{c\partial t\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \cdot \left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Box.$$

Abbiamo, così, dimostrato l'invarianza del dalembertiano.

Osserviamo che se $\underline{C}$ è un quadrivettore, cioè $\underline{C}$ è tale che

$$\underline{C}'(\underline{x}') = L\underline{C}(\underline{x}), \qquad \underline{x}' = L(\underline{x}),$$

applicando il dalembertiano a

$$C'_\circ(\underline{x}') = \frac{C_\circ(\underline{x}) - \frac{v}{c}C_x(\underline{x})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

si ha:

$$(\Box' C'_\circ)(\underline{x}') = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\Box' C_\circ(\underline{x}) - \frac{v}{c} \cdot \Box' C_x(\underline{x})\right) =$$

$$= \frac{\Box C_\circ(\underline{x}) - \frac{v}{c} \cdot \Box C_x(\underline{x})}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = [L\Box\underline{C}]_\circ)(\underline{x}).$$

In generale, quindi

$$(\Box'\underline{C}')(\underline{x}') = L(\Box\underline{C})(\underline{x}). \qquad (4.21)$$

4.3 Trasformazione dei potenziali

Possiamo utilizzare le proprietà degli operatori relativistici appena studiati per ottenere le leggi di trasformazione dei potenziali nel modo descritto all'inizio del capitolo. Abbiamo visto, nel paragrafo (4.1), che per i potenziali valgono le equazioni

$$\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ c^2} \tag{4.6}$$

e

$$\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\phi - \Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_\circ} \tag{4.7}$$

Mediante la notazione introdotta nel paragrafo precedente possiamo riscrivere tali equazioni come

$$\Box(\phi/c) = \frac{\rho c}{\epsilon_\circ c^2} \quad , \quad \Box\vec{A} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_\circ c^2}.$$

I membri destri di queste equazioni sono, a meno di una costante moltiplicativa, la componente temporale e la componente spaziale della quadridensità di corrente (diviso $\epsilon_\circ c^2$) che, come abbiamo dimostrato nel capitolo precedente, è un quadrivettore. Allora esse possono essere scritte come un'unica equazione

$$\Box\underline{A} = \frac{\underline{j}}{\epsilon_\circ c^2} \tag{4.22}$$

dove $\underline{A} = \begin{bmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{bmatrix}$ è detto *quadripotenziale*.

Applicando a questa equazione la trasformazione di Lorentz L otteniamo

$$\Box L\,\underline{A}(\underline{x}) = \frac{L\,\underline{j}(\underline{x})}{\epsilon_\circ c^2} = \frac{\underline{j}'(\underline{x}')}{\epsilon_\circ c^2}$$

perchè $\underline{j}$ è un quadrivettore. Se al membro sinistro utilizziamo le proprietà del dalembertiano otteniamo

$$\Box'\underline{A}^*(\underline{x}') = \frac{\underline{j}'(\underline{x}')}{\epsilon_\circ c}$$

dove $\underline{A}^*$ è il campo definito come

$$\underline{A}^*(\underline{x}') = L\,\underline{A}(L^{-1}\,\underline{x}').$$

Dunque $\underline{A}^*$ soddisfa in Σ' le leggi di Maxwell (4.22) per il quadripotenziale; pertanto può essere identificato con il quadripotenziale $\underline{A}'$ rispetto a Σ':

$$\underline{A}' = \underline{A}^* = L\,\underline{A}. \tag{4.23}$$

Quindi, il quadripotenziale si trasforma come un quadrivettore, cioè è un quadrivettore.

Siccome la (4.22) vale se $\underline{A}$ soddisfa la gauge di Lorentz (4.4), affinchè (4.23) la soddisfi deve valere

$$\bigtriangledown' \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t'}\phi' = 0,$$

cioè la quadridivergenza del quadrivettore $\underline{A}^*$ deve essere nulla in Σ'. Ma questo è immediato da verificare poichè la quadridivergenza di un quadrivettore è invariante.

4.4 Il quadripotenziale di una carica in moto

Scriviamo, ora, in maniera esplicita le leggi di trasformazione per il potenziale scalare ϕ e per il potenziale vettore $\vec{A}$ in un sistema di riferimento inerziale Σ', in moto rispetto a Σ, in funzione delle coordinate di Σ.
Scegliamo, quindi, un sistema di riferimento inerziale Σ' che si muove di moto relativo uniforme con velocità $\vec{v}$ (nella direzione x) rispetto al sistema di riferimento inerziale Σ.

