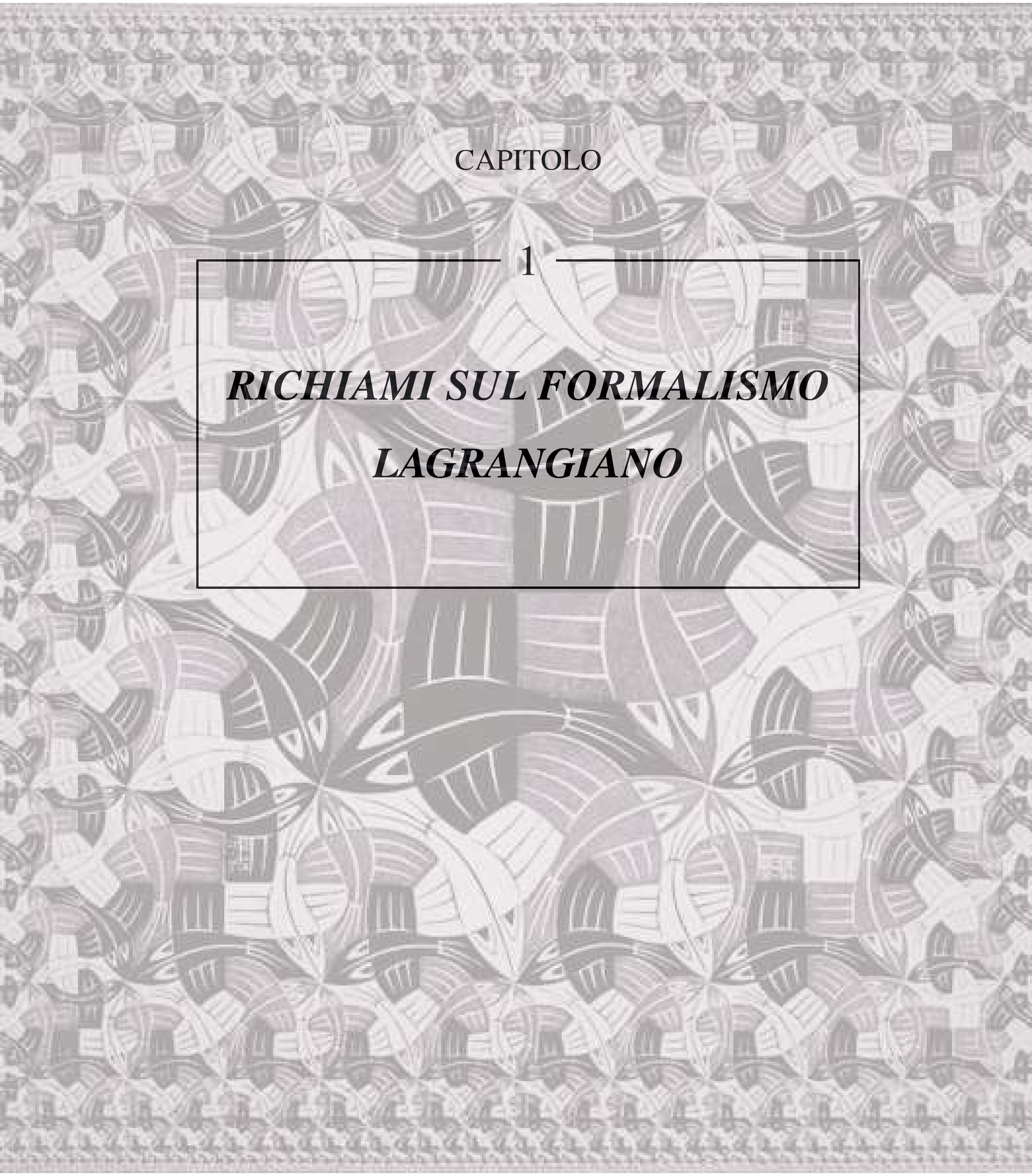
TEORIE FISICO MATEMATICHE – Docente: Giuseppe Nisticò

DISPENSA TR7

Formulazione analitica della dinamica relativistica

Tratta dalla tesi di laurea in Matematica di Fiorella Raimondo
“Dinamica Lagrangiana Relativistica”
Università della Calabria, 19 dicembre 2018.



CAPITOLO

1

RICHIAMI SUL FORMALISMO LAGRANGIANO

1.1 *Introduzione*

La dinamica newtoniana è un'ottima teoria dei sistemi meccanici e, tramite una strutturazione lineare e concisa, descrive appieno la realtà che ci circonda. Tuttavia, per sistemi particolari, utilizzare la dinamica newtoniana può rilevarsi molto difficile. Questi sono i casi in cui sono presenti sistemi complessi vincolati: il sistema si evolve nel tempo, variando le sue caratteristiche spaziali, ma queste sono vincolate a soddisfare equazioni particolari. Per questo motivo, a volte, utilizzare la dinamica newtoniana comporta uno studio lungo e faticoso e non sempre diventa possibile scrivere tutte le equazioni del moto.

Si prenda in esame un sistema di N punti materiali $P_1, .., P_N$, con massa rispettivamente $m_1, .., m_N$. Le loro posizioni nello spazio, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, sono individuati dai rispettivi vettori posizione, cioè:

$$r_j = (x_j, y_j, z_j), \quad j = 1, .., N.$$

Se i punti si muovono nello spazio, le varie coordinate saranno funzioni del tempo:

$$r_j(t) = (x_j(t), y_j(t), z_j(t)), \quad j = 1, .., N.$$

Poiché ogni vettore posizione è identificato dalle sue tre componenti, che sono le coordinate cartesiane del punto che esso indica, ne consegue che il sistema degli N punti è individuato da $3N$ coordinate cartesiane. Tra queste $3N$ coordinate possono sussistere delle relazioni come conseguenza di eventuali vincoli a cui i punti materiali sono soggetti. Il formalismo lagrangiano [6] è efficace nello studiare un sistema che si evolve nel tempo trascurando i vincoli; questo è possibile attraverso variabili che includano i vincoli nella loro stessa definizione, chiamate variabili lagrangiane.

Queste variabili non sono sempre variabili spaziali dei punti che compongono il sistema: possono anche avere natura totalmente diverse. Nel seguente esempio si capisce meglio questo concetto.

Esempio 1.1.1 *Si consideri un punto materiale che è vincolato a muoversi lungo una traiettoria circolare che soddisfa l'equazione* $x^2 + y^2 = 1$. *Si richiede di scrivere le equazioni del moto.*

Già da un primo impatto, non sembra una cosa davvero facile, se si considerano come variabili $x(t)$ *e* $y(t)$. *Per poter scrivere le equazioni del moto, bisogna scrivere la relazione* $\mathbf{F} = ma$. *Il problema sorge quando si include il vincolo: la reazione vincolare della traiettoria, infatti, non è un valore fisso, ma varia a seconda della velocità del punto materiale. Quindi diventa particolarmente complicato riuscire a ricavare le equazioni del moto. Se invece*

