TEORIE FISICO MATEMATICHE

DISPENSA N. 4

Studieremo l'effetto Doppler per le onde elettromagnetiche nella relatività speciale

1. Equazioni di Maxwell nel vuoto.

Siano $\vec{E}$ il campo elettrico e $\vec{B}$ il campo magnetico rispetto a un sistema di riferimento inerziale Σ, consideriamo le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\text{(I)} \qquad \overline{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \overline{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{(III)} \qquad \overline{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{(IV)} \qquad c^2 \overline{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ponendo ρ e *j*, rispettivamente la densità di carica e densità di corrente, uguali a zero. Notiamo che tutti i campi uniformi e costanti risolvono queste equazioni (perché la derivata di una costante è zero). Ma i campi costanti sono campi stazionari; noi cerchiamo le soluzioni non stazionarie. Esse sono infinite poiché se ho due soluzioni e ne faccio la combinazione lineare questa è ancora una soluzione.
Tra tutte le soluzioni ne considereremo una particolare.

2. Soluzione onda piana

La soluzione onda piana è una soluzione uniforme su ogni piano perpendicolare a un dato asse, diciamo l'asse *x*. Quindi per avere una variazione del campo elettromagnetico bisogna spostarsi lungo x perché lungo l'asse y e l'asse z non c'è variazione. La soluzione piana verifica queste condizioni:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$$

Queste ultime equazioni semplificano il sistema.

Dalla (I) è facile ricavare che $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ poiché le altre derivate, quelle rispetto a y e z, sono già uguali a zero. Dalla (IV):

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = 0$$

La componente E_x è costante nel tempo t e nello spazio x, quindi $E_x(t, x)$ è uguale ad una costante. Le costanti non ci interessano poiché cerchiamo le soluzioni non stazionarie, quindi poniamo $E_x(t, x)$=cost=0. Questo vuol dire che il campo elettrico $\vec{E}$ giace sul piano di uniformità perché la componente sull'asse x deve essere zero.
La (II) si scriverà:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0$$

perché cerchiamo soluzioni piane.
Dalla (III) $\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$ perché le altre sono già uguali a zero, quindi B_x è uguale ad una costante e, per la stessa motivazione precedente, poniamo questa costante uguale a zero.
Consideriamo ora l'equazione (IV)

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

poiché $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$. Cerchiamo una soluzione particolare che non cambi l'orientazione quando si cambia il piano, quindi scegliamo un sistema in cui l'orientazione di $\vec{E}$ sia proprio y, allora risulterà E_z =0.

$$0 = \frac{\partial E_z}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

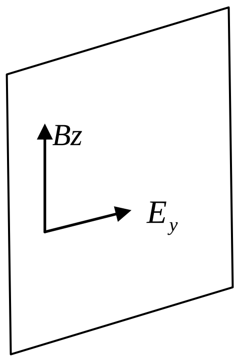
poiché $\frac{\partial B_x}{\partial y} = 0$.

Utilizzando il fatto che $\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$, possiamo calcolare la derivata parziale di B_y rispetto al tempo t, ottenendo:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = 0$$

e quindi B_y è uguale ad una costante e la poniamo uguale a zero.
Riassumendo:

$E_x = E_z = 0$
$B_y = B_x = 0$.



La variazione temporale della componente y del campo elettrico è accoppiata alla variazione della componente z del campo magnetico rispetto ad x .

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \qquad (*)$$

Deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

ciò implica che:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0$$

La componente y del campo elettrico deve soddisfare questa equazione. Analogamente, la componente z del campo magnetico deve soddisfare la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = 0$$

Le due equazioni

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = 0$$

sono dette **equazioni delle onde.**
Una soluzione della prima equazione sarà:

$$E_y = E_0 \sin k(x - ct)$$

Essendo Bz accoppiata a E_y non possiamo scegliere Bz qualunque, ma sarà del tipo:

$B_z = B_0 \sin k(x - ct)$ scegliendo opportunamente B_0.

Ora verifichiamo se Bz è effettivamente una soluzione.
Sostituendo Bz nell'equazione ($*$) si ha:

$$-c^2 k B_0 \cos k(x - ct) = -ckE_0 \cos k(x - ct)$$

Semplificando si ottiene che: affinché Bz sia soluzione $B_0 = \frac{E_0}{c}$
Cioè:

$$B_z = \frac{E_0}{c} \sin k(x - ct)$$

La coppia $E_y = E_0 \sin k(x - ct)$, $B_z = \frac{E_0}{c} \sin k(x - ct)$ è una soluzione del nostro problema.
Essa è detta **soluzione onda piana.**
In un punto qualunque E_y oscilla sinusoidalmente con una pulsazione $\omega = kc$ e una frequenza $\nu = \frac{kc}{2\pi}$.
Fissato l'istante t =0, $E_y = E_0 \sin kx$ e il campo elettrico è di tipo sinusoidale.
E' una sinusoide avente lunghezza d'onda λ tale che $k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$, dove k è il numero di onde. Riportando le soluzioni ottenute su un grafico notiamo che a t=0 i due grafici coincidono nei nodi. E_y e Bz sono in fase: hanno la stessa lunghezza d'onda, la stessa pulsazione, cambia l'ampiezza e l'orientazione.