Poichè abbiamo dimostrato che il quadripotenziale $\underline{A} = \begin{bmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{bmatrix}$ è un quadrivettore, le equazioni di trasformazione devono avere la stessa forma delle equazioni di trasformazione di Lorentz; quindi, ϕ si trasformerà come il tempo t mentre $\vec{A}$ si trasformerà come $\vec{x}$:

$$\begin{cases} \phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c^2}\phi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z. \end{cases} \tag{4.24}$$

Se consideriamo una carica q, in quiete rispetto a Σ', posta nell'origine del riferimento Σ', osserviamo che rispetto a Σ essa si troverà nel punto $x = vt$. Vogliamo calcolare i potenziali vettore e scalare dei campi generati da tale carica.

In Σ' il potenziale scalare è dato da:

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ r'} \tag{4.25}$$

dove r' rappresenta la distanza tra la carica q ed il punto in cui si calcola il campo, misurata in Σ'. Il potenziale vettore $\vec{A}'$, invece, è nullo.
Possiamo vedere, allora, quale sarà l'espressione dei potenziali $\vec{A}$ e ϕ nel sistema di riferimento Σ invertendo nella (4.24) le coordinate accentate con quelle non accentate e cambiando di segno la velocità:

$$\begin{cases} \phi = \frac{\phi' + vA'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ A_x = \frac{A'_x + \frac{v}{c^2}\phi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z. \end{cases} \tag{4.26}$$

Sostituendo in tali equazioni i risultati trovati nella (4.25) e tenendo conto del fatto che $\vec{A}' = 0$, si ha:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ r'} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

Volendo esprimere r' in funzione delle coordinate di Σ si ha:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y^2 + z^2}}.$$

Seguendo lo stesso procedimento per il potenziale vettore, troviamo che

$$A_x = \frac{\frac{v}{c^2}\phi'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v}{c^2}q}{4\pi\epsilon_\circ \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + y^2 + z^2}}\ , \quad A_y = A_z = 0.$$

4.5 Trasformazione diretta del campo elettromagnetico

Conoscendo le leggi di trasformazione per i potenziali e sapendo come si esprimono i campi elettrici e magnetici per mezzo dei potenziali, siamo in grado di determinare le leggi di trasformazione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ per vedere come si presentano in un sistema di riferimento inerziale Σ' in moto rispetto ad un altro sistema di riferimento inerziale Σ. Per iniziare consideriamo il campo elettrico $\vec{E}$ che, come visto in precedenza, si ottiene dai potenziali mediante l'equazione

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\bigtriangledown}\phi$$

cioè

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\bigtriangledown}\phi. \tag{4.27}$$

Consideriamo il quadripotenziale $\underline{A} = \begin{bmatrix} \phi/c = A_\circ \\ \vec{A} \end{bmatrix}$ ed il suo trasformato $\underline{A}' = L\,\underline{A} = \begin{bmatrix} \phi'/c = A'_\circ \\ \vec{A}' \end{bmatrix}$, dove

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se la velocità relativa di Σ' rispetto a σ è $\vec{v} = (v, 0, 0)$, la componente x di $\vec{E}'$ coincide con la componente parallela al moto ($\|$):

$$E'_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_x$$

dove

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (\phi - vA_x) \tag{4.28}$$

e

$$A'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{v}{c^2}\phi + A_x\right). \tag{4.29}$$

$\Rightarrow E'_x = -\frac{\partial}{\partial x'}A'_\circ - \frac{\partial}{\partial t'}A'_x =$

$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}A'_\circ \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t}A'_\circ \cdot \frac{\partial t}{\partial x'}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}A'_x \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}A'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial t'}\right) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}A'_\circ + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}A'_\circ + \frac{\partial}{\partial t}A'_x + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A'_x\right] =$

(sostituendovi la (4.28) e la (4.29))

$= -\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi - vA_x) + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\phi - vA_x) + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{v}{c^2}\phi + A_x\right) + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{v}{c^2}\phi + A_x\right)\right] =$

$= -\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\phi - v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\phi - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}A_x - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{\partial}{\partial t}A_x - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\phi + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A_x\right] =$

$$= -\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \cdot \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi + \frac{\partial}{\partial t}A_x\right)\right] = E_x. \tag{4.30}$$

