

DISPENSA TR5

L'ILLUSIONE SUPERLUMINALE

Tratte dall'elaborato finale per la Laurea in Matematica
"Fenomeni superluminali e Relatività Speciale"
di Gessica Passante

Osservazioni di fenomeni apparentemente superluminali

Nel corso di vari studi astrofisici, sono stati menzionati risultati interessanti riguardo le velocità di getti di materia emessi nello spazio galattico ed extragalattico.

M.J.Rees nel Luglio del 1966 [3] suggerisce la possibilità che parti di alcune sorgenti radio possano espandersi con velocità relativistiche. Egli indica inoltre che gli effetti relativistici potrebbero avere un'influenza decisiva sulle proprietà osservabili di queste sorgenti: ad esempio l'età effettiva di alcuni tipi di sorgenti radio potrebbe essere significativamente minore delle stime ordinarie che non tengono conto di tali effetti. In relazione al tema della presente trattazione, la caratteristica più importante del modello descritto nell'articolo è il fatto che un oggetto che si muove relativisticamente in una direzione particolare, potrebbe apparire ad un osservatore distante dotato di velocità trasversale maggiore di c [3].

Nel periodo 1971-1977 sono state rilevate quattro sorgenti extragalattiche apparentemente superluminali: 3C120, 3C273, 3C279, 3C345 (e.g., Cohen et al. Nature · VOL 268 pag 405, 1977; Cotton et al. Astrophys. J. (Letters) · VOL 229, L115, 1979) [4].

Una sorgente galattica apparentemente superluminale è stata osservata nel 1994. [1]. Lo scopo di questo capitolo è mostrare come sorgenti radio relativistiche, cioè con velocità confrontabili a c , possano essere classificate come sorgenti che hanno velocità (solo apparentemente) superluminali.

4.1 L'illusione superluminale

Consideriamo un'emissione radio relativistica proveniente da una sorgente relativistica e rilevata da un osservatore. Supponiamo per semplicità di conti di aver scelto unità di misura per cui $c = 1$, e supponiamo inoltre che la distanza R tra l'osservatore e la sorgente di radiazione elettromagnetica sia $R \gg 1$. Più precisamente consideriamo un sistema di riferimento in cui valga $c = 1$ e $R \gg 1$.

Dobbiamo calcolare la velocità trasversa v_τ , cioè la componente normale alla direzione di osservazione. Indicheremo con u il modulo della velocità della sorgente.

Calcoliamo dunque, a partire dalla variazione angolare percorsa dalla sorgente nel tempo considerato, l'intervallo di tempo apparente, cioè l'intervallo misurato dall'osservatore, corrispondente alla variazione angolare $\Delta\varphi$ osservata (figura 4.1):

$$\Delta\varphi \rightarrow \Delta t^* = \frac{l}{u} + \frac{l \sin \alpha'}{c},$$

dove con Δt^* indichiamo il tempo apparente e con α' l'angolo tra la direzione del moto della sorgente e la direzione trasversale a quella di osservazione.

Dalla formula

$$\Delta t^* = \frac{l}{u} + \frac{l \sin \alpha'}{c} = \frac{l}{u} + l \sin \theta$$

associata alla Figura 4.1 distinguiamo le componenti

$$\Delta t = \frac{l}{u}$$

Quindi sarà

$$\Delta t = \frac{\Delta t^*}{1 + u \sin \alpha'}$$

e di conseguenza

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t^*} (1 + u \sin \alpha').$$

Moltiplichiamo per R , che è la distanza dall'osservatore, e definiamo le variabili:

$$\begin{cases} y = u \cos \alpha', \\ x = u \sin \alpha', \end{cases}$$

che sono le componenti della velocità effettiva della sorgente.

Sarà allora

$$y = R\dot{\varphi} = R\dot{\varphi}^* (1 + u \sin \alpha').$$

Sia ora $\xi = R\dot{\varphi}^*$ la velocità trasversa apparente. Risulta che $y = \xi(1 + x)$.

Ritorniamo al nostro problema originario: vogliamo vedere se esistono soluzioni in cui la velocità trasversa apparente è maggiore della velocità della luce c .