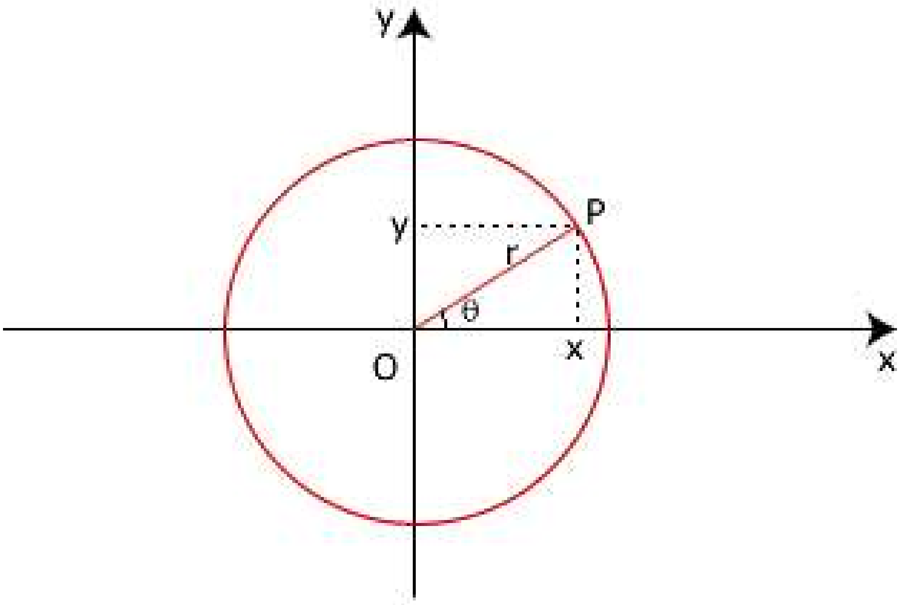


Figura 1.1: Circonferenza $x^2 + y^2 = 1$

si considera come variabile del moto $\theta(t)$ *(ovvero l'angolo di rotazione) non serve calcolare forze vincolari: ad ogni tempo si conosce la posizione del punto materiale. In questo caso,* θ *è una variabile lagrangiana. Inoltre* θ *non ha dimensioni spaziali ma, essendo un angolo, è un numero adimensionale. Questo dimostra come, cambiando variabile di studio (che non abbia per forza le stesse dimensioni delle precedenti), si riesca a studiare il sistema in maniera semplice. Inoltre se prima si avevano due variabili corrispondenti a due gradi di libertà, ora si ha solo una variabile.*

Quindi invece delle coordinate cartesiane, la posizione di un sistema di N punti può essere fissata mediante le cosiddette coordinate lagrangiane. In generale il numero minimo di grandezze indipendenti che servono per determinare la posizione del sistema, si chiamano gradi di libertà del sistema; se il sistema è sottoposto a k vincoli olonomi, sono necessarie $n = 3N - k$ variabili per descivere il moto. Si consideri allora le n grandezze $q_1, .., q_n$ che caratterizzano la posizione del sistema e che vengono chiamate coordinate generalizzate o coordinate di Lagrange. Esse, tralasciando la considerazione dei vincoli e considerate funzioni del tempo, si presentano come coordinate strettamente sufficienti a determinare la posizione del sistema di punti e a descriverne il moto. Quindi in un sistema di N punti materiali, soggetto a vincoli olonomi, è possibile scrivere i vettori posizioni dei punti $P_1, .., P_N$ come funzioni di un numero finito di coordinate indipendenti $q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t)$ ed eventualmente del tempo:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1(t), ..., q_n(t), t \\ y_i = y_i(q_1(t), ..., q_n(t), t) \quad i = 1, .., 3N \\ z_i = z_i(q_1(t), ..., q_n(t), t). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Con notazione più compatta la $(1.1.1)$ si presenta come

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(q_1(t), .., q_n(t), t), \tag{1.1.2}$$

per le quali la matrice jacobiana

$$\left(\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial q_h}\right) \quad i = 1, .., 3n; \quad h = 1, .., n$$

abbia determinante non nullo (o rango massimo n). Ciò significa che i vettori

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial q_h} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_i}\right) \quad i = 1, .., 3n; \quad h = 1, .., n$$

che costituiscono le colonne della matrice considerata, sono linearmente indipendenti; tale condizione assicura che la trasformazione è invertibile almeno localmente, con inversa anch'essa regolare. Dalla $(1.1.2)$ si ottiene, per derivazione, l'estensione della trasformazione alle velocità:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \dot{\tilde{x}}_i((t), t) = v_i(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \sum_h \frac{\partial \tilde{x}_h}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t} \tag{1.1.3}$$

Le nuove variabili $q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, .., \dot{q}_n$ sono legate alle vecchie variabili $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, v_1, .., v_n$ dalla seguente relazione che sta alla base del formalismo lagrangiano:

$$\begin{cases} q = q(\tilde{\mathbf{x}}, t) \\ \dot{q} = \dot{q}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v}, t) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v}, t) = t. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Il sistema è lagrangiano se esiste una funzione $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v}, t)$ di $2n+1$ variabili $(\tilde{x}_i, v_i, t)$ tale che l'equazione del moto è soddisfatta se e soltanto se :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

1.2 *Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange*

Il modo stesso in cui sono dedotte le equazioni di Lagrange per un sistema di punti materiali implica che le equazioni del moto hanno sempre e comunque la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{x}}$$

in qualunque sistema di coordinate, ovvero che le equazioni di Lagrange sono invarianti in forma per cambiamenti di coordinate. Tale proprietà vale per sistemi lagrangiani generali. Precisamente, se si considera la trasformazione di coordinate (eventualmente dipendente dal tempo) di $(1.1.2)$ alle nuove coordinate $(1.1.4)$, la nuova lagrangiana diventa:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t)$$

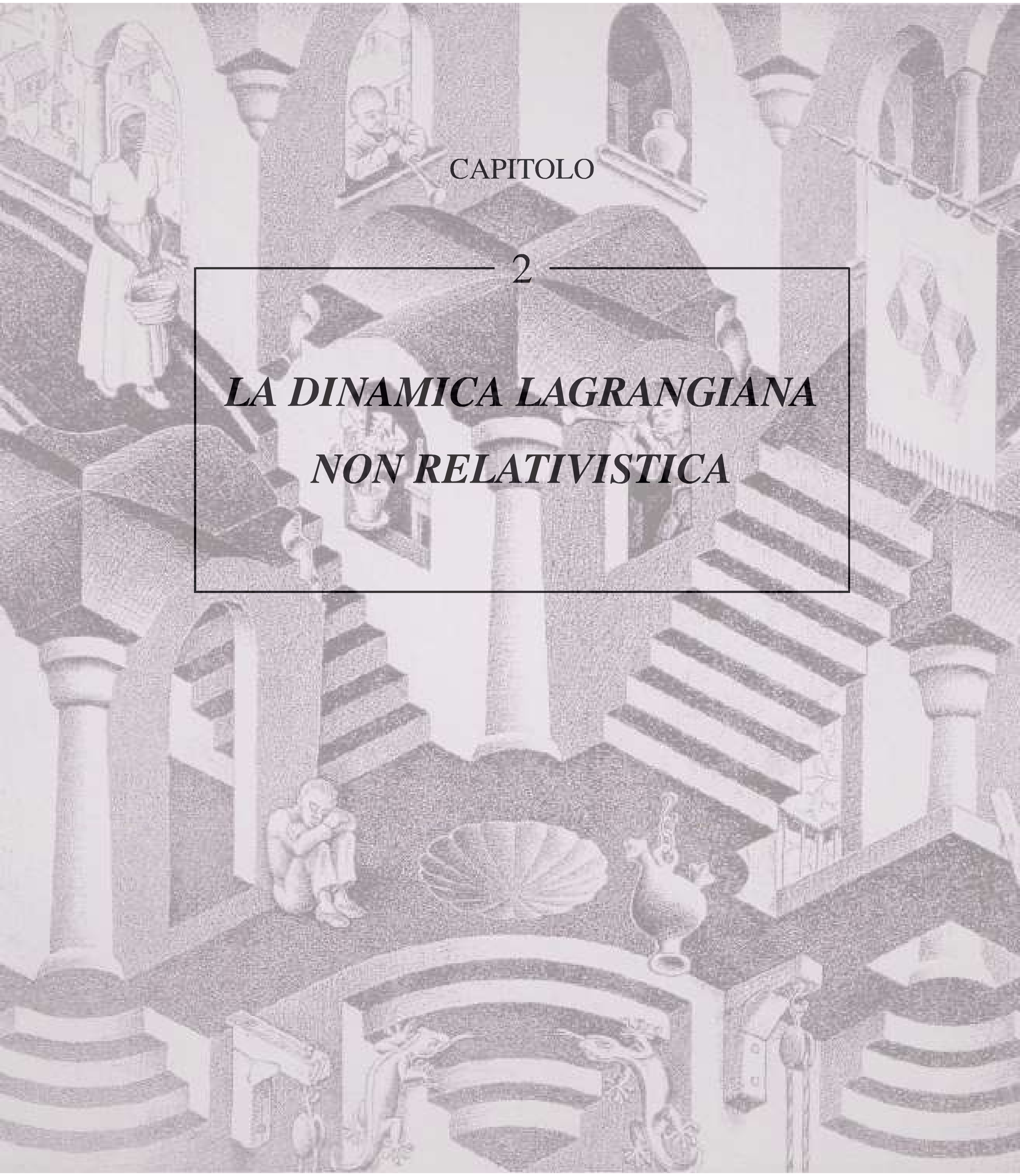
Il teorema, che assicura l'invarianza in forma delle equazioni di Lagrange, è il seguente:

Teorema 1.2.1 *Sia data la lagrangiana* $\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v}, t)$*; si consideri un cambiamento di variabili* $(1.1.2)$ *tale che la sua matrice jacobiana abbia determinante* *nullo, e sia* $(1.1.3)$ *la sua estensione alle velocità. Sia infine* $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ *la lagrangiana ottenuta da* $\mathcal{L}$ *per sostituzione di variabili. Allora* $q(t)$ *è soluzione delle equazioni di Lagrange associate a* $\tilde{\mathcal{L}}$*, se e solo se il corrispondente* $x(t)$*, immagine di* $q(t)$ *attraverso le* $(1.1.2)$*, è soluzione delle equazioni di Lagrange corrispondenti a* $\mathcal{L}$*.*

Questo teorema dimostra la proprietà di invarianza in forma delle equazioni di Eulero-Lagrange, che è una proprietà fondamentale per questa equazione. Infatti spiega che il moto nelle nuove variabili soddisfa le equazioni di Lagrange associate a $\tilde{\mathcal{L}}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial q}, \quad i = 1, .., n$$

In particolare se il moto di un sistema segue le equazioni di Lagrange in un sistema di coordinate, allora esso segue le equazioni di Lagrange in qualunque altro sistema di coordinate. Nel senso che esse mantengono la forma di equazioni di Lagrange, relative alla lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ trasformata di $\mathcal{L}$, in ogni altro sistema di coordinate.



CAPITOLO

2

LA DINAMICA LAGRANGIANA NON RELATIVISTICA

2.1 *Introduzione*

Si consideri un punto materiale della dinamica newtoniana. Per poter formulare una teoria dinamica in termini lagrangiani, bisogna innanzitutto trovare la lagrangiana del sistema.

Definizione 2.1.1 *Per un punto materiale non relativistico, la lagrangiana è una funzione che va da* $\mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{w}, s), \tag{2.1.1}$$

con $\mathbf{q} = (\xi, \eta, \varepsilon)$ *e* $\mathbf{w} = (w_\xi, w_\eta, w_\varepsilon)$*, tale che l'equazione del moto del punto materiale:*

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

dove $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ *è l'accelerazione e* $\mathbf{F}$ *è la forza di Newton sia equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_\xi}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_\eta}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_\varepsilon}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Per allegerire il formalismo, scriveremo la lagrangiana (2.1.1) come funzione delle variabili $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ invece che delle variabili $(\mathbf{q}, \mathbf{w}, s)$ come si dovrebbe correttamente fare da un punto di vista formale. Allora le equazioni di Eulero-Lagrange saranno scritte come

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \end{cases} \tag{2.1.3}$$

quando ciò non provoca ambiguità. L'intepretazione corretta della (2.1.3) è ovviamente data dalla (2.1.2).

Trovare la lagrangiana, quindi, significa trovare una funzione $\mathcal{L}$, tale che data una legge del moto teorica $\mathbf{x}(t)$, le equazioni:

$$m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t)$$

sono soddisfatte se e solo se la stessa $\mathbf{x}(t)$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange (2.1.3), cioè se le equazione del moto sono equivalenti a quelle di Eulero-Lagrange.

Osservazione 2.1.1 *Se la lagrangiana $\mathcal{L}$ esiste per un determinato sistema, essa non è unica. Da notare che siccome nell'equazione di Eulero-Lagrange compaiono delle derivate, l'aggiunta di una costante non cambia le equazioni.*

Una volta trovata una lagrangiana di un sistema $\mathcal{L}$, si è in grado di scrivere le equazioni del moto di quel sistema in qualsiasi sistema delle coordinate lagrangiane, per il teorema precedentemente trattato nel capitolo 1, che stabilisce:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_j}(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t), t = \tilde{t})\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{q}_j}(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t), t = \tilde{t})}$$

Lo scopo del seguente lavoro è presentare un metodo per trovare la lagrangiana di un sistema: cioè trovare una funzione $\mathcal{L}$, per cui le equazioni del moto risultano essere equivalenti a quelle di Eulero-Lagrange in quel sistema di coordinate. I vantaggi della formulazione lagrangiana della dinamica consentono una potenza di calcolo molto maggiore rispetto alla formulazione newtoniana e nella possibilità di semplificare la scrittura delle equazioni del moto del sistema.

2.2 *Lagrangiana di forze conservative*

La lagrangiana di un punto materiale governato da forze conservative è la quantità

$$\mathcal{L} = T - U \tag{2.2.4}$$

dove T è l'energia cinetica e U è l'energia potenziale.

Quello che si andrà a dimostrare è come si può arrivare a questo risultato.

Un modo di procedere è di sostituire la (2.2.4) nelle equazioni di Eulero-Lagrange e verificare se si ottengono le equazioni del moto $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$. Questo metodo però non ha efficacia pedagogica e inoltre non fornisce un metodo per determinare la lagrangiana in altri sistemi.

Di seguito si seguirà un metodo che può essere applicato ad altri sistemi.

Si parte dall'equazione del moto del punto mobile [1]

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \tag{2.2.5}$$

bisogna trovare $\mathcal{L}$ in modo che (2.2.5) sia equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \tag{2.2.6}$$

Analizzando il primo membro di (2.2.5) e (2.2.6) si noterà che i primi membri sono equivalenti se $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = mv_x$. Questo è possibile se viene definita una funzione $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ tale che $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = mv_x$.

Quindi se si considera la funzione $\mathcal{L}_1$ definita sopra, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x}\right) = F_x \tag{2.2.7}$$

Inolte, siccome si sta operando su un sistema governato da forze conservative, dalla definizione di forze conservative si ha:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}(\mathbf{x}, t)$$

quindi la (2.2.7) diventa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x}\right) = \frac{\partial(-U)}{\partial x}$$

[1] viene scritta l'equazione relativa solo alla coordinata x in quanto il procedimento è uguale anche per le coordinate y e z

Definendo una funzione $\mathcal{L}_2 = -U(\mathbf{x}, t)$ dipendente quindi da $\mathbf{x}$ e t allora

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x}. \tag{2.2.8}$$

La (2.2.8) non è l'equazione di Eulero-Lagrange perchè $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$, però siccome $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}mv_x^2$ dipende solo dalla velocità, allora $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x} = 0$, mentre $\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial v_x} = 0$ dato che l'energia potenziale non dipende dalla velocità.

Quindi con questa premessa, aggiungendo a sinistra $\frac{d}{dt}\frac{\mathcal{L}_2}{\partial v_x}$ senza alterare l'equazione dato che $\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial v_x} = 0$ e a destra $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x}$ dato che anch'essa è nulla, la (2.2.8) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial v_x}\right) &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\partial v_x}\right) &= \frac{\partial(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

La (2.2.9) è l'equazione di Eulero-Lagrange se $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = T - U$.

Tuttavia non sempre le forze di un sistema che si sta analizzando sono conservative. Infatti se le forze dipendono anche dalle velocità, la lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - U$$

non va bene, perchè non si può definire U da cui dipende la forza.

A seguire, nel prossimo paragrafo si considererà un sistema governato da un importante classe di forze non conservative per la determinazione della lagrangiana.