Passiamo ora alle componenti perpendicolari alla direzione del moto relativo:

$E'_y = -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_y =$

$= -\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi' \cdot \frac{\partial t}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\phi' \cdot \frac{\partial y}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}A'_y \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}A'_y \cdot \frac{\partial x}{\partial t'}\right) =$

$= -\frac{\partial}{\partial y}\phi' - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}A'_y + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A'_y\right) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi - vA_x) + \frac{\partial}{\partial t}A_y + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A_y\right] =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y}\phi - v \cdot \frac{\partial}{\partial y}A_x + \frac{\partial}{\partial t}A_y + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A_y\right] =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[-E_y + v \cdot (\vec{\bigtriangledown} \wedge \vec{A})_z\right] =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(E_y - vB_z); \tag{4.31}$$

$E'_z = -\frac{\partial}{\partial z'}\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}A'_z =$

$= -\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi' \cdot \frac{\partial t}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z}\phi' \cdot \frac{\partial z}{\partial z'}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}A'_z \cdot \frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}A'_z \cdot \frac{\partial x}{\partial t'}\right) =$

$= -\frac{\partial}{\partial z}\phi' - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}A'_z + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A'_z\right] =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi - vA_x) + \frac{\partial}{\partial t}A_z + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A_z\right] =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial z}\phi - v \cdot \frac{\partial}{\partial z}A_x + \frac{\partial}{\partial t}A_z + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}A_z\right] =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[-E_z - v \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_y \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(E_z + vB_y \right). \tag{4.32}$$

Possiamo riscrivere le trasformazioni del campo in modo del tutto generale nella seguente forma:

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ E'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (E_{\perp} + vR_{\frac{\pi}{2}} B_{\perp}), \end{cases} \tag{4.33}$$

dove $R_{\frac{\pi}{2}}$ sta ad indicare che il campo è ruotato di 90° lungo il moto.
In questo modo si ha che la componente del campo elettrico parallela alla direzione del moto rimane invariata mentre le componenti perpendicolari alla direzione del moto si trasformano in campi elettrici e magnetici mescolati.

Passiamo ora al campo magnetico che, come visto in precedenza, è dato dall'equazione:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla}' \wedge \vec{A}'. \tag{4.34}$$

Iniziamo dalla componente parallela alla direzione del moto relativo:

$$B'_x = \frac{\partial}{\partial y'} A'_z - \frac{\partial}{\partial z'} A'_y = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y = B_x. \tag{4.35}$$

Vediamo ora cosa accade alle componenti ortogonali alla direzione del moto:

$$B'_y = \frac{\partial}{\partial z'} A'_x - \frac{\partial}{\partial x'} A'_z = \frac{\partial}{\partial z} A'_x - \frac{\partial}{\partial x'} A'_z =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{\partial}{\partial z} A_x \right) - \frac{\partial}{\partial x} A_z \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial t} A_z \cdot \frac{\partial t}{\partial x'} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[-\frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} A_z \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{v}{c^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{\partial}{\partial t} A_z \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right); \tag{4.36}$$

$$B'_z = \frac{\partial}{\partial x'} A'_y - \frac{\partial}{\partial y'} A'_x =$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{\partial}{\partial x'} A_y - \tfrac{\partial}{\partial y} A'_x = \\
&= \tfrac{\partial}{\partial t} A_y \cdot \tfrac{\partial t}{\partial x'} + \tfrac{\partial}{\partial x} A_y \cdot \tfrac{\partial x}{\partial x'} - \tfrac{\partial}{\partial y} A'_x = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\tfrac{v}{c^2} \cdot \tfrac{\partial}{\partial t} A_y + \tfrac{\partial}{\partial x} A_y + \tfrac{v}{c^2} \cdot \tfrac{\partial}{\partial y} \phi - \tfrac{\partial}{\partial y} A_x \right) = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[\tfrac{\partial}{\partial x} A_y - \tfrac{\partial}{\partial y} A_x + \tfrac{v}{c^2} \cdot \left(\tfrac{\partial}{\partial y} \phi + \tfrac{\partial}{\partial t} A_y \right) \right] = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(B_z - \tfrac{v}{c^2} E_y \right) . \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

Così come per il campo elettrico, possiamo riscrivere anche le leggi di trasformazione del campo magnetico in modo del tutto generale:

$$
\begin{cases} B'_\parallel = B_\parallel \\ B'_\perp = \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(B_\perp + \tfrac{v}{c^2} R_{\frac{\pi}{2}} E_\perp \right). \end{cases} \qquad (4.38)
$$

In tal modo si ha che la componente del campo magnetico parallela alla direzione del moto relativo resta invariata mentre le componenti perpendicolari alla direzione del moto si trasformano in campi elettrici e magnetici mescolati.

