Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2013-2014

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n.4

4.1. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia $T_h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita da

$$T_h = \begin{pmatrix} h & h-2 & h-1 & h & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & h \\ 0 & 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & -2 & h \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di h in $\mathbb{R}$, si descrivano il nucleo e l'immagine di T_h, in particolare dicendo qual la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Calcolare, se esiste, T_2^{-1}.

4.2. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia $T_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T_h = \begin{pmatrix} h-1 & h & h-1 \\ 3 & 1 & h \\ h-2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di h in $\mathbb{R}$, si descrivano il nucleo e l'immagine di T_h, in particolare dicendo qual la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Calcolare, se esiste, T_2^{-1}.

4.3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Si calcolino le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e da essi si estragga una base di $\Im f$. Qual è la dimensione di $\Im f$? Dire se f è iniettiva e se è suriettiva.

2) L'applicazione f è invertibile? Se si, calcolare f^{-1}.

4.4. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli una base di $\ker f$. Si dica se f è iniettiva e se è suriettiva. La funzione f è invertibile?

4.5. Sia $b = (v_1, v_2)$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori $v_1 = (-7, 5)$ e $v_2 = (2, 3)$.

a) Calcolare $[I]_b^e$ ed $[I]_e^b$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

b) Se al posto di b prendiamo la base $b' = (v_2, v_1)$, come cambia la matrice da $[I]_b^e$ a $[I]_{b'}^e$?

4.6. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se $b = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. In caso affermativo calcolare le matrici di cambiamento di base $[I]_b^e$ (dalla base b alla base e) ed $[I]_e^b$ (dalla base e alla base b), dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

b) Calcolare le coordinate del vettore $[v]_e = (1, 2, 1, 1)$ rispetto alla base b.