Affinchè $|\xi| > 1$ ($c = 1$) dovrà essere, tenendo conto che

$$\xi = \frac{y}{1 + x},$$

$$\left| \frac{y}{1 + x} \right| > 1$$

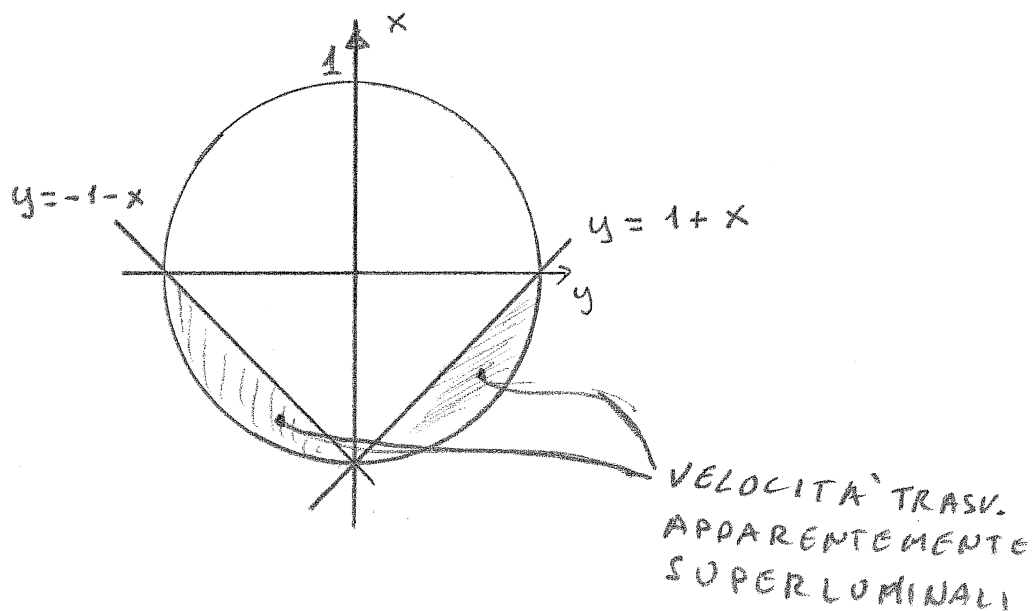
cioè

$$|y| > |1 + x|.$$

L'espressione $u \leq c$ individua i punti (x, y) nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio $r = c = 1$; trattasi dello spazio del luogo delle velocità minori di c .

Affinchè la velocità apparente ξ sia maggiore di c , la velocità (x, y) dovrà trovarsi nell'insieme dei punti definito come intersezione di due insiemi, uno costituito dai punti del piano che soddisfano l'equazione $|y| > |1 + x|$, e l'altro dai punti del piano interni al cerchio sopra definito. La regione in-

teressata sarà $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y - 1, x < -y - 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Avrà di conseguenza delle condizioni sull'angolo dell'emissione radio per cui, contrariamente a ciò che potrebbe pensarsi, la velocità apparente massima si ha per $\alpha' = \frac{\pi}{4}$ e non nella direzione parallela all'osservatore.



Correzioni Relativistiche sullo Effetto Doppler

5.1 Effetto Doppler Relativistico

In fisica relativistica l'effetto Doppler consiste nella variazione dei parametri ondulatori di una radiazione elettromagnetica relativamente a diversi riferimenti inerziali.

Siano $\vec{E}(t, \vec{x})$ il campo elettrico e $\vec{B}(t, \vec{x})$ il campo magnetico rispetto un sistema di riferimento inerziale Σ . Risolviamo le equazioni di Maxwell nel vuoto ponendo cioè ρ e j , rispettivamente la densità di carica e densità di corrente, uguali a zero.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ c^2 \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Cerchiamo in particolare soluzioni non stazionarie per i suddetti campi e, tra le infinite soluzioni, selezioneremo le soluzioni piane.

La soluzione onda piana è una soluzione in cui il campo è uniforme su un piano perpendicolare a un dato asse, che indicheremo come l'asse x . Cerchiamo

inoltre soluzioni polarizzate, cioè che non cambino orientazione da un piano di uniformità all'altro.

Risolvendo il problema in modo opportuno si perviene alla *soluzione onda piana polarizzata sinusoidale* costituita dalle seguenti:

$$E_y = E_0 \sin [k(x - ct)], E_x = E_z = 0,$$

$$B_z = \frac{E_0}{c} \sin [k(x - ct)], B_x = B_y = 0.$$

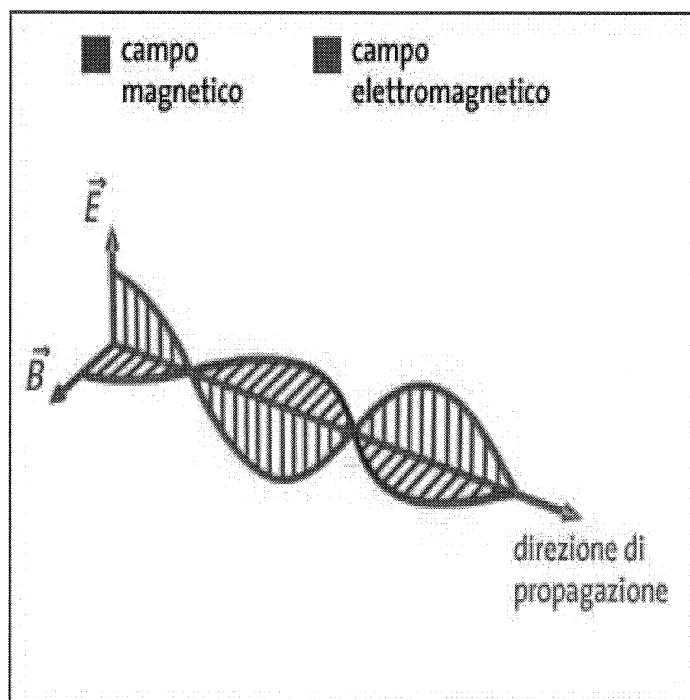
In ogni punto \vec{x} fissato, E_y oscilla sinusoidalmente con una pulsazione $\omega = kc$ e una frequenza $\nu = \frac{kc}{2\pi}$. Fissato l'istante t , il valore del campo come funzione di x individua una sinusoide avente lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, dove k è il numero d'onda.

Osservando la Figura 5.1 si può notare come ad un tempo t fissato i grafici spaziali dei due campi vettoriali coincidano nei nodi. Inoltre E_y e B_z sono in fase, hanno la stessa lunghezza d'onda, la stessa pulsazione ma differiscono per ampiezza e orientazione d'onda. Al crescere di t l'onda si sposterà verso destra con velocità uguale a quella della luce. La direzione di propagazione dell'onda è perpendicolare sia al campo magnetico che al campo elettrico.

Una volta stabilita la soluzione in Σ vogliamo trovare la corrispondente soluzione in Σ' dove, al solito, il riferimento inerziale Σ' si muove di velocità \vec{v} rispetto a Σ nella direzione dell'asse x , gli assi x dei due sistemi sono di direzione coincidente, l'asse y di Σ' giace nel piano xy di Σ e l'asse z di Σ' nel piano xz di Σ . Consideriamo la direzione di propagazione dell'onda coincidente con la direzione del moto del secondo sistema rispetto al primo. In Σ' cambiano i valori dell'ampiezza dell'onda e i valori di k che modificano dunque il valore della lunghezza d'onda che risulterà essere

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k'}$$

Figura 5.1:



con

$$k' = \frac{(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} k.$$

Questa variazione di lunghezza d'onda, che implica la variazione della frequenza viene chiamato *Effetto Doppler Relativistico*. La relazione tra le lunghezze d'onda nei due sistemi di riferimento sarà espressa dalla seguente formula:

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \lambda \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}},$$

dove indichiamo con λ e λ' rispettivamente le lunghezze d'onda nei sistemi Σ e Σ' .

Si può osservare come la lunghezza d'onda misurata da un osservatore che si allontana dalla sorgente sia maggiore rispetto λ , valutando semplicemente il rapporto $\frac{\lambda'}{\lambda}$:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}.$$

In particolare i radicandi sono non negativi visto che la quantità $\frac{v}{c} = \delta < 1$, essendo $v < c$.

5.2 Variazione dell'angolo di propagazione: effetto Doppler esteso

Consideriamo adesso il caso di un'onda piana in Σ che si propaga in una direzione generica \vec{n} , con lunghezza d'onda λ e velocità di propagazione \vec{u} . Secondo le ipotesi appena introdotte l'onda formerà un angolo di inclinazione θ con l'asse delle ascisse del sistema di riferimento Σ . Il riferimento Σ' sarà, al solito, in moto con velocità \vec{v} lungo l'asse x di Σ . Il campo elettromagnetico in Σ sarà perpendicolare alla direzione \vec{n} .