In conclusione, i campi elettromagnetici si trasformano secondo le seguenti relazioni:

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\
E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (E_y - vB_z) & B'_y &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(B_y + \tfrac{v}{c^2} E_z \right) \\
E'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot (E_z + vB_y) & B'_z &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(B_z - \tfrac{v}{c^2} E_y \right) .
\end{aligned}
$$

5. DINAMICA RELATIVISTICA

5.1. Equazione del moto di una particella lentamente accelerata da campi elettromagnetici

Dopo aver individuato le leggi di trasformazione dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in accordo con le trasformazioni di Lorentz, siamo in grado di determinare una nuova legge dinamica che sia in accordo con la relatività. Il criterio base consiste nell'assumere che il valore delle accelerazioni previsto dalla Fisica classica tende a quello valido in Relatività al tendere a zero del rapporto $\frac{v}{c}$, dove v è il valore delle velocità coinvolte nel fenomeno in studio.

Secondo la Fisica Classica l'accelerazione di una particella con carica elettrica q soggetta a un campo elettrico $\vec{E}$ e ad un campo magnetico $\vec{B}$ è proporzionale alla cosiddetta forza di Lorentz $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Seguendo il criterio enunciato sopra, assumeremo che se la velocità della particella è nulla allora

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \lambda \cdot q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La costante di proporzionalità λ può essere operazionalmente definita come il limite $\lambda = \lim_{|\vec{a}| \to 0} \frac{|\vec{a}|}{|q\vec{E}|}$. Il suo reciproco $m_0 = \frac{1}{\lambda}$ ha le dimensioni fisiche di una massa. Pertanto formuliamo la seguente legge dinamica relativistica di base.

(DB) *Una particella con carica elettrica q è caratterizzata da una costante m_0, detta massa a riposo, tale che se la particella è ferma ad un dato istante t_0 in un sistema inerziale e subisce interazioni di natura esclusivamente elettromagnetica, allora*

$$\vec{a}(t_0) = \left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right)(t_0) = \frac{1}{m_0}q(\vec{E} + \vec{v}(t_0) \wedge B) = \frac{1}{m_0}q\vec{E}\,, \qquad (5.1)$$

dove $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono il campo elettrico e mangetico che agiscono sulla particella all'istante t_0.

Supponiamo, ora, che la carica si stia muovendo in Σ lungo l'asse x con velocità $\vec{v}$. Ad ogni istante t possiamo considerare un sistema di riferimento a riposo Σ_p. In Σ_p la carica risulta ferma, $v_p = 0$ e quindi sussistono le condizioni per applicare, in Σ_p, la (5.1):

$$m_0 \vec{a}_p = q\vec{E}_p. \tag{5.2}$$

Questa è l'equazione del moto in Σ_p, che risulta come immediata conseguenza del nostro criterio di base. Adesso, mediante le leggi di trasformazione relativistiche possiamo derivare dalla (5.2) la relazione esistente in Σ tra l'accelerazione coordinata $\vec{a}$ e i campi ellettromagnetici $\vec{E}$, $\vec{B}$, cioè, l'equazione del moto in Σ. Le relazioni (3.16) tra accelerazione a riposo e l'accelerazione coordinata, cioè:

$$\begin{cases} a_x = a_{p_x}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}} \\ a_y = a_{p_y}(1 - \frac{v^2}{c^2}) \\ a_z = a_{p_z}(1 - \frac{v^2}{c^2}) \end{cases}$$

possono essere utilizzate nella (5.2), ottenendo

$$\begin{cases} a_x = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}} \frac{q}{m_\circ} E_{p_x} \\ a_y = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{q}{m_\circ} E_{p_y} \\ a_z = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{q}{m_\circ} E_{p_z}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Tenendo conto delle leggi di trasformazione dei campi elettromagnetici, la (5.3) diventa:

$$\begin{cases} a_x = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}} \frac{q}{m_\circ} E_x \\ a_y = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{q}{m_\circ} \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ a_z = (1 - \frac{v^2}{c^2}) \frac{q}{m_\circ} \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Con tali risultati l'equazione del moto della carica diventa:

$$\begin{cases} q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})_x = \frac{m_\circ}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\,a_x \\ \frac{q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_\circ}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\,a_y \\ \frac{q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_\circ}{(1-\frac{v^2}{c^2})}\,a_z. \end{cases} \tag{5.5}$$