2.3 *Lagrangiana di una carica in un campo di forze elettromagnetico*

Nel parafrago precedente si è giunti alla conclusione che in un sistema governato da forze conservative, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - U.$$

Quello che bisogna fare ora è considerare un sistema governato da forze non conservative e trovare la lagrangiana del sistema stesso.

Un caso che si conosce bene in cui le forze non dipendono solo dalla posizione $\mathbf{x}$, sono le forze elettromagnetiche. Sempre in un regime non relativistico, si considera una carica e con massa m, l'equazione del moto della carica immersa in un campo elettromagnetico è corrisplondentemente alla componente $\mathbf{x}$:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x = e[E_x + (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_x] = e(E_x + v_y B_z - v_z B_y).$$

Nella forza di Lorentz compare la velocità, di conseguenza non si può indicare come lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$ in quanto non si riesce a definire U.

Allora si riprende dall'inizio il modo di procedere seguito per le forze conservative, definendo $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}mv^2$.

$$\frac{d}{dt}mv_x = F_x = e(E_x + v_y B_z - v_z B_y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = e\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = e\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} - \left(v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \left(v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]. \tag{2.3.10}$$

Osservazione 2.3.1 *Il campo elettrico e il campo magnetico hanno dei potenziali che permettono di ottenere i campi derivando proprio questi potenziali:*

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Si considera la quantità $\left(v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$, nella (2.3.10) se si aggiunge $v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}$, si ottiene:

$$v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} = \mathbf{v} \cdot \nabla A_x.$$

Allora aggiungendo e sottraendo la quantità $v_x\dfrac{\partial A_x}{\partial x}$ alla (2.3.10), non si altera l'equazione e si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = e\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} - v_z\frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}\right] =$$

$$= e\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathbf{v}\cdot\nabla A_x + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right] = e\left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathbf{v}\cdot\nabla A_x + \frac{\partial(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right].$$

Si nota che

$$\mathbf{v}\cdot\nabla A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = \frac{dA_x}{dt}$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = -e\left(\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})\right) - e\frac{dA_x}{dt}.$$

Lo scopo è quello di scrivere questa equazione nella forma di equazione di Eulero-Lagrange. Un primo passo è stato fatto introducendo $\mathcal{L}_1 = T$; quindi ora introducendo $\mathcal{L}_2 = -e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})] - e\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} - e\frac{dA_x}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} + eA_x\right) = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x}.$$

La quantità eA_x si può riscrivere come $\dfrac{\partial}{\partial v_x}(e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$, ottenendo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathcal{L}_1 + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

Ma $\dfrac{\partial}{\partial v_x}(e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = \dfrac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial v_x}$ poichè $\dfrac{\partial \phi}{\partial v_x} = 0$; quindi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

Quindi l'equazione del moto non relativistica di una particella è equivalente a quelle di Eulero-Lagrange, se si prende come lagrangiana del sistema

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}mv^2 - e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}).} \tag{2.3.11}$$

Anche questa volta il metodo ha avuto successo nel determinare la lagrangiana nel caso non relativistico.

CAPITOLO

3

LA DINAMICA LAGRANGIANA RELATIVISTICA NON COVARIANTE

3.1 *Lagrangiana relativistica non covariante*

In questo paragrafo si dedurrà la formulazione della dinamica lagrangiana di una carica lentamente accelerata da un campo elettromagnetico nel caso relativistico. Il metodo segue la traccia definita nel capitolo 2 per la dinamica newtoniana: partire dall'equazione del moto e individuare la lagrangiana.

3.1.1 *Formulazione lagrangiana relativistica non covariante*

L'equazione del moto di una particella (carica e e massa m_0) lentamente accelerata da un campo elettromagnetico è

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e[E_x + (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_x]. \tag{3.1.1}$$

Sul secondo membro di questa equazione si opererà come per il caso non relativistico, quindi si ottiene:

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})] - e\frac{dA_x}{dt}. \tag{3.1.2}$$

Il ragionamento da ripetere è lo stesso del caso newtoniano, purchè si individuino opportune funzioni $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Nel caso non relativistico $\mathcal{L}_1$ era l'energia cinetica ed era stata scelta perché $\frac{\partial}{\partial v_x}\frac{1}{2}mv^2 = mv_x$. Adesso la funzione $\mathcal{L}_1$ deve essere tale che

$$\frac{\partial L_1}{\partial v_x} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.1.3}$$

ma non solo, in aggiunta c'è bisogno anche della condizione $\frac{\partial L_1}{\partial x} = 0.$ [1]
Queste sono le condizioni che servono. Non risulta difficile trovare una funzione che soddisfi le suddette condizioni.

Si parte da (3.1.3) e si integrano rispetto a v entrambi i membri:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \int \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dv \Rightarrow$$

[1]il motivo di questa scelta sarà chiaro più avanti

$$\Rightarrow \mathcal{L}_1 = \lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + c. \tag{3.1.4}$$

Derivando tale equazione rispetto a v:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \frac{-\lambda v_x}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3.1.5}$$

e uguagliando la (3.1.5) con (3.1.3) si ottiene

$$\frac{-\lambda v_x}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

cioè

$$\lambda = -m_0 c^2.$$

Sostituendo tale valore nella (3.1.4), ed osservando che la presenza di una costante additiva nella lagrangiana è irrilevante per la dinamica della particella, si ha:

$$\mathcal{L}_1 = -m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

L'equazione trovata, equivalente all'equazione del moto, è:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})] - e\frac{dA_x}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} - e\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})] \tag{3.1.6}$$

Riscrivendo tale equazione, sapendo che $e\frac{dA_x}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}(e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$ e sostituendolo al primo membro di (3.1.6) si ha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathcal{L}_1 + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})]. \tag{3.1.7}$$

Quindi si è giunti alla stessa identica situazione del caso non relativistico; l'unica cosa che cambia è $\mathcal{L}_1$. Rifacendo i calcoli come nel caso non relativistico, (prendendo come $\mathcal{L}_2 = -e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$ e aggiungendo la quantità nulla $\frac{\partial L_1}{\partial x} = 0$ al secondo membro di (3.1.7) senza alterare in alcun modo l'equazione), la (3.1.7) riscritta diventa

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2).$$

L'equazione del moto relativistica trovata è quindi l'equazione di Eulero-Lagrange, in cui la lagrangiana è

$$\boxed{\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).} \tag{3.1.8}$$

La $(3.1.8)$ è la lagrangiana relativistica nel caso non covariante. A questo punto, una volta trovata la lagrangiana relativistica, si può sviluppare tutta la meccanica analitica relativistica .

3.2 *Hamiltoniana relativistica non covariante*

La meccanica hamiltoniana è un'altra formulazione della meccanica, diversa sia dalla formulazione newtoniana che da quella lagrangiana, pur partendo però dai risultati raggiunti da questa. Lo scopo di questo paragrafo è illustrare il passaggio dal sistema di n equazioni del secondo ordine di Eulero-Lagrange a un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine che costituiscono le equazioni di Hamilton. Successivamente, grazie ai risultati ottenuti, si potrà formulare la dinamica hamiltoniana relativistica non covariante.

3.2.1 *Breve formulazione della dinamica hamiltoniana classica*

Nella dinamica lagrangiana le variabili di interesse erano le coordinate lagrangiane q_i e le loro derivate $\dot{q}_i$ cioè le velocità generalizzate.

Per formulare la dinamica hamiltoniana si introducono le trasformazione di Legendre. Le trasformazioni di Legendre sono trasformazioni delle variabili dinamiche, che coinvolgono sia le coordinate che le velocità e conducono a delle nuove variabibili $\tilde{q}_i$ che sono funzioni delle vecchie variabili:

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\mathbf{q}, t).$$

Le altre variabili sono quelle che vengono chiamati i momenti coniugati. Per definizione, i momenti coniugati sono delle funzioni delle vecchie coordinate e delle vecchie velocità, ottenute dalla lagrangiana per derivazione rispetto alle velocità:

$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Un'ultima trasformazione riguarda il tempo, il quale è una funzione delle vecchie variabili:

$$\tilde{t} = \tilde{t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = t.$$

Le seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = t \end{cases} \tag{3.2.9}$$

prendono il nome di **Trasformazioni di Legendre**.