Le espressioni dei campi saranno:

$$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_0 \frac{(\sin k(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct))(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E'_0 \sin k'(\vec{n}' \cdot \vec{x}' - ct')$$

$$E'_x = E'_z = 0$$

$$\vec{B} = (-B \sin \theta, 0, B \cos \theta).$$

Otteniamo infine le seguenti relazioni che permettono di determinare i valori della lunghezza d'onda λ' e dell'angolo θ' relativamente al sistema di riferimento Σ' , in funzione dei valori misurati in Σ :

$$\lambda' = \lambda \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

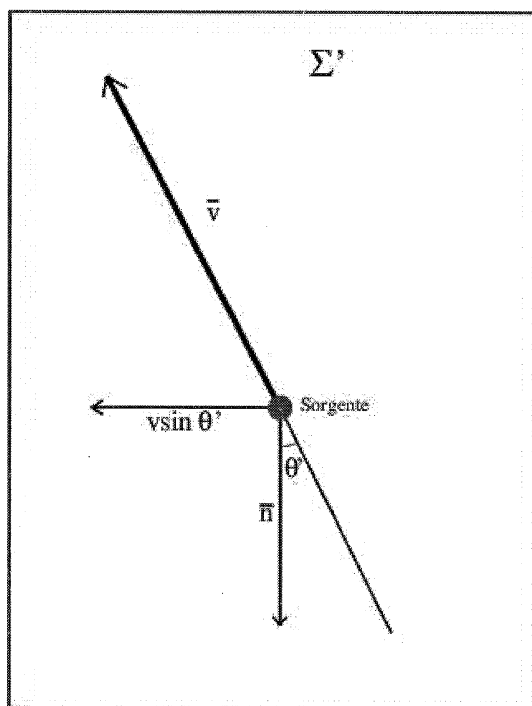
È facile osservare come il caso del paragrafo precedente in cui il moto dell'onda avviene lungo l'asse x di Σ si ottiene ponendo $\theta = 0$ cioè $\cos \theta = 1$.

5.3 Correzioni Relativistiche

Considereremo in questa sezione il problema di un corpo che emette radiazioni elettromagnetiche rispetto ad un osservatore posto in un sistema di riferimento in moto relativo. L'obiettivo sarà quello di trovare le relazioni tra le grandezze significative riguardanti l'effetto Doppler nei due sistemi di riferimento.

In sostanza nel seguente paragrafo si utilizzeranno i risultati ottenuti in quelli precedenti riguardo l'effetto Doppler esteso. Si cercheranno le relazioni per

Figura 5.2:



il calcolo della velocità della sorgente e dell'angolo di propagazione dell'onda emessa dalla sorgente, considerata come sorgente radio lontana.

Sia la sorgente dell'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda λ rispetto alla sorgente e λ' rispetto all'osservatore, in moto con velocità \vec{v} e angolo di inclinazione θ rispetto alla linea d'osservazione, come rappresentato in figura 5.2.

Fissiamo un riferimento Σ solidale alla sorgente, riferimento dunque in moto rispetto al riferimento Σ' solidale all'osservatore. Supponiamo di conoscere λ

e λ' e riportiamo le trasformazioni che ci servono nel nostro scopo di calcolare velocità e angolo θ' dell'onda:

$$\lambda = \lambda' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'}$$

Le relazioni sopra espresse non sono altro che le espressioni inverse di quelle ottenute nel paragrafo 5.2 per la lunghezza e l'inclinazione d'onda relative ai due sistemi; questo avviene perchè le grandezze che misuriamo come osservatori sono le grandezze riferite al sistema Σ' .

Siamo in presenza di un sistema di due equazioni nelle incognite v, θ e θ' . Cercheremo di risolvere il problema dal punto di vista matematico giungendo alla formulazione di un sistema di due equazioni in due incognite. Scriveremo a questo punto

$$\frac{v^2}{c^2} = \underbrace{\left(\frac{v}{c} \cos \theta'\right)^2}_{=x} + \underbrace{\left(\frac{v}{c} \sin \theta'\right)^2}_{=b} = x^2 + b^2.$$

Manterremo in questa sezione le medesime notazioni del Capitolo 4: abbiamo indicato con b la velocità trasversale effettiva dell'onda rispetto a Σ' .

Tenendo infatti conto della relazione

$$v \sin \theta' = R\dot{\varphi}$$

con $R\dot{\varphi}$ proprio la velocità trasversa effettiva definita nel Capitolo 4, allora

$$\frac{v}{c} \sin \theta' = \frac{R}{c} \dot{\varphi}.$$

Il sistema di equazioni sarà dunque

$$\begin{cases} \lambda = \lambda' \frac{\sqrt{1-x^2-b^2}}{1+x} \\ \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta'} \\ \frac{v^2}{c^2} = x^2 + b^2. \end{cases}$$

Se il moto non fosse relativistico sarebbe $b = \frac{R}{c} \dot{\varphi}$. Osserviamo adesso la Figura ??.