Ricordando l'espressione della quadriaccelerazione

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{(v/c)a_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \\ \frac{a_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \\ \frac{a_y}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \\ \frac{a_z}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \end{bmatrix},$$

possiamo scrivere la (5.5) nel seguente modo:

$$\frac{q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \begin{bmatrix} m_\circ\,\frac{a_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \\ m_\circ\,\frac{a_y}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \\ m_\circ\,\frac{a_z}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Quindi, l'equazione del moto relativistica assume la seguente forma:

$$\vec{F}_L = \frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5.6}$$

In realtà, nel derivare la (5.6) non si è tenuto conto dell'effetto della radiazione elettromagnetica emessa dalla carica. Il problema interviene poichè, come previsto dalla teoria elettromagnetica, quando una carica accelera emette della radiazione elettromagnetica. Pertanto l'equazione del moto (5.6) può essere ritenuta valida solo se l'effetto di questa radiazione sul moto della particella può essere trascurato; ciò accade se l'accelerazione è sufficientemente piccola. Per questo motivo, la (5.6) è l'equazione del moto di una particella *lentamente* accelerata da campi elettromagnetici.

Osservazione 5.1. Siamo stati in grado di formulare l'equazione del moto per una particella sottoposta a campi elettromagnetici in quanto conosciamo le leggi di trasformazione dei campi elettrici e magnetici; non possiamo, però, formulare un'equazione del moto in generale in quanto non è possibile trovare le leggi di trasformazione per i campi gravitazionali in relatività speciale. Di questa estensione del problema dinamico si occupa la teoria della relatività generale.

5.2. Meccanica Analitica Relativistica.

Dopo aver stabilito le equazioni del moto relativistiche, possiamo porre le basi di una meccanica analitica relativistica. In particolare, daremo la formulazione lagrangiana e quella hamiltoniana della dinamica relativistica di una particella carica lentamente accelerata da campi elettromagnetici.

5.2.1 Formulazione lagrangiana

In meccanica classica non-relativistica, un sistema di particelle con masse m_1, m_2, ...,m_n è un sistema *lagrangiano* se le equazioni del moto sono equivalenti alle equazioni di Elulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i = 1, ..., n \ , \tag{5.7}$$

dove L, la *Lagrangiana* del sistema, è funzione reale delle posizioni $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ..., $\vec{x}_n$ delle rispettive particelle, delle corrispondenti velocità $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$, e del tempo t. Per un sistema conservativo la lagrangiana è

$$L = T - U \tag{5.8}$$

dove T ed U rappresentano rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale; cioè

$$\Rightarrow L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {v_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} u_i(\vec{x}_i) + \sum_{i<j} u_{ij}(|x_i - x_j)|.$$

In tale espressione la quantità $u_i(\vec{x}_i)$ rappresenta l'energia potenziale della i-esima particella in assenza di altre particelle, mentre $u_{ij}(|x_i - x_j|)$ tiene conto delle posizioni reciproche e dà luogo al principio di azione e reazione.

Per un sistema lagrangiano, sotto opportune condizioni di regolarità di L, una n-upla di funzioni $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$, ..., $\vec{x}_n(t)$ è soluzione delle equazioni (5.7) se e soltanto se l'integrale d'*azione*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), ..., \vec{x}_n(t); \dot{\vec{x}}_1(t), \dot{\vec{x}}_2(t), ..., \dot{\vec{x}}_n(t); t)\, dt$$

assume il valore minimo rispetto all'integrale $\int_{t_1}^{t_2} L(\vec{x}_1(t) + \delta\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t) + \delta\vec{x}_2(t), ..., \vec{x}_n(t)+\delta\vec{x}_n(t); \dot{\vec{x}}_1(t)+\delta\dot{\vec{x}}_1(t), \dot{\vec{x}}_2(t)+\delta\dot{\vec{x}}_2(t), ..., \dot{\vec{x}}_n(t)+\delta\dot{\vec{x}}_n(t); t)\, dt$, per ogni scelta delle *variazioni* $\delta\vec{x}_i(t)$ tali che $\delta\vec{x}_i(t_1) = \delta\vec{x}_i(t_2) = 0$. Questa equivalenza è il contenuto del *principio di Hamilton*.