L'idea centrale della formulazione di Hamilton è di formulare l'equazione del moto, rispetto alle variabili $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$, ottenute dalla trasformazione di Legendre, anziché le variabili lagrangiane $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. In questo modo le coordinate $\tilde{p}_i$ vengono pensate come indipendenti dalle $\tilde{q}_i$ e vengono utilizzate al posto di $\dot{q}_i$.

Osservazione 3.2.1 *L'invertibilità delle trasfromazioni di Legendre è sempre garantita nel caso dei sistemi meccanici naturali, in cui la lagrangiana ha la forma* $\mathcal{L} = T - U$, *con un'energia potenziale* U *che non dipende da* $\dot{\mathbf{q}}$. *Più in generale, se si considera il caso di funzioni lagrangiane più generali (cioè non del tipo* $\mathcal{L} = T - U$*), l'invertibilità vale se è soddisfatta la condizione di nondegenerazione det* $\left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0.$

Lo scopo principale di questo paragrafo consiste nello scrivere le equazione del moto rispetto al nuovo sistema di variabili, utilizzando le trasformazioni di Legendre.

Dato un sistema lagrangiano, se $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è la lagrangiana di una particella, si introduca una funzione $\mathcal{H}$, detta hamiltoniana, definita come

$$\mathcal{H} = \tilde{p}_i \cdot \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i \tilde{p}_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

Utilizzando le trasformazioni di Legendre, l'equazione appena scritta assume la seguente forma:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sum_i \tilde{p}_i \dot{q}_i(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t} = t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t} = t), \dot{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{t}), t = \tilde{t}) \tag{3.2.10}$$

A partire da questa equazione si ottengono:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \dot{q}_i + \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{p}_i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{p}_i}.$$

Ricordando che $\tilde{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ le precedenti equazioni diventano:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{q}_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \dot{q}_i + \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{p}_i} - \sum_{k=1}^{n} \tilde{p}_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \tilde{p}_i}.$$

cioè

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dot{\tilde{p}}_i \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \dot{q}_i.$$

Quindi le equazioni del moto rispetto al nuovo sistema di variabili, che sono il risultato delle trasformazioni di Legendre, assumono la seguente forma:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{q}_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_i} \\ \dfrac{d\tilde{p}_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{q}_i} \end{cases} \tag{3.2.11}$$

e prendono il nome di **equazioni di Hamilton**. Queste equazioni costituiscono un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, nelle $2n$ incognite $\tilde{p}_i$ e $\tilde{q}_i$, dove la funzione $\mathcal{H}$ è la (3.2.10).

Osservazione 3.2.2 *L'interesse principale di questo modo di procedere consiste nel fatto che le* $2n$ *equazioni differenziali così ottenute presentano una struttura molto particolare e simmetrica.*

Come conseguenza delle equazioni di Hamilton si trovano le seguenti identità:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{p}_i} \dot{\tilde{p}}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$\text{e} \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_i (\dot{\tilde{p}}_i \dot{q}_i + \tilde{p}_i \ddot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

da cui si ricava

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Quindi se la lagrangiana non dipende dal tempo, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, si ha che $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$ e quindi la grandezza fisica espressa dalla Hamiltoniana è una costante del moto.

Con queste premesse, nel prossiamo paragrafo, si determinerà l'hamiltoniana relativistica non covariante per una particella lentamente accelerata da campi elettromagnetici, utilizzando come lagrangiana la $(3.1.8)$.

3.2.2 *Formulazione hamiltoniana relativistica non covariante*

Consideriamo una particella lentamente accelerata da campi elettromagnetici con carica e e massa m_0. L'hamiltoniana di questa particella è:

$$\mathcal{H} = \sum_i \tilde{p}_i v_i + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \qquad (3.2.12)$$

Osservazione 3.2.3 *In questa equazione compaiono le velocità* v_i*, riferite alle vecchie variabili. Quello che verrà fatto è riscrivere le velocità in funzione delle variabili hamiltoniane* $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$*. Siccome non c'è possibilità di confusione, d'ora in poi identificheremo* $\mathbf{p}$ *con* $\tilde{\mathbf{p}}$ *e* $\mathbf{q}$ *con* $\tilde{\mathbf{q}}$.

Prima di iniziare, si definiscono momenti coniugati la quantità:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}$$

dove $\mathcal{L}$ è la lagrangiana relativistica non covariante, espressa nella (3.1.8). Derivando questa lagrangiana per la velocità si ottiene:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + eA_i. \tag{3.2.13}$$

Da tale espressione si può ricavare il valore della componente i-esima della velocità:

$$\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_i - eA_i$$

$$\Rightarrow v_i = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{(p_i - eA_i)}{m_0}. \tag{3.2.14}$$

Nella relazione trovata compare ancora il termine v^2 che va espresso secondo il formalismo hamiltoniano. Quindi elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$${v_i}^2 = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)\left(\frac{(p_i - eA_i)^2}{m_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_i^2 = \frac{(p_i - eA_i)^2}{m_0^2} - \frac{v_i^2}{c^2}\frac{(p_i - eA_i)^2}{m_0^2}.$$

Svolgendo gli opportuni calcoli, si ottiene la seguente espressione:

$$v_i^2 = \frac{(p_i - eA_i)^2}{m_0^2}\left(\frac{c^2 m_0^2 + (p_i - eA_i)^2}{c^2 m_0^2}\right)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{3} c^2 (p_i - eA_i)^2}{c^2 m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}.$$

Quindi

$$v_i = \frac{\sum_{i=1}^{3} c(p_i - eA_i)}{\sqrt{c^2 m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}}.$$

Nella (3.2.13) compare il termine $1 - \frac{v^2}{c^2}$, quindi con la v trovata sopra, la quantità $1 - \frac{v^2}{c^2}$ diventa:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{3} c^2 (p_i - eA_i)^2}{c^2[c^2 m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2]} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{3} c^2 (p_i - eA_i)^2}{c^2 m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2} =$$

$$= \frac{c^2 m_0^2}{c^2 m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}.$$

Con questi opportuni accorgimenti la (3.2.12) diventa:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3} v_i(p_i - eA_i) + m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\phi =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)\left[\frac{c(p_i - eA_i)}{\sqrt{c^2m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}}\right] + m_0c^2\frac{cm_0}{\sqrt{c^2m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}} +$$

$$+e\phi = \frac{\sum_{i=1}^{3} c(p_i - eA_i)^2 + c^3m_0^2}{\sqrt{c^2m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}} + e\phi =$$

Si mette in evidenza la c al numeratore:

$$= \frac{\sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2 + c^2m_0^2}{\sqrt{c^2m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}} + e\phi = c\sqrt{c^2m_0^2 + \sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2} + e\phi =$$

si divide il radicando per la quantità $c^2m_0^2$ e lo si porta fuori dalla radice:

$$= c^2m_0\sqrt{1 + \frac{\sum_{i=1}^{3}(p_i - eA_i)^2}{c^2m_0^2}} + e\phi$$

ricordando la (3.2.13), la quantità:

$$\frac{p_i - eA_i}{m_0} = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}.$$

Quindi l'espressione dell'hamiltoniana, con queste opportune modifiche, diventa:

$$\mathcal{H} = m_0c^2\sqrt{1 + \frac{v_i^2}{c^2\left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)}} + e\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi.} \qquad (3.2.15)$$

La (3.2.15) è l'espressione relativistica dell'hamiltoniana non covariante.