Consideriamo noti λ e λ' , b e θ' in quanto misurati per osservazione diretta. Dalla prima equazione si ottiene x , dalla terza $\frac{v}{c}$ e dalla seconda θ . Nel caso in cui il moto della sorgente è relativistico, il valore osservato è $b^* = R\dot{\varphi}^*$, e non $R\dot{\varphi}$. In questo caso abbiamo che

$$\Delta t^* = \Delta t + \frac{\Delta R}{c} = \Delta t + \frac{\Delta l \cos \theta'}{c}$$

\Rightarrow

$$\frac{dt^*}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t^*}{\Delta t} = 1 + \frac{v}{c} \cos \theta'.$$

Ora

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^* \cdot \frac{dt^*}{dt} = \dot{\varphi}^* \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right),$$

dove $\frac{d\varphi}{dt^*} = \dot{\varphi}^*$ è la velocità angolare apparente della sorgente.

Sarà allora

$$b = \frac{R}{c} \dot{\varphi} = \frac{v}{c} \sin \theta' = R\dot{\varphi}^* \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right)$$

$$b = b^*(1+x)$$

Sostituendo nel sistema si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda' \frac{\sqrt{1-x^2-b^2}}{1+x} = \lambda' \frac{\sqrt{1-x^2-b^{*2}(1+x)^2}}{1+x} = \lambda' \frac{\sqrt{(1+x)(1-x)-b^{*2}(1+x)^2}}{1+x} \\ &= \lambda' \sqrt{z(1-x+1-1)-b^{*2}z^2} \frac{z}{z} = \lambda' \frac{\sqrt{z(2-z)-b^{*2}z^2}}{z}, \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $y = 1 + x$.

Il sistema si è trasformato nel sistema equivalente

$$\begin{cases} \lambda = \lambda' \frac{\sqrt{z(2-z)-b^*z^2}}{z} \\ \frac{v^2}{c^2} = x^2 + b^2. \end{cases}$$

Sostituiamo anche nella seconda equazione l'espressione di $b = b^*(1+x)$ e avremo:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda' \frac{\sqrt{z(2-z)-b^*z^2}}{z} \\ \frac{v^2}{c^2} - x^2 + b^{*2}(1+x)^2 = (z-1)^2 + b^{*2}z^2. \end{cases}$$

Il sistema

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sqrt{z(2-z)-b^*z^2}}{z} \\ \frac{v^2}{c^2} - (z-1)^2 = b^{*2}z^2. \end{cases}$$

è composto da due equazioni nelle incognite v e y .

Dalla risoluzione del sistema otterremo dunque i due valori v e y cercati. Si otterranno poi le variabili x e θ dalle relazioni:

$$x = z - 1,$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

con

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

L'analisi sopra schematizzata ci ha permesso di trovare le quantità necessarie atte a descrivere il moto della sorgente di una radiazione elettromagnetica, in movimento relativistico rispetto all'osservatore posto in un riferimento fisso Σ' .

Bibliografia

- [1] I.F.Mirabel & L.F.Rodriguez
A superluminal source in the Galaxy Nature (Letters) · VOL 371 pag
46-48, Settembre 1994
- [2] R.D. Blandford, C.F. McKee & M.J. Rees
Super-luminal expansion in extragalactic radio sources Nature · VOL 267
pag 211-216, Maggio 1977
- [3] M.J.Rees
Appearance of Relativistically Expanding Radio Sources Nature · VOL
211 pag 468-470, Luglio 1966
- [4] J.A. Zensus & T.J. Pearson
Superluminal radio sources eds J.A. Zensus & T.J. Pearson 1-11,
Cambridge Univ.Press, 1987
- [5] Antonio Romano,
*Meccanica Razionale, Parte Seconda: Meccanica Classica ed Elementi di
Relatività*, Liguori Editore, Seconda Edizione Italiana, Marzo 1996.
- [6] G.Faraco, G.Nisticò
Alternative Introduction of the Basic Concepts of Special Relativity in
HSCI2006 (Handson Science), M.F Costa, J.B.V. Dorrio eds., pag 298
ISBN 9899509507, Braga 2006.

[7] G. Nisticò

URL: <https://www.mat.unical.it/~nistico/TR> Materiale Didattico a.a. 2008/2009

[8] C.D Pagani A.Salsa ,

Analisi Matematica Volume 2, Masson S.p.a, 1993.

[9] T.Adam et al. [The OPERA collaboration],

arXiv:1109.4897

[10] M.Antonello et al. [ICARUS collaboration],

arXiv:1203.3433v