TEORIE FISICO MATEMATICHE – Docente: Giuseppe Nisticò

DISPENSA TR3

La velocità della luce

Tratte dall'elaborato finale per la Laurea in Matematica
"Fenomeni superluminali e Relatività Speciale"
di Gessica Passante

Irraggiungibilità dinamica della velocità della luce per corpi massivi

2.1 Considerazioni di carattere teorico sulla dinamica relativistica

La legge dinamica per una carica puntiforme q con massa a riposo m_0 lentamente accelerata dall'azione di un campo elettrico $\vec{E}$ e un campo magnetico $\vec{B}$, secondo la teoria della Relatività Speciale è la seguente:

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q \cdot (\vec{E}(t, \vec{x}) + \vec{v}(t, \vec{x}) \wedge \vec{B}(t, \vec{x})). \tag{2.1}$$

Se il campo elettromagnetico può assumere valori arbitrari possiamo riscrivere tale legge come

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{g}(t)$$

dove $\vec{g}(t)$ è una funzione arbitraria. Dimostreremo che tale equazione non

ammette soluzioni che raggiungano la velocità della luce, qualunque sia il campo elettromagnetico che agisce sulla carica, cioè qualunque sia il campo vettoriale $\vec{g}(t,\vec{x})$, partendo da velocità inferiori.
Partiamo da una velocità iniziale $v_0 = |\vec{v_0}| < c$. Senza perdere in generalità poniamo $v_0 = 0$. Consideriamo un riferimento ortogonale levogiro $\Sigma = \{O,(e_i)\}$. Le equazioni del moto della particella e l'insieme delle posizioni occupate dalla carica al variare di t nel suo moto lentamente accelerato da campi elettromagnetici definiscono rispetto a Σ una curva che chiameremo γ, la traiettoria. Sia $\vec{x} : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione della curva γ rispetto al tempo t, cosicchè $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ è la velocità. Per ogni $t \in [0,+\infty)$ risulta definita la funzione

$$s = s(t) = \int_0^t |\vec{v}(\eta)|\, d\eta.$$

Il valore $s(t)$ rappresenta cinematicamente la lunghezza percorsa al tempo t. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale la seguente formula:

$$\dot{s}(t) = |\vec{v}(t)|$$

Il parametro s è un'*ascissa curvilinea o lunghezza d'arco* e ci permetterà di stabilire un sistema di coordinate intrinseco sul sostegno della curva che definisce la traiettoria della nostra particella carica [8].

Una volta stabilito il parametro d'arco riassumiamo qui la ben nota relazione matematica della Meccanica Classica che ne deriva:

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{\tau},$$

dove $\vec{\tau}$ individua la direzione tangente alla traiettoria nel punto generico t che stiamo considerando, mentre $\vec{v}(t)$ indica il vettore velocità della particella in moto al variare di t.
Ad un istante $t \in [0,+\infty)$ consideriamo il sistema di riferimento $\Sigma(t)$ con

l'origine in $\vec{x}(t)$ e con l'asse delle ascisse parallelo al vettore tangente $\vec{\tau}$ nel punto $\vec{x}(t)$. Pertanto, rispetto a tale riferimento avremo:

$$v_x(t) \equiv v(t) = \dot{s}(t)$$

$$v_y = v_z = 0.$$

L'equazione del moto rispetto a $\Sigma(t)$ è dunque:

$$\frac{d}{dt}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x(t)^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{s}(t)}{\sqrt{1-\frac{\dot{s}(t)^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}} = \vec{g}(t) = f(t)$$

dove la funzione $f(t)$ è una funzione scalare arbitraria.
Si dimostrerà adesso come tale equazione non ammetta soluzioni con velocità superiori a quella della luce, qualunque sia il campo elettromagnetico che agisce sulla carica, cioè qualunque sia il campo scalare $f(t)$ nel caso di un'unica dimensione spaziale.
Partiremo da una velocità iniziale $v_0 < c$ e, come prima, porremo senza perdere di generalità $v_0 = 0$. Dividiamo entrambi i membri dell'equazione per c:

$$\frac{d}{dt}\frac{\frac{v(t)}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{f(t)}{c}.$$

