Università della Calabria

Corso di Laurea in Ingegneria A.A. 2020-2021

Algebra Lineare e Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n. 9

9.1. A partire dalla base b data, trovare una base ortonormale con il metodo di Gram-Schmidt

a) in $\mathbb{R}^2$ sia $b = \{(2,0), (-1,1)\}$;

b) in $\mathbb{R}^3$ sia $b = \{(1,-1,2), (3,2,1), (1,0,-2)\}$;

c) in $\mathbb{R}^3$ sia $b = \{(1,0,-1), (1,1,1), (2,1,3)\}$;

d) in $\mathbb{R}^3$ sia $b = \{(1,1,1), (0,1,-1), (2,1,2), (-1,2,2)\}$.

9.2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Trovare gli autovalori e gli autovettori di A;

ii) dimostrare che una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A è una base ortogonale;

iii) trovare una base ortonormale che diagonalizza A.

iv) Qual è la forma diagonale di A?

9.3 In $\mathbb{R}^5$ dire quali dei seguenti vettori sono ortogonali a due a due e trovare la norma di ciascuno di essi

$v_1 = (1,-1,2,3,4)$; $v_2 = (0,0,1,0,0)$; $v_3 = (1,1,3,-2,0)$; $v_4 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$; $v_5 = (3,0,0,0,0)$.

9.4. Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori $(h-2, 2h)$ e $(3-h, 1)$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$? E per quali valori formano una base ortonormale?

9.5. Per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori $(2-h, h-1)$ e $(h-1, -h)$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$? E per quali valori formano una base ortonormale?

9.6. Per ciascuno dei seguenti sottospazi W di V, trovare il sottospazio ortogonale $W^\perp$.

9.6.1 $V = \mathbb{R}^5$, $W = \langle (1,-1,2,3,4), (0,-1,0,3,4) \rangle$;
9.6.2 $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle (-1,2,3,4), (2,0,3,4) \rangle$;
9.6.3 $V = \mathbb{R}^5$, $W = \langle (2,-1,2,3,2), (0,-1,0,3,1), (0,0,0,1,0) \rangle$;
9.6.4 $V = \mathbb{R}^4$, $W = \langle (1,-1,2,0,-2) \rangle$;
9.6.5 $V = \mathbb{R}^3$, $W = \langle (-1,2,6), (3,0,3) \rangle$;
9.6.6 $V = \mathbb{R}^3$, $W = \langle (1,0,-5) \rangle$;
9.6.7 $V = \mathbb{R}^2$, $W = \langle (-1,1) \rangle$;
9.6.8 $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{0\}$;
9.6.9 $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$;
9.6.10 $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y = 2-z\}$.

9.7. In $\mathbb{R}^3$, trovare il piano che passa per $P = (-1,2,3)$ ed ortogonale alla retta

$$l : \begin{cases} x = \sqrt{2}\lambda \\ y = 0, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$$

9.8. In $\mathbb{R}^3$, trovare l'equazione parametrica del piano che passa per $P = (1,0,0)$ e contiene la retta (N.B. Se un piano contiene una retta, allora contiene anche tutti i suoi punti). Ricavare l'equazione cartesiana del piano.

$$r : \begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -\lambda \end{cases}$$

9.9. Trovare il fascio di piani paralleli al piano di equazione 2x-3y+z=0. Tra essi trovare il piano che passa per il punto P=(-1,0,1).

9.10. Trovare il fascio di piani che passano per $P = (0, 1, 2)$. Tra essi trovare il piano parallelo alle rette

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases} \qquad \text{e} \qquad l : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

9.11. Trovare il fascio di rette passanti per $P = (2, -2, 1)$. Tra esse trovare la retta ortogonale al piano di equazione

$$\pi : \begin{cases} x = 2\lambda - 2\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 6 - \mu \end{cases}$$

9.12. Trovare il fascio di rette parallele alla retta

$$s : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6 - \lambda \end{cases}$$

Tra esse trovare la retta che passa per l'origine degli assi.

9.13. In $\mathbb{R}^3$ trovare il piano che contiene $P = (3, 1, 0)$ e tutte le rette ortogonali a

$$s : \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 8 + 7\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 9 - 3\lambda \end{cases}$$

9.14. In $\mathbb{R}^3$ trovare la distanza tra i punti P_1 e P_2.

a) $P_1 = (-3, 2, 5)$ e $P_2 = (5, -6, 1)$;

b) $P_1 = (-1, 2, 2)$ e $P_2 = (3, -6, 1)$;

c) $P_1 = (0, 1, 3)$ e $P_2 = (2\sqrt{2}, -1, 1)$.

