

Università della Calabria
Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2020-2021

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n. 3

3.1. Dire se le seguenti matrici sono invertibili e in caso affermativo calcolarne l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.2. Calcolare l'inversa delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e risolvere il sistema $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.3. Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 2y + z + 4t = 0 \\ x - y - 4z + 2t = 0 \\ -x + y + 3z - 2t = 0 \\ 3x - 3y + z + 6t = 0 \end{cases}$$

3.4. Discutere e risolvere i seguenti sistemi lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} k & k-1 & 2k \\ k-1 & 1 & 2 \\ 2-k & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} k-2 & k-4 & 3 \\ 2 & 0 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k-3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2kz = 0 \\ y - kz = 1 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y = k - 2 \\ kx + (4 - k)y = 0 \\ -x + (k - 1)y + z = 2 - k \end{cases};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 2 & k-3 & k \\ k-1 & 3k & 1 \\ 3-k & 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x - y + z = k \end{cases}$$

3.5. Trovare il determinante delle seguenti matrici con lo sviluppo di Laplace

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Dire per quali valori di k la seguente matrice è invertibile

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 4k & 0 \\ -2 & k & 4 \end{pmatrix}$$

3.7. Dire per quali valori di $k, k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice A ha rango massimo. Quante e quali sono le soluzioni del sistema $AX = 0$, quando A ha rango massimo?

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 4k & 0 \\ -2 & k & 4 \end{pmatrix}$$

3.8. Discutere il numero di soluzioni del seguente sistema, al variare dei parametri h e k in \mathbb{R}

$$\begin{cases} -hx + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k \end{cases}$$

3.9. Calcolare il determinante delle seguenti matrici a coefficienti in \mathbb{C} e dire se sono invertibili.

$$A = \begin{pmatrix} i & i+2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -i & i-1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3i & i+2 & 4-i \\ 0 & -3 & 1-i \\ -i & i-1 & 2+i \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2-i \\ 1+2i & 1-3i & 1-i & 0 \\ 0 & -i & i-1 & 2+i \\ -1 & i & -2i & 2-2i \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 3+i & 5i-2 & 1+i \\ 2i & 1-3i & 1-i & 2 \\ 0 & 0 & i-1 & 0 \\ -1 & i & 2i & 1-2i \end{pmatrix}.$$

3.10. Risolvere i seguenti sistemi in \mathbb{C} .

$$\begin{cases} x - iy + (i+1)z = 0 \\ -x + 2y - (i+1)z = 0 \\ ix + y - z = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} ix - (2+i)y + (i-1)z = -1 \\ -x + 3y - (i+1)z = 0 \\ ix + y - z = 1 \end{cases};$$

3.11. Risolvere il seguente sistema in \mathbb{C} , al variare di $k \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x - iy + (i+1)z = 0 \\ -x + 3y - (i+1)z = 0 \\ x + y + kt = 1 \end{cases}$$