All'istante t =t$_0 \neq 0$, Bz diventa:

$$B_z = \frac{E_0}{c} \sin(kx - kct_0)$$

Ora vi è una fase; questo significa che i nodi, i massimi e i minimi si sono traslati.

Il primo zero della funzione mi è dato da:

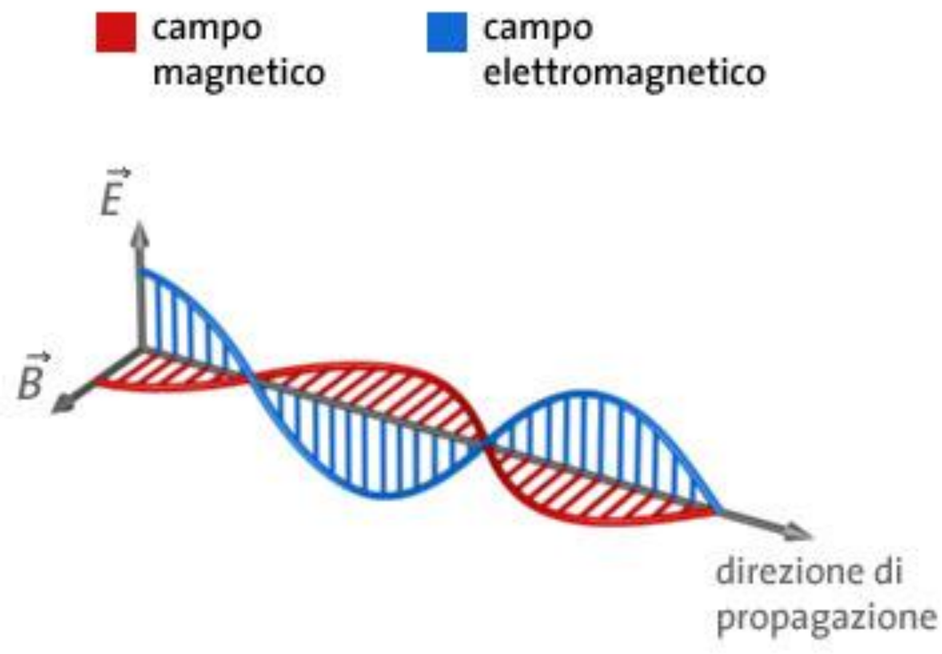
$$\frac{E_0}{c}\sin(kx - kct_0) = 0$$

$$kx - kct_0 = 0$$

$$x = ct_0$$

tutta la funzione risulta traslata di ct_0.

Man mano il tempo passa l'onda si sposta verso destra con una velocità uguale a quella della luce: $v = \frac{x}{t_0} = c$.



3. Effetto Doppler relativistico

3.1) Variazione della lunghezza d'onda.

Consideriamo la soluzione particolare

$$E_y = E_0 \sin k(x - ct)$$

$$B_z = \frac{E_0}{c}\sin k(x - ct)$$

Posso considerare una loro combinazione che risulta ancora soluzione.
La direzione della propagazione è perpendicolare sia al campo magnetico che al campo elettrico.

Andiamo a vedere, una volta stabilita la soluzione in Σ, quale sarà la corrispondente soluzione in Σ′.
Per le trasformazioni dei campi elettromagnetici, in Σ′ avremo:

$$E'_x = E_x = 0$$
$$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$
$$B'_x = B_x = 0$$
$$B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

Anche in Σ′ le uniche componenti del campo elettromagnetico diverse da zero sono E'_y e B'_z.

$$E_y{}' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_0\frac{\left(\sin k(x-ct) - \frac{v}{c}\sin k(x-ct)\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$
$$= E_0\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sin k(x-ct) = E'_0 \sin k(x-ct)$$

Questo è il campo elettrico in Σ′, basta dividere per c per ottenere il campo magnetico associato.
Dobbiamo determinare tutto in termini delle coordinate x′, y′, z′:

$$k(x-ct) = k\frac{(x'-vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - kc\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x'+vt'-ct'-\frac{v}{c}x'\right) =$$
$$= \frac{k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[x'\left(1-\frac{v}{c}\right) - c\left(1-\frac{v}{c}\right)t'\right] =$$
$$= \frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}k(x'-ct') = k'(x'-ct')$$