Posto $u(t) = \frac{v(t)}{c}$, avremo che $v(0) = 0$ implica $u(0) = 0$; allora

$$\frac{d}{dt}\frac{u(t)}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{f(t)}{c}.$$

Esplicitando la derivata al primo membro otteniamo:

$$\frac{\frac{du}{dt}\sqrt{1-u^2} - \frac{\frac{1}{2}(-2u\frac{du}{dt}u)}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} = \frac{\frac{(1-u^2)+u^2}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dt}}{1-u^2} = \frac{f(t)}{c}.$$

Si perviene, dunque, all'equazione differenziale del primo ordine in u

$$\frac{\frac{du}{dt}}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f(t)}{c}.$$

Procedendo per separazione di variabili troviamo

$$\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f(t)}{c}dt.$$

Integrando tra 0 e t_0:

$$\int_0^{u(t_0)} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{t_0} \frac{f(t)}{c}dt$$

Il secondo membro sarà una funzione arbitaria di t_0 che possiamo indicare con $A(t_0)$; pertanto si avrà

$$\int_0^{u(t_0)} \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = A(t_0).$$

Poichè accade che nell'intorno di $t = 0$ la funzione $|u(t)|$ è più piccola di 1, possiamo effettuare il seguente cambio di variabile:

$$u(t) = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta d\theta.$$

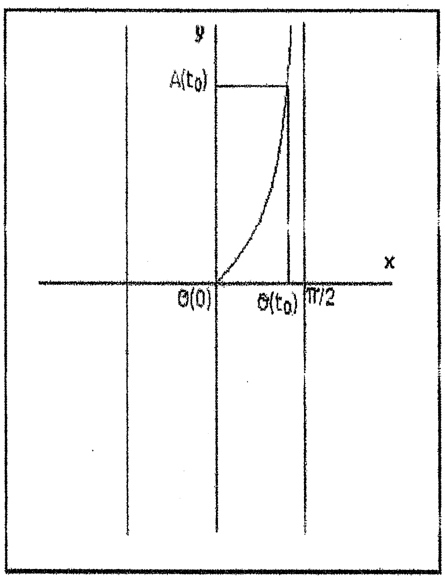
I nuovi estremi di integrazione saranno 0 e $\theta(t_0)$; dunque

$$\int_0^{\theta(t_0)} \frac{\cos\theta}{(1-(\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta = \int_0^{\theta(t_0)} \frac{\cos\theta}{(\cos\theta)^3}d\theta = \int_0^{\theta(t_0)} \frac{1}{(\cos\theta)^2}d\theta = A(t_0)$$

Si trova facilmente così la soluzione dell'equazione che risulta essere:

$$\tan\theta = A(t_0).$$

Come risulta chiaro dal grafico seguente, partendo dal punto $\theta(0) = 0$, il valore $\theta(t_0)$ preso sull'asse delle ascisse non potrà mai superare il valore di $\frac{\pi}{2}$ anche se il corrispondente valore $A(t_0) = \tan\theta(t_0)$ tende a $+\infty$.



Dunque

$$\forall A(t_0) \Rightarrow \theta(t_0) < \frac{\pi}{2}.$$

Ne consegue che $\sin\theta(t_0) < 1, \forall t_0$. Ma

$$\sin\theta(t_0) = u(t_0) < 1, \forall t_0.$$

Si conclude dunque che

$$v(t_0) < c, \forall t_0.$$

Concludendo, nel caso particolare della particella carica lentamente accelerata dalla azione di un campo elettromagnetico, qualunque sia l'intensità del campo, la velocità della luce non può essere raggiunta, né tantomeno superata.