CAPITOLO

4

LA DINAMICA LAGRANGIANA RELATIVISTICA COVARIANTE

4.1 *Premessa*

In fisica si chiamano covarianti o invarianti in forma, delle equazioni la cui dipendenza funzionale dalle variabili non viene alterata da una classe di trasformazioni. Questo significa che se le equazioni sono soddisfatte in un sistema di riferimento inerziale, allora lo sono in qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale. Lo scopo di questo capitolo è costruire delle equazioni del moto che posseggano questa proprietà di invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Ricordando infatti il concetto di invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange trattato nel capitolo 1, quello che si farà è partire da una trasformazione di variabili lagrangiane $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ alle nuove variabili lagrangiane $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{t} = t)$ e costruire la lagrangiana relativa alle nuove coordinate

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \tilde{t} = t) = \mathcal{L}(\mathbf{x}(\mathbf{q}, t), \mathbf{v}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), t = \tilde{t}),$$

così che $\mathbf{q}(t)$ è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange associate a $\tilde{\mathcal{L}}$ se e solo se il corrispondente $\mathbf{x}(t)$ è soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti a $\mathcal{L}$.

4.2 *La lagrangiana relativistica covariante*

4.2.1 *Introduzione*

Esempio 4.2.1 *Si considera la lagrangiana relativistica per una particella lentamente accelerata da un campo elettromagnetico:*

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \qquad (4.2.1)$$

Grazie all'utilizzo del teorema del capitolo 1, si può riscrivere la $(4.2.1)$ *effettuando un cambiamneto di coordinate lagrangiane. Il risultato sarà l'equazione del moto in un nuovo sistema di coordinate. Per capire meglio questo concetto,* *si prendano come esempio le trasformazioni in coordinate cilindriche:*

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Lo scopo è riscrivere la $(4.2.1)$ *utilizzando le seguenti trasformazioni. Questo è possibile perchè il passaggio dalle coordinate cartesinate, in cui si conosce la lagrangiana, a quelle cilindriche è una trasformazione di coordinate lagrangiane. Le nuove coordinate lagrangiane sono:*

$$\tilde{q_1} = r, \quad \tilde{q_2} = \phi, \quad \tilde{q_3} = z, \quad \tilde{t} = t$$

e sono effettivamente trasformazioni di coordinate lagrangiane perchè $\tilde{t} = t$*, cioè le uniche a subire le trasformazioni sono le coordinate, ma non il tempo. Derivando le trasformazioni si ottengono:*

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi)^2 + (\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi)^2 + \dot{z}^2$$

cioè:

$$v^2 = (\tilde{v_1}\cos\tilde{q_2} - \tilde{q_1}\tilde{v_2}\sin\tilde{q_2})^2 + (\tilde{v_1}\sin\tilde{q_2} + \tilde{q_1}\tilde{v_2}\cos\tilde{q_2})^2 + \tilde{q_3}^2 \tag{4.2.3}$$

Quello che verrà fuori sostituendo la velocità di $(4.2.3)$ *in* $(4.2.1)$*, seppure molto complicate a livello di calcolo, è la lagrangiana da cui si ottengono le equazioni del moto in coordinate cilindriche come equazioni di Eulero-Lagrange.*

Con questo banale esempio, si vuole sottolineare come si possono riscrivere le equazioni del moto rispetto a un sistema di coordinate ottenute da trasformazioni di coordinate lagrangiane. Lo scopo è sviluppare una lagrangiana relativistica per cui le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni di coordinate lagrangiane.

Si prendano in esame due sistemi di riferimento inerziali $S(Oxyz)$ e $S'(O'x'y'z')$, quest'ultimo si muove rispetto al primo con velocità costante v

diretta lungo la direzione positiva delle x in modo che $x \equiv x'$. Un evento è caratterizzato in S dalle coordinate spazio-temporali (x, y, z, t). Lo stesso evento avrà in S' coordinate spazio-temporali (x', y', z', t'). Le trasformazioni che legano l'evento in S' e S sono date da:

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{4.2.4}$$

che prendono il nome di **Trasformazioni di Lorentz**. Le trasformazioni di Lorentz mostrano come il tempo non è più assoluto, ma è considerato un parametro relativo al sistema di riferimento scelto, come le coordinate spaziali. Tali trasformazioni quindi, non sono trasformazioni lagrangiane proprio perchè il tempo t' non è la funzione banale richiesta dal formalismo lagrangiano:

$$t' = t'(\mathbf{x}, t) \neq t.$$

Esempio 4.2.2 *Si consideri la lagrangiana relativistica non covariante per una particella libera*

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - eE_0 x \tag{4.2.5}$$

L'equazione del moto relativa a tale lagrangiana è

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = eE_0. \tag{4.2.6}$$

Si prenda in esame un sistema di riferimento inerziale Σ' che si muove rispetto a Σ con velocità $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ e si considerino le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Se fossero trasfromazioni lagrangiane, grazie all'utilizzo del teorema del capitolo 1 si potrebbe riscrivere la $(4.2.5)$ *utilizzando tali trasformazioni. La nuova lagrangiana sarebbe*

$$\mathcal{L}' = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{(v'+u)^2}{c^2(1+\frac{uv'}{c^2})}} - eE_0'\frac{x'+ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Da notare che la nuova lagrangiana ottenuta utilizzando le trasformazioni di Lorentz è totalmente diversa da $(4.2.5)$ *e non fornisce l' equazione del moto* $(4.2.6)$*.*

Lo scopo, a questo punto, è sviluppare una teoria relativistica lagrangiana per la quale le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni di coordinate lagrangiane.

4.2.2 *Rappresentazione quadridimensionale delle trasformazioni di Lorentz*

Nella Fisica Classica di Newton-Galileo, il tempo t è lo stesso per ogni osservatore, pertanto per descrivere il moto di un punto materiale in diversi sistemi inerziali è sufficiente trovare come cambiano le coordinate spaziali (x, y, z) che individuano la posizione del punto ad un generico istante t. Il problema è tridimensionale e completamente descritto dal vettore tridimensionale $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Nel caso della Fisica Relativistica, invece, anche il tempo t dipende dalla posizione in cui esso viene misurato e per poter descrivere interamente il moto di un punto, non basta conoscere le sue coordinate spaziali (x, y, z) in un dato riferimento inerziale ma si deve anche conoscere il tempo misurato da un orologio che si trovi nel punto di coordinate (x, y, z) nello stesso riferimento. Se si cambia riferimento, non solo cambieranno le coordinate spaziali ma anche quella temporali. Quindi, mentre la Fisica Classica è tridimensionale, la Fisica Relativistica è quadridimensionale. In particolare, per individuare completamente la posizione di un corpo nello spazio-tempo relativistico rispetto ad una certa origine si dovranno dare quattro coordinate: tre coordinate spaziali (x, y, z) e una temporale t.

Un evento spazio-temporale è indicato dalla quaterna (x, y, z, t). È quindi possibile creare uno spazio quadridimensionale a struttura vettoriale al quale riferire i fenomeni oggetto della teoria relativistica. Per fare questo conviene porre $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Un evento è quindi indicato dal quadrivettore posizione $\underline{\mathbf{x}} = (x_0; x_1; x_2; x_3)$. Le trasformazioni di Lorentz diventano di conseguenza:

$$\begin{cases} (x_0)' = \dfrac{x_0 - \frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ (x_1)' = \dfrac{x_1 - \frac{v}{c}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ (x_2)' = x_2 \\ (x_3)' = x_3 \end{cases} \tag{4.2.8}$$

A questo punto per descrivere il moto di un punto materiale occorre avere un parametro s che sostituisca il tempo e deve essere invariante rispetto alle trasfomazioni di Lorentz. Questo parametro non è altro che il tempo proprio τ tale che per ogni legge del moto del punto, $\mathbf{x}(t)$, la corrispondenza tra τ e t è biettiva

$$\tau \longleftrightarrow t$$

e di conseguenza ogni legge del moto può essere espressa come $\mathbf{x}(\tau)$ anzichè $\mathbf{x}(t(\tau))$. Una volta introdotto il concetto di quadrivettore, si può definire la quadrivelocità $\underline{\mathbf{w}} = (w_0, w_1, w_2, w_3)$ come:

$$w_0 = \frac{dx_0}{d\tau},\ w_1 = \frac{dx_1}{d\tau},\ w_2 = \frac{dx_2}{d\tau},\ w_3 = \frac{dx_3}{d\tau} \quad \text{con} \quad x_0 = ct, \ \text{cioè:}$$

$$\underline{\mathbf{w}} = \frac{d\underline{\mathbf{x}}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}[c \ \ v_{x_1} \ \ v_{x_2} \ \ v_{x_3}].$$