Per estendere la formulazione lagrangiana alla dinamica di una particella relativistica lentamente accelerata da campi elettromagnetici, bisogna individuare una funzione lagrangiana $L(\vec{x}, \vec{v}, t)$, per la quale le equazioni di Eulero-Lagrange (5.7) coincidano con l'equazione del moto relativistica (5.6), cioè L deve essere tale che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_L = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_\circ \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Cominciamo ad affrontare il caso di una particella libera. In questo caso occorre trovare una lagrangiana per la quale la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange sia, ovviamente, $\vec{v} = costante$. In realtà esistono tante funzioni L che soddisfano questa condizione. Un criterio che seleziona drasticamente la famiglia delle possibili lagrangiane è espresso dalle equazion

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}, \quad \text{ovvero} \quad \Rightarrow \frac{m_\circ v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial L}{\partial v_i}, \tag{5.9}$$

che richiedono che i momenti coniugati coincidano con i momenti, come accade nel formalismo lagrangiano non-relativistico. Le (5.9) sono delle equazioni differenziali, per l'incognita L del primo ordine nelle variabili v_i, che hanno come soluzione

$$L = a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + c. \tag{5.10}$$

Derivando tale equazione rispetto a v_i, riusciamo a determinare il valore della costante "a":

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{-\frac{v_i}{c^2}a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

dalla (5.9) si ottiene

$$\frac{m_\circ v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-a v_i}{c^2 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{qunidi } \; a = -m_\circ c^2.$$

Sostituendo tale valore nella (5.10) troviamo che la lagrangiana per una particella libera è:

$$L = -m_\circ c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + c. \tag{5.11}$$

Si verifica immediatamente che sostituendo tale lagrangiana nelle equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene il risultato corretto $v_i = \mathit{costante}$.

Passiamo ora al caso più generale di una particella non libera. Nella fisica non-relativistica, la lagrangiana di una particella lentamente accelerata da un campo elettromagnetico è:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}. \tag{5.12}$$

Verifichiamo che, nel caso relativistico, sommando alla lagrangiana (5.11) gli ultimi due termini figuranti nella (5.12), si trova che le equazioni di Eulero-Lagrange coincidono con le corrette equazioni del moto relativistiche (5.6), cosicchè la lagrangiana relativistica per una particella non libera potrà essere scritta come:

$$L = -m_\circ c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}. \tag{5.13}$$

Infatti, derivando la (5.13) rispetto a v_i troviamo:

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{2v_i}{c^2}\right) \cdot (-m_\circ c^2) + qA_i = \frac{m_\circ v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_i$$

$$\text{cioè } \; \frac{\partial L}{\partial v_i} = p_i + qA_i. \tag{5.14}$$

Derivando rispetto ad x_i, invece, troviamo:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i};$$

ma abbiamo visto nel capitolo 4 che $-\vec{\bigtriangledown}\phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, allora

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = qE_i + q\,\frac{\partial A_i}{\partial t} + q\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i}. \tag{5.15}$$

Sostituendo la (5.14) e la (5.15) nelle equazioni di Eulero-Lagrange, otteniamo:

$$\frac{d}{dt}\left(p_i + qA_i\right) - qE_i - q\frac{\partial A_i}{\partial t} - q\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{cioè}\quad \frac{dp_i}{dt} + q\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}A_i - \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) - qE_i = 0. \tag{5.16}$$

Si verifica direttamente che

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}A_i - \vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = -\left(\vec{v}\wedge\vec{B}\right)_i.$$

Allora la (5.16) diventa:

$$\frac{dp_i}{dt} + q\frac{\partial A_i}{\partial t} - q(\vec{v}\wedge\vec{B})_i - q\frac{\partial A_i}{\partial t} - qE_i = 0$$

$$\text{cioè}\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}).$$

Quindi, la (5.12) può essere scelta come lagrangiane di una particella relativistica lentamente accelerata da un campo elettromagnetico.