Inconsistenza tra moti superluminali e teoria della Relatività Speciale

Le trasformazioni di Lorentz, così come le abbiamo ricavate in TR1, si presentano sotto forma di un sistema di equazioni che stabilisce delle relazioni matematiche tra sistemi di riferimento in moto relativo reciproco. Le riproponiamo qui di seguito:

$$\begin{cases} x(t')' = \frac{x(t)-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y(t')' = y(t) \\ z(t')' = z(t) \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x(t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ . \end{cases} \tag{3}$$

Considerando il sistema da un punto di vista puramente matematico si può constatare come in realtà tali leggi non siano definite per velocità maggiori o uguali di c. Il termine

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

al denominatore implica che, affinchè le trasformazioni siano definite occorre che

$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$$

e dunque

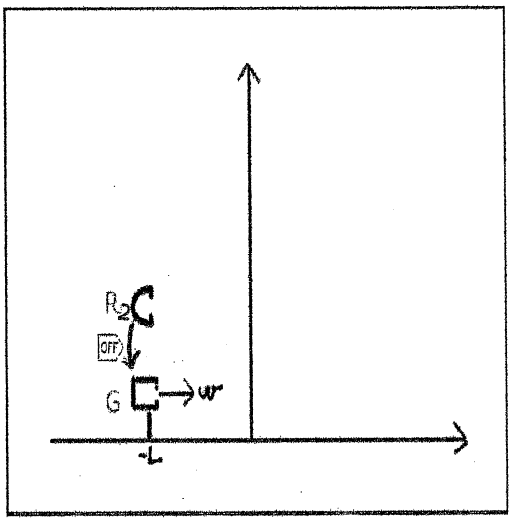
$$\frac{v^2}{c^2} < 1 \Rightarrow |v| < c.$$

L'inevitabile conclusione è che le trasformazioni di Lorentz non possono essere applicate se la velocità relativa è maggiore di quella della luce.
Un problema analogo sorge per il moto di particelle. L'equazione relativistica in (3) può essere applicata solo nel caso in cui la velocità iniziale della particella sia minore di c; in questo caso abbiamo provato che tale velocità si manterrà sempre inferiore a c, comunque sia inteso il campo applicato. Se invece la velocità iniziale è maggiore di c, l'equazione in (3) non avrebbe senso a causa della presenza del termine $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}}$.
La teoria della Relatività Speciale risulta quindi completamente incapace di trattare con moti superluminali. In questo capitolo faremo vedere che questo non costituisce solo un limite epistemico, cioè che può essere superato ad opera di ulteriori sviluppi della toeria che forniscano anche le trasformazioni per velocità relative superiori a c e l'equazione del moto compatibile con una velocità iniziale maggiore di c. Precisamente dimostreremo che se esistono particelle dotate di velocità $w > c$, allora le trasformazioni di Lorentz non sono valide nemmeno per velocità relative inferiori a c.

3.1 Esperimento tachionico

Suporremo dunque l'esistenza e la rivelabilità dei tachioni e dimostreremo che, sotto opportune condizioni realizzabili in linea di principio, la validità delle trasformazioni di Lorentz dà luogo ad una contraddizione logica. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali Σ e Σ' legati dalle trasformazioni di Lorentz. Supponiamo che esistano dei tachioni con velocità $w > c$. Solidale

Figura 3.1: Emissione del primo tachione nel sistema Σ

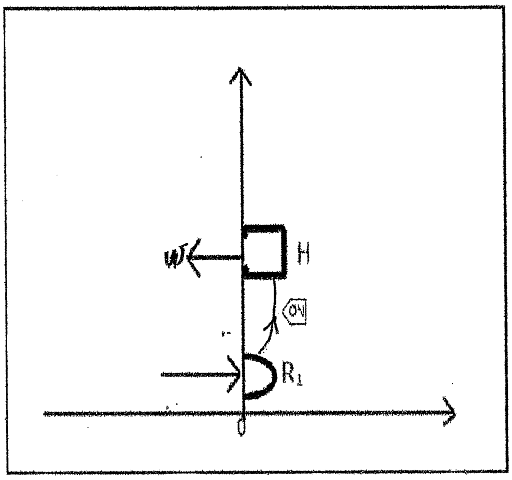


al sistema Σ, in corrispondenza del punto spaziale $(-L, 0, 0)$ siano posti due dispositivi G e R_2 come rappresentato nella figura 3.1.

- Il dispositivo G è in grado di emettere tachioni con velocità w verso l'origine; esso è dotato di un timer predisposto ad attivare l'emissione al tempo $t_1 = -\frac{L}{w}$.
- Il dispositivo R_2 è un rilevatore di tachioni.