9.15. In $\mathbb{R}^3$ dire se il punto $P = (3, 2, 4)$ appartiene alla retta r e trovare la distanza tra P e r.

a) $r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 - 2\lambda, \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \;;$

a) $r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4\lambda, \\ z = 9 - 10\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \;.$

9.16. In $\mathbb{R}^3$ dire qual è la posizione reciproca delle rette l_1 e l_2 e trovare la loro distanza.

a) $l_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda, \\ z = -10\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \;;$

b) $l_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda, \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - 4\lambda, \\ z = 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;;$

c) $l_1 : \begin{cases} x = \frac{9}{5} - \lambda \\ y = \frac{4}{5} - 2\lambda, \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - 4\lambda, \\ z = 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;;$

d) $l_1 : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2 - \lambda, \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;; \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda, \\ z = 5 - 15\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \;;$

9.17. Trovare la distanza tra il piano $\pi : 3x + 3y - 3z = 3$ e il punto $P = (1, 1, -1)$.

9.18. Trovare la distanza tra i piani π_1 e π_2 (N.B. La distanza tra π_1 e π_2 è la stessa della distanza tra π_1 e un punto di π_2).

a) $\pi_1 : 3x - 2y = 5$; $\pi_2 : 3x - 2y + 5z = 0$.

b) $\pi_1 : x - \sqrt{17}y - \sqrt{2}z = 7$; $\pi_2 : \frac{\sqrt{34}}{34}x - \sqrt{2}y - \sqrt{17}z + 7 = 0$.

c) $\pi_1 : x - y + 13z = 2$; $\pi_2 : 3x - 3\sqrt{2}y - 39z - 6 = 0$.

9.19. Dire se la retta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ e il piano π si intersecano. Trovare la loro distanza.

a) $\pi : x + 2y + 3z = 1$;

b) $\pi : 17x + 4y - z + 1 = 0$;

c) $\pi : 13x + 4y - z + 2 = 0$.

9.20. Trovare l'equazione cartesiana della retta

$$r : \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

9.21. a) Scrivere la retta r che passa per $P_1 = (1, 0, 2)$ e $P_2 = (-1, 3, 4)$. Trovare il fascio $\mathfrak{F}$ di rette parallele a r.

b) Trovare il piano π ortogonale a r e passante per $P_3 = (-1, 1, -2)$. Il piano trovato passa per $(1, 1, 4)$? Scrivere il fascio $\mathcal{F}$ di piani paralleli al piano $\pi_1 : 2x + 3y - z = 2$. Determinare il piano $\pi_2 \in \mathcal{F}$ che passa per $(-1, 1, 1)$. Il piano π_2 passa per $(0, 0, 0)$?

c) Trovare la distanza tra r e il punto $P_4 = (1, 3, -1)$.

9.22. a) Trovare il piano π passante per $P = (0, -1, 1)$ e ortogonale alla retta di equazione

$$r : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -2 + 2\lambda, \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di piani paralleli a π.

b) Trovare il fascio di rette ortogonali a π. Tra di esse trovare la retta l che passa per $P_1 = (1, 1, 1)$. La retta l passa per $P_2 = (2, 2, 2)$?

c) Trovare la distanza tra π e la retta r parallela a π, di equazione

$$r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

.

9.23. a) Trovare il fascio di rette passanti per il punto $P = (0, 0, 1)$. Tra le rette del fascio trovare quella perpendicolare al piano π_1 : $x + y + z = 1$.

b) Scrivere il fascio di piani paralleli a π_1. Tra i piani del fascio trovare il piano π_2 che passa per $Q = (1, 1, 2)$. Trovare la distanza tra π_1 e π_2.

c) Dire qual è la posizione reciproca della retta r e la retta

$$l = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

e trovare la loro distanza.

9.24. a) Trovare il piano π passante per $P_1 = (-1, 1, 1)$, $P_2 = (0, 0, 1)$ e $P_3 = (2, 1, -2)$. Il piano passa per $(-1, 1, 3)$?

b) Trovare il fascio di rette passanti per $P = (1, 1, 1)$. In particolare scrivere la retta r passante per $P = (1, 1, 1)$ e ortogonale a π.

c) Trovare la distanza tra r e il punto $Q = (1, 0, 0)$.

9.25. a) Trovare il piano π passante per $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (2, 2, 2)$ e $P_3 = (3, 1, 3)$. Il piano π passa per l'origine degli assi? Dire se il piano π è ortogonale alla retta di equazione

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) Trovare il fascio di piani paralleli a π. Trovare il fascio di rette parallele a r.

c) Trovare la distanza tra la retta r e il punto P_2.

9.26. **a)** Scrivere il piano π che passa per i punti $P_1 = (1, 2, -4)$, $P_2 = (0, 0, -3)$, $P_3 = (-1, 1, 1)$. Scrivere il fascio $\mathcal{F}$ di piani paralleli a π.

b) Scrivere la retta r ortogonale a π e passante per $P_4 = (1, 3, -1)$.

c) Dire quali sono la posizione reciproca e la distanza di r rispetto alla retta

$$l = \begin{cases} x = 2 - 6\lambda \\ y = 2 - 2\lambda, \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) Trovare la distanza tra r e l.