5.2 Formulazione lagrangiana covariante

Diamo ora una formulazione covariante della meccanica lagrangiana presentata nel precedente paragrafo. Per descrivere il moto di una particella possiamo usare il parametro invariante τ, ovvero il tempo proprio che, come visto precedentemente, è legato al tempo coordinato t dalla relazione

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Usando questa relazione, l'integrale d'azione diventa

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(\vec{x}(t(\tau)), \vec{v}(t(\tau)), t(\tau)) \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} L_{cov}(\vec{x}, \vec{v}, \tau),$$

dove

$$L_{cov}(\vec{x}, \vec{v}, \tau) = \frac{L(\vec{x}, \vec{v}, t(\tau))}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Allora, facendo uso della (5.12), possiamo definire la lagrangiana covariante come la funzione

$$L_{cov}(\vec{x}, \vec{v}, \tau) = -m_0 c^2 - q \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \phi/c - \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{A} \right).$$

Ricordando l'espressione della quadrivelocità

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vec{u} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v} \end{bmatrix},$$

possiamo esprimere la L_{cov} come:

$$L_{cov} = -m_\circ c^2 - q(u_0 \phi/c - \vec{u} \cdot \vec{A}) = -m_\circ c^2 - q \underline{u} \cdot_M \underline{A}.$$

La funzione L_{cov} risulta quindi la somma di un termine costante invariante e di un prodotto Minkowskiano tra due quadrivettori, il quadripotenziale e la quadrivelocità, e pertanto deve essere essa stessa un invariante.

5.3 Formulazione hamiltoniana

Come per ogni sistema lagrangiano, se $L(\vec{q}; \vec{v}; t)$ è la lagrangiana di una particella, possiamo introdurre una funzione H, detta *hamiltoniana*, definita come:

$$H = \sum_{i=1} \tilde{p}_i v_i - L(\vec{q}; \vec{v}; t), t, \tag{5.17}$$

dove la nuova variabile

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial L(q;\dot{q};t)}{\partial v_i} \tag{5.18}$$

è detto *momento cinetico*.

Per un sistema lagrangiano è sempre possibile risolvere il sistema (5.18) rispetto alle variabili v_i; ciò significa che possiamo esprimere le v_i come funzioni delle nuove variabili $\tilde{q}_i = q_i$, $\tilde{p}_i$, $\tilde{t} = t$. Questa trasformazione di variabili è chiamata trasformazione di *Legendre*. Se la funzione hamiltoniana viene espressa come funzione delle nuove variabili, le equazioni del moto rispetto alle nuove variabili assumono la forma delle equazioni di *Hamilton*:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i}\ , \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_i}.$$

Come conseguenza delle equazioni di Hamilton si trovano le seguenti due identità:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}\left(\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_i}\dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i}\dot{\tilde{p}}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial \tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

e

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i\left(\dot{\tilde{p}}_i\dot{q}_i + \tilde{p}_i\ddot{q}_i\right) - \sum_{i=1}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

da cui si ricava la seguente identità:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{5.19}$$

Pertanto, se la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, cioè se $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$, si ha che $\dfrac{dH}{dt} = 0$, quindi la grandezza fisica espressa dalla funzione di Hamilton è una costante del moto.

Con queste premesse, possiamo determinare la hamiltoniana di una particella relativistica lentamente accelerata da campi elettromagnetici mediante la (5.17), utilizzando l'espressione della lagrangiana relativistica ricavata nei paragrafi precedenti:

$H = \sum_{i=1}\tilde{p}_i v_i - L(\vec{q};\vec{v};t) =$

$=\sum_{i=1} \tilde{p}_i v_i + m_\circ c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\phi - e\sum_{i=1}^n v_i A_i$

dove e rappresenta la carica elettrica della particella.

Innanzitutto determiniamo i momenti coniugati. Per definizione

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}.$$

Sostituendo in tale espressione la lagrangiana relativistica troviamo:

$$\tilde{p}_i = \frac{m_\circ c^2 \left(2\frac{v_i}{c^2}\right)}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + eA_i = \frac{m_\circ v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + eA_i.$$

Da tale espressione possiamo ricavare il valore della componente i-esima della velocità:

$$v_i = \frac{\tilde{p}_i - eA_i}{m_\circ} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{5.20}$$