I due dispositivi sono collegati in maniera tale che nel momento in cui un tachione raggiunge R_2, R_2 invia un segnale a G che ne determina l'interdizione: da quel momento in poi G non potrà più emettere tachioni.

Figura 3.2: Emissione del secondo tachione nel sistema Σ'



Solidale al sistema Σ', in corrispondenza dell'origine sapziale, sono posti due dispositivi R_1 e H , come mostrato in figura 3.2.

- R_1 è un rilevatore di tachioni;
- H è un emettitore di tachioni,

I due dispositivi sono collegati in maniera tale che nel momento in cui R_1 viene raggiunto da un tachione, esso invia un impulso a H che emette, nello stesso momento, un tachione con velocità w (rispetto a Σ') verso R_2. La situazione fisica in esame è dunque la seguente: se R_1 rivela un tachione

all'istante t'_0 di Σ', H emette un tachione all'istante t'_0; se R_2 rivela un tachione all'istante t_2 di Σ, G non potrà emettere tachioni $\forall t > t_2$.
Nelle condizioni finora esposte il tachione emesso da G raggiunge l'origine all'istante 0 e nel punto $\vec{0}$ di Σ. Tale evento avviene in Σ' all'istante $t' = 0$ nel punto $\vec{x}' = (0,0,0)$, come ovvia conseguenza delle trasformazioni di Lorentz. Pertanto il tachione all'istante $t' = 0$ si Σ' raggiunge R_1, che è posto nell'origine di Σ'. Il dispositivo H deve emettere allora un secondo tachione all'istante $t' = 0$. La legge del moto di questo secondo tachione rispetto a Σ' sarà:

$$x'(t') = -wt'.$$

Nel sistema Σ tale legge, utilizzando le leggi di trasformazione di Lorentz, diventa:

$$x(t) = \frac{x'(t') + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-(w-v)t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sia t_2 l'istante rispetto a Σ in cui questo secondo tachione raggiunge R_2, allora G cessa di funzionare $\forall t > t_2$. La posizione spaziale sarà espressa dalle coordinate $(-L, 0, 0)$ rispetto a Σ. L'istante t'_2 rispetto a Σ' in cui il secondo tachione raggiunge R_2 soddisfa l'equazione di cui sopra e dunque:

$$-L = \frac{-(w-v)t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

da cui

$$t'_2 = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{w - v} L.$$

Calcoliamo adesso l'istante t_2 in cui avviene questo evento rispetto a Σ :

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2(t'_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{w-v} L + \frac{v}{c^2} x'_2 (\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{w-v} L)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1 - \frac{v}{c^2} w) L}{w - v}$$

Si mostrerà ora che, qualunque sia la velocità w dei tachioni di questo esperimento immaginario, purchè maggiore di c, il sistema Σ' in cui sono collocati H e R_1 può essere scelto in maniera tale che

$$t_2 < t_1,$$

cioè il secondo tachione raggiunge R_2 *prima* che il primo tachione sia stato emesso. Allora G cessa di funzionare $\forall t > t_2$. Questo comporta che l'emissione del primo tachione viene impedita.
Affichè valga la disuguaglianza $t_2 < t_1$ occorre e basta, usando le relazioni sui tempi che abbiamo ricavato, che:

$$\frac{1 - \frac{v}{c^2}w}{w - v} < \frac{1}{w},$$

da cui otteniamo la condizione sulla velocità v :

$$w - \frac{v}{c^2}(w)^2 < -(w - v) \Rightarrow v(1 + \frac{(w)^2}{c^2}) > 2w \Rightarrow v > \frac{2w}{1 + \frac{(w)^2}{c^2}}.$$

Si mosterà adesso che esiste un valore di v che soddisfa questa relazione, con $v < c$. La funzione

