Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2013-2014

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n.3

3.1. In $\mathbb{R}^3$ dire quali dei seguenti sottinsiemi è un sottospazio vettoriale

1) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - 2z = 0\}$

2) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 = 0\}$

3) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = -3\}$

3.2. Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dice *antisimmetrica* se $A^t = -A$.

1) Se $A = \{a_{i,j}\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, quale relazione esiste tra $a_{i,j}$ e $a_{j,i}$, per $i, j \in \{1, ..., n\}$?

2) In particolare, cosa si può dire su $a_{i,i}$, $i \in \{1, .., n\}$?

3) Dimostrare che l'insieme delle matrici simmetriche è un sottospazio vettoriale di $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

3.3. Una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dice *nilpotente* se esiste $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $A^k = 0$. Dimostrare che l'insieme delle matrici nilpotenti non è un sottospazio vettoriale di $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(Suggerimento: $(a + b)^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} a^i b^{k-i}$ vale sempre?)

3.4. Dire se i seguenti vettori di V sono linearmente indipendenti oppure linearmente dipendenti. Inoltre dire se generano V.

1) $(1, 2, 3, 4); (1, -1, 5, 7); (-1, 4, -7, -10); (1, 0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^4$;

2) $(1, -1, 1, -1, 1); (-1, 1, -1, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^5$;

3) 1;2; 3 in $\mathbb{R}$;

4) $1; i$ in $\mathbb{C}$.

3.5. Si considerino i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = < (1,-1,0,1),(3,2,1,0) >$$
$$W_2 = < (1,0,0,0),(2,3,1,-1),(1,0,1,0),(3,3,-1,-1) >$$

Calcolare una base e la dimensione di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. Dire se $W_1 + W_2$ è una somma diretta.

3.6. Dire quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari

1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$

2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x+y-z) \end{array}$

3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x^2+y^2, 2x) \end{array}$

4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto 2x \end{array}$

5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5 \\ x \mapsto (x,-x,2x,-2x,0) \end{array}$

6) $f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y) \mapsto (x+2y, 3y, -x, 2+x) \end{array}$

3.7. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbf{K})$, $A = \{a_{i,j}\}_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$. Si definisce *traccia di A* l'elemento di $\mathbb{K}$ ottenuto come somma degli elementi della diagonale principale di A, i. e. $Tr(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. L'applicazione definita da

$$\begin{aligned} T_r : & M_{n,n}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & A \mapsto Tr(A) \end{aligned}$$

si chiama *Traccia*. Dire se la *Traccia* è un'applicazione lineare.

3.8. Descrivere il nucleo e l'immagine dell'applicazione f_5 definita in 3.6, in particolare trovandone una base e la dimensione.