Nella relazione trovata osserviamo che compare ancora il termine v^2 che dobbiamo esprimere come funzione delle variabili $\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{t}$, secondo il formalismo hamiltoniano. Elevando al quadrato la (5.20) troviamo

$$v_i^2 = \frac{(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ^2} \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ^2} - \frac{v^2}{m_\circ^2 c^2} \cdot (\tilde{p}_i - eA_i)^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \sum_{i=1} \frac{(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ^2} - \frac{v^2}{m_\circ^2 c^2} \cdot \sum_{i=1} (\tilde{p}_i - eA_i)^2.$$

Possiamo riunire al primo membro tutti i termini in cui compare la quantità v^2:

$$v^2 \cdot \left(\frac{1+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ^2 c^2}\right) = \sum_{i=1} \frac{(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{\sum_{i=1}(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ \left(1+\sum_{i=1}\frac{(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ^2 c^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{m_\circ^2 + \sum_{i=1}\frac{(\tilde{p}_i - eA_i)^2}{c^2}}. \tag{5.21}$$

Nella (5.20) compare il termine $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ che dobbiamo trasformare secondo il formalismo hamiltoniano. Per fare ciò, basta sostituire in esso la (5.21); così facendo troviamo:

$$1-\tfrac{v^2}{c^2}=1-\left(\frac{\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}{c^2\left(m_\circ^2+\frac{\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}{c^2}\right)}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}{m_\circ c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}\right)=$$

$$=\frac{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2-\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}=$$

$$=\frac{m_\circ^2c^2}{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}$$

$$\text{cioè}\quad\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_\circ c}{\sqrt{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}}. \tag{5.22}$$

Sostituendo tale espressione nella (5.20), otteniamo:

$$v_i=\frac{(\tilde{p}_i-eA_i)}{m_\circ}\cdot\frac{m_\circ c}{\sqrt{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}}=$$

$$=\frac{(\tilde{p}_i-eA_i)c}{\sqrt{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}}.$$

Visto questo, possiamo ricavare l'espressione relativistica dell'hamiltoniana. Come visto in precedenza, l'espressione dell'hamiltoniana è:

$$H=\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)v_i+m_\circ c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\phi. \tag{5.23}$$

Sostituendo in tale equazione i valori trovati nella (5.21) e nella (5.22) troviamo:

$$H=\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)\cdot\frac{(\tilde{p}_i-eA_i)c}{\sqrt{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}}+m_\circ c^2\cdot\frac{m_\circ c}{\sqrt{m_\circ^2c^2+\sum_{i=1}(\tilde{p}_i-eA_i)^2}}+e\phi=$$

$$= \frac{\sum_{i=1} (\tilde{p}_i - eA_i)^2 c + m_\circ^2 c^3}{\sqrt{m_\circ^2 c^2 + \sum_{i=1} (\tilde{p}_i - eA_i)^2}} + e\phi.$$

Mettendo in evidenza c la (5.23) diventa:

$$H = c \cdot \left\{ \frac{\sum_{i=1} (\tilde{p}_i - eA_i)^2 + m_\circ^2 c^2}{\sqrt{m_\circ^2 c^2 + \sum_{i=1} (\tilde{p}_i - eA_i)^2}} \right\} + e\phi =$$

$$= c \sqrt{m_\circ^2 c^2 + \sum_{i=1} (\tilde{p}_i - eA_i)^2} + e\phi. \tag{5.24}$$

Questa è l'espressione corretta dell' hamiltoniana relativistica, come funzione delle variabili hamiltoniane $\tilde{q} = q, \tilde{p}, \tilde{t}$. Ora, se all'interno della radice quadrata poniamo in evidenza il termine $m_\circ^2 c^2$, la (5.24) diventa:

$$H = c \sqrt{m_\circ^2 c^2 \cdot \left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)} + e\phi =$$

$$= m_\circ c^2 \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi =$$

$$= \frac{m_\circ c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \tag{5.25}$$

La (5.24) è l'hamiltoniana relativistica espressa come funzione delle variabili lagrangiane q, v, t.

Osservazione 5.2. In analogia col caso classico, possiamo chiamare tale quantità *energia*. Essa si conserva durante il moto (in analogia con il caso classico), quando il potenziale elettromagnetico non dipende esplicitamente dal tempo. Pertanto, nel caso di campi stazionari si ha che se

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{implica} \quad \frac{m_\circ c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi = cost.$$

Banalmente, quindi, per una particella libera si ha che se $e\phi = 0$

$$E = \frac{m_\circ c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$