9.27. **a)** Trovare la retta r che passa per $P_1 = (0, 2, -2)$ e $P_2 = (-1, 1, -2)$. La retta r passa per $(0, 0, 0)$?.

b) Trovare il fascio di piani $\mathfrak{F}$ ortogonali a r. Trovare il piano $\pi \in \mathfrak{F}$ passante per $(0, 0, 0)$.

c) Trovare il punto di intersezione tra r e π e calcolare la distanza tra P_1 e π.

d) Trovare la retta s passante per $(-1, -2, 0)$ e parallela alla retta

$$l = \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda, \\ z = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e) Dire qual è la posizione reciproca tra r e s e trovare la loro distanza.

9.28. **a)** Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di rette parallele alla retta

$$l = \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda, \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Trovare la retta r del fascio $\mathcal{F}$, che passa per l'origine degli assi.

c) Trovare la distanza tra r e l

9.29. **a)** Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di piani ortogonali alla retta

$$l = \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$$

b) Dire qual è la posizione reciproca e qual è la distanza tra r e la retta l di equazione

$$l = \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 6\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

9.30. **a)** Trovare il fascio $\mathcal{F}$ di rette passanti per il punto (1,0,0)

b) Tra le rette del fascio $\mathcal{F}$ trovare la retta r che ha come vettore direzione $(-2, 3, 0)$.

c) Dire qual è la posizione reciproca e qual è la distanza tra r e la retta l di equazione

$$l = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

9.31. Classificare la seguente conica $\mathcal{C}$. Se la conica non è degenere trovare centro e assi (per le coniche a centro) oppure asse e vertice (per le parabole). Se la conica non è degenere trovare, trovare la matrice di rotazione, le formule di traslazione, di rotazione e di rototraslazione, utili per riportare la conica in forma canonica; infine trovare la forma canonica.

a) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy - x - y - 1 = 0;$

b) $\mathcal{C} : 7y^2 - x^2 - 98y - 2x + 28 = 0;$

c) $\mathcal{C} : 17x^2 + 17y^2 - 30xy - 4x - 64y = 0;$

d) $\mathcal{C} : 2x^2 - 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0;$

e) $\mathcal{C} : x^2 - 10y^2 - 2x + 2y = 1;$

f) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 14xy + 30x - 18y + 32 = 0$;

g) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 4 = 0$;

h) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y = 0$;

i) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 2y + 9 = 0$;

j) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4xy + 2x - 2y + 17 = 0$;

k) $\mathcal{C} : x^2 - y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 = 0$;

l) $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$;

m) $\mathcal{C} : 2x^2 + 5y^2 - 4x + 2y = 1$;

n) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 = 0$;

0) $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y + \dfrac{3}{2} = 0$.

9.32. Classificare le seguenti coniche al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{C} : h^2x^2 - 2y^2 + 2hxy - 2y + 12 = 0.$$

9.33. Classificare le seguenti coniche al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 + 2hxy - 2y + -5 = 0.$$

9.34. Classificare le seguenti coniche al variare di $h \in \mathbb{R}$. Per le coniche a centro, trovare le coordinate del centro e le equazioni parametriche degli assi.

$$\mathcal{C} : 5hx^2 + 3hy^2 + 2\sqrt{3}hxy + 2\sqrt{3}x + 2 = 0.$$

9.35. Classificare le seguenti coniche al variare di $h \in \mathbb{R}$. Per $h = 1$ trovare le coordinate del centro e le equazioni parametriche degli assi. Trovare la matrice di rotazione, la formule di traslazione, di rotazione e di rototraslazione. Trovare la forma canonica.

$$\mathcal{C} : 2hx^2 + 2hy^2 - 2hxy - 4x + 2y + 1 = 0.$$

9.36. **a)** Al variare di $h \in \mathbb{R}$ classificare la seguente conica

$$\mathcal{C}_h : hx^2 + h^2y^2 - 4hxy - 4x - 2y = 0.$$

b) Per $h = 4$ trovare centro e assi (se è una conica a centro) oppure asse e vertice (se è una parabola). Trovare la matrice di rotazione, la formule di traslazione, di rotazione e di rototraslazione. Trovare la forma canonica.

9.37. **a)** Al variare di $h \in \mathbb{R}$ classificare la seguente conica

$$\mathcal{C}_h : 9x^2 + 2y^2 + 2hxy - 4x + 6y = 0.$$

b) Per $h = 12$ trovare centro, assi e matrice di rotazione (se è una conica a centro) oppure asse, vertice e formula di traslazione (se è una parabola). Trovare la matrice di rotazione, la formule di traslazione, di rotazione e di rototraslazione. Trovare la forma canonica.