Queste opportune introduzioni individuano il sistema di coordinate adatte a formulare una teoria covariante. Le coordinate lagrangiane saranno pertanto le coordinate $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau)$, perciò la lagrangiana relativistica covariante sarà la funzione

$$L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau) \tag{4.2.9}$$

tale da soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial L}{\partial w_1} = \dfrac{\partial L}{\partial x_1} \\ \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial L}{\partial w_2} = \dfrac{\partial L}{\partial x_2} \\ \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial L}{\partial w_3} = \dfrac{\partial L}{\partial x_3} \\ \dfrac{d}{d\tau}\dfrac{\partial L}{\partial w_0} = \dfrac{\partial L}{\partial x_0} \end{cases} \tag{4.2.10}$$

4.2.3 *Formulazione della lagrangiana relativistica covariante*

Si consideri una particella di massa m_0 e carica e, lentamente accelerata da un campo elettromagnetico. L'equazione del moto di tale particella è:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F_L = \frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})] - e\frac{dA_x}{dt}. \tag{4.2.11}$$

Come già detto ad inizio capitolo, l'obiettivo principale è riscrivere l'equazione del moto in forma covariante. In sostanza questo si traduce nel cercare la lagrangiana che soddisfa tale condizione di covarianza. Le equazioni $(4.2.10)$ come è stato già detto,sono costituite da una componente spaziale e da una componente temporale. Per questo motivo, il modo di procedere per trovare la lagrangiana covariante si divide in due parti: una prima parte dedicata alla formulazione dell'equazione per la parte spaziale, e un'altra per la parte temporale. Con queste opportune precisazioni, si può iniziare a svolgere la prima parte del problema.

Parte spaziale. Ricordando la seguente relazione

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{4.2.12}$$

[1] Da notare che le prime tre equazioni rappresentano le equazioni per la componente spaziale, invece l'ultima per la componente temporale.

il primo step da eseguire è quello di riscrivere la (4.2.11) rispetto alle nuove variabili, perciò si moltiplica a destra e a sinistra la (4.2.11) per (4.2.12) ottenendo:

$$\frac{dt}{d\tau}\left(\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x}[-e(\phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})] - e\frac{dA_x}{dt}\right)$$

$$m_0\frac{d}{d\tau}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-e\left(\frac{\phi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\right] - e\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dA_x}{dt} \tag{4.2.13}$$

A questo punto, introducendo il quadripotenziale:

$$\underline{\mathbf{A}} = (\phi/c, \mathbf{A}) = (A_0, \mathbf{A})$$

e ricordando la definizione di quadrivelocità, l'equazione (4.2.13) diventa:

$$m_0\frac{d}{d\tau}\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-e\left(\frac{c\phi}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\right] - e\frac{dA_x}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_0\frac{d}{d\tau}w_x = \frac{\partial}{\partial x}(-e[w_0A_0 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{A}]) - e\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{A}) \tag{4.2.14}$$

Siccome $-e\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{A})$ è uguale a $-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}[-e(w_0A_0 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{A})]$ e definendo $L_2 = -e(w_0A_0 - \mathbf{w}\cdot\mathbf{A})$, la (4.2.14) diventa:

$$m_0\frac{d}{d\tau}w_x = \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}L_2. \tag{4.2.15}$$

Come già si evince da questi primi calcoli, il ragionamento che si sta seguendo è simile a quello usato per le lagrangiane trovate nei capitoli 2 e 3. Quindi seguendo la stessa linea logica si pone $L_1 = \frac{1}{2}m_0(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)$, perciò la (4.2.15) di conseguenza avrà la forma:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_1}{\partial w_x} + \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_2}{\partial w_x} = \frac{\partial L_2}{\partial x}. \tag{4.2.16}$$

Siccome $\frac{\partial L_1}{\partial x} = 0$ può essere aggiunto al secondo membro di (4.2.16) senza alterarne l'equazione:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_1}{\partial w_x} + \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L_2}{\partial w_x} = \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial x}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial(L_1+L_2)}{\partial w_x}=\frac{\partial(L_2+L_1)}{\partial x}$$

L'equazione appena trovata è l'equazione di Eulero-Lagrange in forma covariante per la parte spaziale, con lagrangiana:

$$\boxed{L=\frac{1}{2}m_0\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}-e\underline{\mathbf{w}}\bullet_M\underline{\mathbf{A}}.} \tag{4.2.17}$$

Parte temporale. Si definisce quadrimomento la quantità

$$\underline{\mathbf{p}}=m\frac{d\underline{\mathbf{x}}}{d\tau}=\left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=(p_0,\mathbf{p}), \tag{4.2.18}$$

dove la prima componente è la parte temporale del quadrimomento, mentre la seconda è la parte spaziale del quadrimomento. In particolare la componente temporale del quadrimomento viene identificato come la generalizzazione relativistica dell'energia cinetica

$$p_0=\frac{E}{c}=\frac{m_0c^2}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Un risultato molto importante è che anche nella dinamica relativistica vale il teorema delle forze vive, il quale mette in gioco la parte temporale del quadrimomento, ovvero:

Teorema 4.2.1 *La variazione dell'energia cinetica relativistica di un punto materiale nell'intervallo* $[t_1,t_2]$ *è uguale al lavoro compiuto dalla forza di Lorentz.*

Dal risultato di questo teorema, se si considera il moto di un punto materiale nell'intervallo $[t_1,t_2]$, si ottiene:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2(t_2)/c^2}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2(t_1)/c^2}}=\int_{t_1}^{t_2}=\mathbf{F_L}\cdot d\mathbf{x}$$

differenziando tale equazione:

$$d\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\mathbf{F_L}\cdot d\mathbf{x}$$

e dividendo per $d\tau$ si ottiene:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\mathbf{F_L}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow cm_0 \frac{d}{d\tau} \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathbf{F_L} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cm_0 \frac{dw_0}{d\tau} = \mathbf{F_L} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{m_0 \frac{dw_0}{d\tau} = \frac{1}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w}} \tag{4.2.19}$$

che rappresenta un'equazione relativistica del punto materiale. Tale equazione coinvolge la parte temporale della quadrivelocità. Quello che si dovrà fare è riscrivere questa equazione nella forma

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial w_0} = \frac{\partial L}{\partial x_0}.$$

Quindi partendo da (4.2.19) si può definire $L_1 = \frac{1}{2} m_0 w_0^2$, quindi la (4.2.19) diventa

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_1}{\partial w_0} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{w}}{c} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

cioè:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_1}{\partial w_0} = \frac{e}{c} (w_x E_x + w_y E_y + w_z E_z) \tag{4.2.20}$$

Sostituendo ai campi l'espressione dei suoi potenziali, il secondo membro di (4.2.20) assume la forma:

$$-\frac{e}{c} \left(w_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + w_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + w_z \frac{\partial \phi}{\partial z} + c w_x \frac{\partial A_x}{\partial x_0} + c w_y \frac{\partial A_y}{\partial x_0} + c w_z \frac{\partial A_z}{\partial x_0} \right) =$$

$$= -e \left(w_x \frac{\phi/c}{\partial x} + w_y \frac{\phi/c}{\partial y} + w_z \frac{\phi/c}{\partial z} + w_x \frac{\partial A_x}{\partial x_0} + w_y \frac{\partial A_y}{\partial x_0} + w_z \frac{\partial A_z}{\partial x_0} \right) =$$

$$= -e \left(w_x \frac{\partial A_0}{\partial x} + w_y \frac{\partial A_0}{\partial y} + w_z \frac{\partial A_0}{\partial z} - w_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + w_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_0} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}) \right) \tag{4.2.21}$$