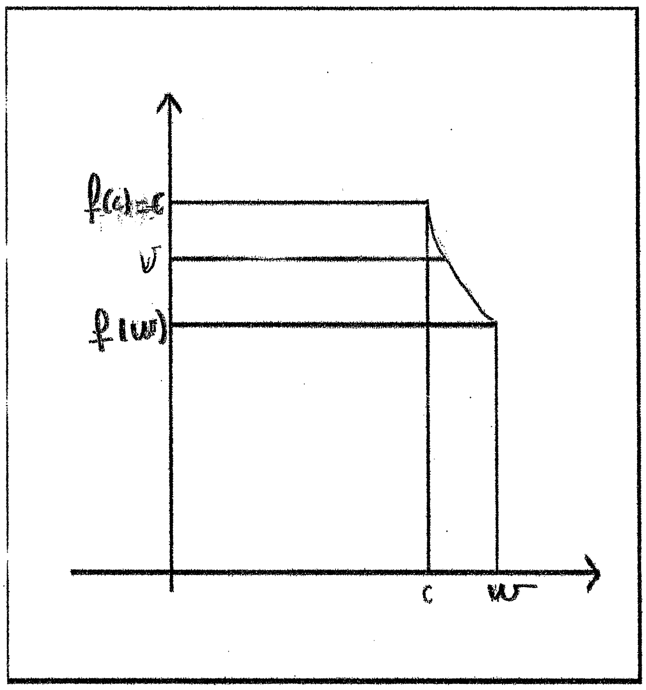
$$f(w) = \frac{2w}{1 + \frac{w^2}{c^2}}$$

risulta decrescente $\forall w > c$ in quanto

$$\frac{df(w)}{dw} = \frac{2(1 + \frac{w^2}{c^2})) - 2w\frac{2w}{c^2}}{(1 + \frac{w^2}{c^2})^2} = \frac{2((1 + \frac{w^2}{c^2}) - 2\frac{w^2}{c^2}))}{(1 + \frac{w^2}{c^2})^2} = \frac{2(1 - \frac{w^2}{c^2})}{(1 + \frac{w^2}{c^2})^2} < 0, \forall w > c$$

D'altra parte $f(c) = c$ pertanto $\forall w > c, f(w) < c$; quindi esiste v tale che $f(w) < v < c$, come mostrato nella figura 3.3. Quindi se il sistema Σ' ha una tale velocià v, $t_2 < t_1$.

Figura 3.3: $\forall w > c$ la funzione f descresce.



3.2 Conclusioni

Abbiamo riscontrato dapprima incongruenze matematiche e successivamente inconsistenze logiche relativamente alla possibilità che ci siano in natura particelle che possano muoversi con velocità superiori a c.
Precisamente, in questo capitolo abbiamo mostrato che se esistessero particelle con velocità $w > c$, e le trasformazioni di Lorentz sono valide per velocità relative $v < c$, è possibile in linea di principio predisporre un esperimento ideale per il quale valga la seguente catena di implicazioni tra avvenimenti fisici:

G **emette un tachione** τ_1 **ad un tempo** $t_1 < 0$.

$$\Downarrow$$

R_1 **rivela il tachione** τ_1 **al tempo** $t'_0 = t_0 = 0$ **in** $x'_0 = x_0 = 0$.

$$\Downarrow$$

H **emette un tachione** τ_2 **al tempo** $t'_0 = t_0 = 0$.

$$\Downarrow$$

R_2 **rivela** τ_2 **al tempo** $t_2 < t_1$.

$$\Downarrow$$

G **è interdetto** $\forall t > t_2$.

$$\Downarrow$$

G **non emette tachioni al tempo** $t_1 > t_2$.

La catena di implicazioni presenta una contraddizione tra l'avvenimento iniziale e quello finale. Siccome la catena delle implicazioni è una conseguenza

dell'esistenza dei tachioni e della validità delle trasformazioni di Lorentz, è chiaro che la scoperta dell'esistenza dei tachioni implicherebbe la non validità delle trasformazioni di Lorentz.
Abbiamo mostrato nel Capitolo 1 che queste leggi sono il risultato dell'assunzione del Principio di Relatività galileiano e delle Equazioni di Maxwell. L'invalidità delle Trasformazioni di Lorentz renderebbe invalido dunque, o il principio galileiano di relatività o le equazioni che regolano i fenomeni elettromagnetici, entrambe leggi che non solo sono radicate nella Fisica teorica ma che sono ampiamente confermate dall'evidenza sperimentale.