Il termine $\frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}k$ è costante poiché dipende soltanto da v e quindi lo abbiamo posto uguale a k′. Quindi:

$E'_y = E'_0 \sin k'(x' - ct')$

In Σ′ cambiano i valori dell’ampiezza dell’onda e i valori di k che modificano il valore della lunghezza d’onda:

$\lambda' = \frac{2\pi}{k'}$

Questa variazione della lunghezza d’onda, che implica la variazione della frequenza si chiama **Effetto Doppler Relativistico.**

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} = \lambda\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} \qquad (**)$$

λ' rappresenta la lunghezza d’onda di una stessa variazione vista da un sistema in moto Σ′. Come è facile constatare, la lunghezza d’onda misurata da un osservatore che si allontana dalla sorgente è più grande.

3.2) Variazione dell’angolo di propagazione.

Supponiamo di avere un’onda piana in $\sum$ che si propaga in una direzione $\vec{n}$, con una lunghezza d’onda λ, e supponiamo che abbia una velocità di propagazione $\vec{u}$. Il campo magnetico è perpendicolare al campo elettrico ed è perpendicolare alla direzione $\vec{n}$.

Se prendiamo un sistema Σ' che si muove con un angolo ϑ e l’onda piana, cioè solo la componente perpendicolare alla propagazione è diversa da zero.

$$E_y = E_0 \sin\left(k\vec{n}\cdot\vec{x} - kct\right)$$

x è la distanza del punto dal piano di simmetria che passa per l’origine.
Il campo magnetico è perpendicolare sia alla direzione di propagazione che al campo elettrico.

$$B = \frac{E_0}{c}\sin\left(k\vec{n}\cdot\vec{x} - kct\right)$$

$$B_x = -\frac{E_0}{c}\sin\vartheta\sin\left(k\vec{n}\cdot\vec{x} - kct\right)$$

$$B_z = \frac{E_0}{c}\cos\vartheta\sin\left(k\vec{n}\cdot\vec{x} - kct\right)$$

Riassumendo:

Consideriamo la stessa situazione supponendo che l'onda si propaga lungo una direzione $\vec{n}$ che forma un angolo di inclinazione ϑ. I piani sono perpendicolari ma orientati perpendicolarmente a $\vec{n}$.

In un punto qualunque l'espressione del campo elettrico lungo la coordinata y è, come abbiamo visto:

$$E_y = E_0\sin\left(k\vec{n}\cdot\vec{x} - kct\right)$$

Allo steso modo abbiamo calcolato il campo magnetico che deve essere perpendicolare tanto alla direzione di propagazione tanto al campo elettrico:

$$B = \frac{E_0}{c}\sin\left(k\vec{n}\cdot\vec{x} - kct\right)$$

$$\vec{B} = \left(-B\sin\vartheta, 0, B\cos\vartheta\right)$$

Queste formule ci permettono di vedere se la lunghezza d'onda e il periodo risultano essere uguali a quello trovato prima.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \;,\; \nu = \frac{c}{\lambda}$$

Se considero un sistema di riferimento Σ' che si muove lungo x, vediamo cosa succede:

$$E_y' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_0\frac{\left(\sin k\left(\vec{n}\cdot x - ct\right)\right)\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= E_0'\sin k'\left(\vec{n}'\vec{x}' - ct'\right)$$

Scrivendo l'argomento del seno rispetto alle variabili $\vec{x}'$, t', abbiamo:

$$k\vec{n}\cdot\vec{x}-kct=kn_1x+kn_2y+kn_3z-kct=k'\left(\vec{n}'\cdot\vec{x}'-ct'\right)=$$

$$=kn_1\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+kn_2y'+kn_3z'-kc\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=$$

$$=\frac{kn_1-k\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x'+kn_2y'+kn_3z'-\frac{kc-kn_1vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=$$

$$=\frac{k\left(n_1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x'+kn_2y'+kn_3z'-\frac{k\left(1-\frac{v}{c}n_1\right)c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}t'=$$

siccome $n_1=\cos\vartheta$, otteniamo:

$$=\frac{k\left(\cos\vartheta-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}x'+kn_2y'+kn_3z'-\left\{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\}ct'=k'\left(\vec{n}'\vec{x}'-ct'\right)$$

Dalla (~) si ottiene:

$$k'ct'=\left\{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)k}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}\right\}ct'$$

cioè : $k'=\left\{\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)k}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}\right\}$

Questa espressione consente di determinare la variazione della lunghezza d'onda:

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k'} = \lambda \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}$$

Ora

$$E'_y = E'_0 \sin\left\{ \frac{k\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} x' + kn_2 y' + kn_3 z' - k'ct' \right\} =$$

$$= E_0{}' \sin\left(k'n_1{}' x' + k'n_2{}' y' + k'n_3{}' z' - k'ct' \right)$$

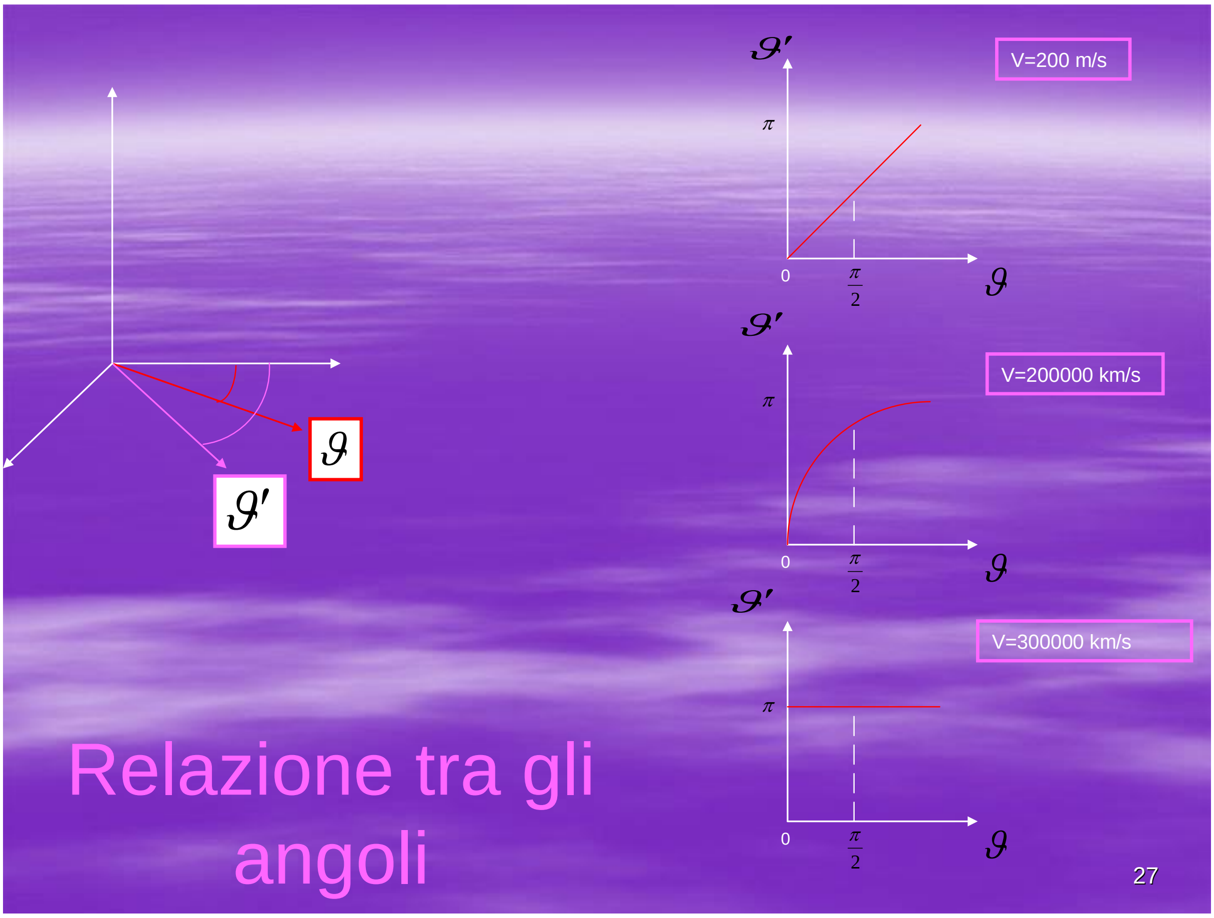
Da $n_1{}' = \cos\vartheta'$ avremo:

$$k \frac{\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = k \frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cos\vartheta'$$

da cui, semplificando, troviamo:

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - \frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}$$

Questa è l’espressione dell’angolo di propagazione dell’onda nel sistema di riferimento in moto, cioè in Σ′.



ϑ
ϑ'
ϑ'
V=200 m/s
π
0
$\frac{\pi}{2}$
ϑ
ϑ'
V=200000 km/s
π
0
$\frac{\pi}{2}$
ϑ
ϑ'
V=300000 km/s
π
0
$\frac{\pi}{2}$
ϑ
Relazione tra gli angoli
27