Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica A.A. 2013-2014

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n.6

6.1. Per ciascuna delle seguenti matrici trovare gli autovalori, gli autovettori, gli autospazi e le molteplicità algebriche e geometriche di ciascun autovalore. Dire se le matrici sono diagonalizzabili e in caso affermativo diagonalizzarle.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

6.2. A partire dalla base b data, trovare una base ortonormale con il metodo di Gram-Schmidt

a) in $\mathbb{R}^2$ sia $b = \{(2,0), (-1,1)\}$;

b) in $\mathbb{R}^3$ sia $b = \{(1,-1,2), (3,2,1), (1,0,-2)\}$;

c) in $\mathbb{R}^4$ sia $b = \{(1,0,-1,0), (1,1,1,0), (2,1,3,2), (-1,-2,0,1)\}$;

d) in $\mathbb{R}^4$ sia $b = \{(1,1,1,1), (0,1,-1,1), (2,1,2,1), (-1,2,2,-1)\}$.

6.3. Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

usando una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

6.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Trovare gli autovalori e gli autovettori di A;

ii) dimostrare che una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A è una base ortogonale;

iii) trovare una base ortonormale che diagonalizza A.

iv) Qual è la forma diagonale di A?

6.5 In $\mathbb{R}^5$ dire quali dei seguenti vettori sono ortogonali a due a due e trovare la norma di ciascuno di essi

$v_1 = (1, -1, 2, 3, 4)$; $v_2 = (0, 0, 1, 0, 0)$; $v_3 = (1, 1, 3, -2, 0)$; $v_4 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$; $v_5 = (3, 0, 0, 0, 0)$.

6.6 In $\mathbb{R}^3$ trovare la retta r che passa per $P_1 = (-1, 0, 3)$ e $P_2 = (2, 2, 2)$. Qual è il vettore direzione di r?

6.7 Sia $l = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 18 - 2\lambda \end{cases}$.

a) Trovare la retta r_1 che passa per $P_1 = (0, 0, 0)$ ed è parallela a l;

b) trovare una retta r_2 che passa per $P_2 = (1, -1, 0)$ ed è perpendicolare a l.

6.8 Dire qual è la posizione reciproca della retta $l = \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -2 + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda \end{cases}$

e la retta

i) $l_1 = \begin{cases} x = -7 + 12\lambda \\ y = -8 - 4\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -9 - 12\lambda \end{cases}$

ii) $l_2 = \begin{cases} x = 11 + \lambda \\ y = -6 + \frac{1}{3}\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -12 - \lambda \end{cases}$

iii) $l_3 = \begin{cases} x = -18 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$

iv) $l_4 = \begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$

v) $l_5 = \begin{cases} x = 22 - \lambda \\ y = 12 + 2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$

vi) $l_6 = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$

6.9 Trovare il piano π che passa per $P = (0, 0, 3)$ e contiene le rette l_2 ed l_5 dell'esercizio **6.7**.

6.10 **a)** Trovare il piano che passa per i punti $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (-1, 3, 17)$ e $P_3 = (1, 2, 18)$.

b) Trovare il piano che passa per i punti $P_1 = (1, 0, 1)$, $P_2 = (2, -2, 16)$ e $P_3 = (1, 0, 14)$.