La quantità: $w_x \frac{\partial A_0}{\partial x} + w_y \frac{\partial A_0}{\partial y} + w_z \frac{\partial A_0}{\partial z} - w_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_0}$ è uguale a $\frac{dA_0}{d\tau}$ quindi l'equazione (4.2.21) diventa

$$-e \frac{dA_0}{d\tau} - e \frac{\partial}{\partial x_0} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}) + e w_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_0}.$$

In sostanza si ottiene

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_1}{\partial w_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} (-e \mathbf{w} \cdot \mathbf{A}) - e \frac{d}{d\tau} \frac{\partial (\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})}{\partial w_0} + e w_0 \frac{\partial A_0}{\partial x_0}$$

cioè:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_0}[L_1 + e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x_0}(e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}) \tag{4.2.22}$$

Siccome $\dfrac{\partial L_1}{\partial x_0} = 0$, anche in questo caso può essere aggiunto al secondo membro di (4.2.22) senza alterare l'equazione:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_0}[L_1 + e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x_0}(L_1 + e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})$$

cioè

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_0}[\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x_0}(\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}).}$$

L'equazione appena trovata è l'equazione del moto in forma covariante per la componente temporale, con lagrangiana:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m_0 w_0^2 + e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}).}$$

Ricapitolando

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_0}[\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x_0}(\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}) \tag{4.2.23}$$

è l'equazione per la componente temporale, e

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}[\frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}) \tag{4.2.24}$$

è l'equazione per la componente spaziale. Da notare che sono state trovate due lagrangiane, precisamente una per la componente spaziale e una per quella temporale, ognune relative ad un'equazione del moto. Sebbene i risultati ottenuti soddisfano appieno il criterio di covarianza, è consigliabile avere un'unica espressione del moto e quindi un'unica lagrangiana che racchiuda la componente spaziale e temporale di (4.2.10). Con i seguenti stratagemmi matematici si può arrivare a questo risultato.

Si moltiplica per (-1) la (4.2.23) ottenendo:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_0}[-\frac{1}{2}m_0 w_0^2 - e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x_0}(-\frac{1}{2}m_0 w_0^2 - e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}), \tag{4.2.25}$$

Si aggiunge al primo e al secondo membro di (4.2.25) la quantità $\dfrac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_0}[\frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - \frac{1}{2}m_0 w_0^2 - e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x_0}(\frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - \frac{1}{2}m_0 w_0^2 - e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})$$

e in maniera analoga nella (4.2.24) si aggiunge al primo e al secondo membro la quantità $-\frac{1}{2}m_0 w_0^2$:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}[-\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + \frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + \frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})$$

Con questi artefizi matematici, le due equazioni risultano essere uguali e perciò

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial w_x}[-\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + \frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - e(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})] = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{2}m_0 w_0^2 + \frac{1}{2}m_0 \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} - e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}})}$$

è considerata l'equazione del moto in forma covariante con lagrangiana relativistica covariante:

$$\boxed{L = -\frac{1}{2}m_0 \underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{w}} - e\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}.} \tag{4.2.26}$$

Si ricorda che un'equazione è covariante rispetto a determinate trasformazioni se mantiene una sua struttura formale; più precisamente se tutti i suoi termini covariano, cioè variano secondo le stesse leggi di trasformazione. Nel caso di equazioni di Eulero-Lagrange, la loro covarianza significa che le nuove equazioni differenziali del moto, ottenute tramite una certa trasformazione, mantengono una struttura lagrangiana.

4.3 *Hamiltoniana relativistica covariante*

Nella formulazione della dinamica Hamiltoniana non covariante, le trasformazioni di variabili utilizzate erano le trasformazioni di Legendre:

$$\begin{cases} \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \tilde{t} = \tilde{t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = t. \end{cases} \tag{4.3.27}$$

A partire da queste trasformazioni di variabili si sono ricavate le equazioni del moto, note come equazioni di Hamilton, rispetto al nuovo sistema di variabili.

Quello che si andrà a fare di seguito è trovare l'equazione di Hamilton in forma covariante, utilizzando l'Hamiltoniana relativistica covariante.

Le coordinate lagrangiane per la costruzione della dinamica covariante sono state $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau)$, definite precedentemente. Anche in questo caso per l'Hamiltoniana covariante si adopererà un cambio di variabili, che condurranno a delle nuove variabili che saranno funzioni delle vecchie variabili $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau)$, in particolare:

$$\begin{cases} q_\alpha = q_\alpha(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau) = x_\alpha \\ p_\alpha = p_\alpha(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau) = \dfrac{\partial L}{\partial w_\alpha}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau) \\ s = s(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau) = \tau \end{cases} \tag{4.3.28}$$

dove la funzione $L(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau)$ è la lagrangiana relativistica covariante $(4.2.26)$ e la funzione $p_\alpha(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}, \tau)$ è il quadrimomento relativistico covariante $p_\alpha = [p_0, \mathbf{p}]$, con

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial w_0} = -m_0 w_0 - eA_0 = -m_0 \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - e\frac{\phi}{c} \tag{4.3.29}$$

parte temporale del quadrimomento, e

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial w_i} = m_0 w_i + eA_i \tag{4.3.30}$$

parte spaziale del quadrimomento.

Ricordando come è definita l'Hamiltoniana canonica, l'Hamiltoniana relativistica covariante è data da:

$$\boxed{H = \sum_\alpha p_\alpha w_\alpha + \frac{1}{2} m_0 \underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{w}} + e \underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{A}}.} \tag{4.3.31}$$

Esplicitando la sommatoria, la $(4.3.31)$ diventa:

$$H = p_0 w_0 + p_i w_i + \frac{1}{2} m_0 w_0^2 - \frac{1}{2} m_0 w_i^2 + e w_0 A_0 - e w_i A_i. \tag{4.3.32}$$

Ricordando la definizione di quadrimomento covariante, in particolare la $(4.3.30)$ e $(4.3.29)$, la $(4.3.32)$ diventa:

$$H = -m_0 w_0^2 - eA_0 w_0 + m_0 w_i^2 + eA_i w_i + \frac{1}{2} m_0 w_0^2 - \frac{1}{2} m_0 w_i^2 + e w_0 A_0 - e w_i A_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2} m_0 w_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_0 w_i^2$$

e quindi

$$\boxed{H = -\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{w}} \bullet_M \underline{\mathbf{w}}).} \tag{4.3.33}$$

è l'espressione della Hamiltoniana relativistica covariante.

Dalla $(4.3.29)$ si ricava

$$w_0 = \frac{-p_0 - eA_0}{m_0} \tag{4.3.34}$$

e dalla $(4.3.30)$ si ricava

$$w_i = \frac{p_i - eA_i}{m_0}, \tag{4.3.35}$$

quindi sostituendo questi valori in $(4.3.33)$ si ottiene:

$$H = -\frac{(p_0 + eA_0)^2}{2m_0} + \sum_i \frac{(p_i - eA_i)^2}{2m_0}. \tag{4.3.36}$$

Tenendo conto della $(4.3.36)$, le equazioni di Hamilton in forma covariante sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha} = -\dfrac{p_0 + eA_0}{m_0} + \displaystyle\sum_i \dfrac{p_i - eA_i}{m_0} = \dfrac{dq_\alpha}{d\tau} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_\alpha} = \dfrac{e}{m_0}(p_0 + eA_0)\dfrac{\partial A_0}{\partial x_\alpha} + \displaystyle\sum_i \dfrac{e}{m_0}(p_i - eA_i)\dfrac{\partial A_i}{\partial x_\alpha} = \dfrac{dp_\alpha}{d\tau} \end{cases} \tag{4.3.37}$$