Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2020-2021

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n. 6

6.1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e da essi si estragga una base di $\mathrm{Im} f$. Qual è la dimensione di $\mathrm{Im} f$? Dire se f è iniettiva e se è suriettiva.

6.2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli una base di $\ker f$. Si dica se f è iniettiva e se è suriettiva. La funzione f è invertibile?

6.3. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia $T_h : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare definita da

$$T_h = \begin{pmatrix} h & h-2 & h-1 & h & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & h \\ 0 & 1 & h & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & -2 & h \end{pmatrix}.$$

Al variare di h in $\mathbb{R}$, si descrivano il nucleo e l'immagine di T_h, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

6.4. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia $T_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T_h = \begin{pmatrix} h-1 & h & h-1 \\ 3 & 1 & h \\ h-2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare di h in $\mathbb{R}$, si descrivano il nucleo e l'immagine di T_h, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

6.5. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4, -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$;

b) trovare le equazioni che descrivono Ker$T$, trovare una base e la dimensione di Ker$T$;

c) trovare una base e la dimensione di ImT;

d) dire se T è iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del vettore $(-1, 2, 3, 4)$;

f) trovare l'immagine tramite T del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da $W_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;

g) trovare una base e la dimensione di $KerT \cap W_2$, dove W_2 è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_1 = 0$.

6.6. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 5x_1 + 3x_2 - 4x_3, -2x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3, -2x_1 + x_2)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$;

b) trovare le equazioni che descrivono Ker$T$, una base e la dimensione di Ker$T$;

c) trovare una base e la dimensione di ImT;

d) dire se T è iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del vettore $(1, -1, 3)$;

f) trovare l'immagine tramite T del sottospazio $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 3x_2 + x_3 = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$.

6.7. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-x_3+2x_4, 3x_1+x_2-x_3+x_4, 2x_1+x_2+7x_3+2x_4, -3x_1-2x_2-x_3+x_4)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$;

b) trovare le equazioni che decrivono Ker$T$, una base e la dimensione di Ker$T$;

c) trovare una base e la dimensione di ImT;

d) dire se T è iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del vettore $(0, 2, 1, -4)$;

f) trovare l'immagine tramite T del sottospazio $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$.

6.8. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3 + 2x_4, -x_1 + x_2 + x_4, x_2 - x_3 + 3x_4, x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$;

b) trovare le equazioni che decrivono Ker$T$, una base e la dimensione di Ker$T$;

c) trovare una base e la dimensione di ImT;

d) dire se T è iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del vettore $(1, 0, 1, -2)$;

f) trovare l'immagine tramite T del sottospazio $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$;

g) trovare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker}T + W_2$, dove $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = x_2, x_3 = 0, x_4 = 0)$.

6.9. Descrivere il nucleo e l'immagine dell'applicazione

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5 \\ & x \mapsto (x, -x, 2x, -2x, 0) \end{aligned}$$

trovandone una base e la dimensione.

6.10. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k-1 \\ k & 1 & -1 & -1 \\ 2k & 2 & -1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di k in $\mathbb{R}$, descrivere il nucleo e l'immagine di T_k, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Dire se T_k è iniettiva, suriettiva, biettiva al variare di $k \in \mathbb{R}$.

6.11 Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & k & k \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare il determinante della matrice T_k. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare associata a T_k è un'isomorfismo?

b) Per $k = 1$ calcolare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare associata a T_1.

6.12 Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & k^2-1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 \\ k-1 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione e una base del nucleo e dell'immagine di f_k. Dire se f_k è iniettiva.

b) Per $k = 1$, calcolare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_1$.

c) Quando $k = 1$, trovare una base di $\mathrm{Ker} f_1^{\perp}$, il sottospazio ortogonale a $\mathrm{Ker} f_1$.

6.13 Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 & 0 \\ k-1 & 0 & 2k & 2k \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare il determinante della matrice T_k. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice ha rango massimo?

b) Per $k = 1$ calcolare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare associata a T_1.

6.14 Descrivere il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.15 Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2-2k & 1 & 1 \\ k-1 & k-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, dire se f_k è iniettiva, suriettiva, biettiva. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione e una base dell'immagine di f_k.

b) Per $k = 0$, calcolare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_0$.

6.16 Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ k & k & k^2 \\ 0 & 0 & k+3 \\ k+3 & k^2-9 & 3k+9 \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, dire se f_k è iniettiva, suriettiva, biettiva. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione e una base di $\ker f_k$.

b) Per $k = 0$, calcolare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_0$ e di $\mathrm{Im} f_0$.

c) Per $k = -3$, calcolare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_{-3}$ e di $\mathrm{Im} f_{-3}$.

6.17 Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2k & k \\ 0 & 0 \\ 2k-2 & 1-k \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, dire se f_k è iniettiva, suriettiva, biettiva. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f_k$.

b) Per $k = 0$, calcolare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_0$ e di $\mathrm{Im} f_0$.

c) Per $k = 1$, calcolare una base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_1$ e di $\mathrm{Im} f_1$.

6.18 Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla seguente matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 & k-1 \\ 2k & k & k^2 & k^2-1 \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, dire se f_k è iniettiva, suriettiva, biettiva. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f_k$ e di $\ker f_k$.

b) Qual è la base e la dimensione di $\mathrm{Ker} f_0$ e di $\mathrm{Im} f_0$? E di $\mathrm{Ker} f_1$ e di $\mathrm{Im} f_1$?