Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2020-2021

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n. 8

8.1. Sia $b = (v_1, v_2)$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori $v_1 = (-7, 5)$ e $v_2 = (2, 3)$. Calcolare $[I]_b^e$ ed $[I]_e^b$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

8.2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se $b = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. In caso affermativo calcolare le matrici di cambiamento di base $[I]_b^e$ (dalla base b alla base e) ed $[I]_e^b$ (dalla base e alla base b), dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

b) Calcolare le coordinate del vettore $[v]_e = (1, 2, 1, 1)$ rispetto alla base b.

8.3. Per ciascuna delle seguenti matrici trovare gli autovalori, gli autovettori, gli autospazi e le molteplicità algebriche e geometriche di ciascun autovalore. Dire se le matrici sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ e in caso affermativo diagonalizzarle ed esibire le matrici che danno i cambi di coordinate da una base di autovettori a quella canonica di $\mathbb{R}^3$ (risp. $\mathbb{R}^4$) e viceversa. Scrivere il prodotto di matrici che permette di trovare la forma diagonale. Nel caso in cui alcune delle matrici non siano diagonalizzabili, dire se ammettono una forma canonica di Jordan. In caso affermativo trovare una base di autovettori generalizzati, trovare la forma canonica di Jordan della matrice ed esibire le matrici che danno i cambi di coordinate dalla base di autovettori generalizzati a quella canonica di $\mathbb{R}^3$ (risp. $\mathbb{R}^4$) e viceversa. Scrivere il prodotto di matrici che permette di trovare la forma canonica di Jordan.

8.3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

8.3.2 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8.3.3 $C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$;

8.3.4 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8.3.5 $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

8.3.6 $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

8.3.7 $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

8.3.8 $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

8.3.9 $I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\textbf{8.3.10}\ \ J = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.11}\ \ K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.12}\ \ L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.13}\ \ M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.14}\ \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.15}\ \ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.16}\ \ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.17}\ \ Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\textbf{8.3.18}\ \ R = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix};$$

8.3.19 $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

8.3.20 $T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$;

8.3.21 $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

8.3.22 $V = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8.4. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, per ciascuna delle seguenti matrici A_k trovare gli autovalori e dire se sono diagonalizzabili. Per $k = 2$, trovare gli autovalori, una base e la dimensione degli autospazi, la forma diagonale di A_2 e le matrici che danno i cambi di coordinate dalla base di autovettori a quella canonica di $\mathbb{R}^3$ e viceversa.

a) $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$;

b) $A_k = \begin{pmatrix} 3k & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

8.5. Trovare gli autovalori della seguente matrice su $\mathbb{C}$ e scrivere la sua forma diagonale (senza trovare gli autovettori). Dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$