Università della Calabria

Corso di Laurea in Chimica - A.A. 2015-2016

Matematica - Parte B

L. Paladino

Foglio di esercizi n.5

5.1 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Descrivere il nucleo e l'immagine di f, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

5.2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Si calcolino le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e da essi si estragga una base di $\mathrm{Im} f$. Qual è la dimensione di $\mathrm{Im} f$? Dire se f è iniettiva e se è suriettiva.

2) L'applicazione f è invertibile? Se si, calcolare f^{-1}.

5.3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli una base di $\ker f$. Si dica se f è iniettiva e se è suriettiva. La funzione f è invertibile?

5.4 Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definta da

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) := (x_1 - x_2 + 2x_3, x_3 - 4x_4, x_1 + x_4).$$

a) Descrivere il nucleo e l'immagine di f, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

b) Trovare l'immagine tramite f del vettore (-1,1,2,0).

c) Trovare la controimmagine, se esiste, del vettore (1,1,2).

5.5. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia $T_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T_h = \begin{pmatrix} h-1 & h & h-1 \\ 3 & 1 & h \\ h-2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di h in $\mathbb{R}$, si descrivano il nucleo e l'immagine di T_h, in particolare dicendo qual la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Calcolare, se esiste, T_2^{-1}.

5.6. Sia $h \in \mathbb{R}$ e sia $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k-1 \\ k & 1 & -1 & -1 \\ 2k & 2 & -1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di k in $\mathbb{R}$, descrivere il nucleo e l'immagine di T_k, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Al variare di k in $\mathbb{R}$, discutere il numero di soluzioni del sistema lineare $T_k X = B$, dove $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ e $B = (1, 0, 0, -1)$.

5.7. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia $T_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & k & k \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di k in $\mathbb{R}$, si descrivano il nucleo e l'immagine di T_h, in particolare dicendo qual la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Calcolare, se esiste, T_2^{-1}.

5.8 Dire quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari

1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$

2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x + y - z) \end{array}$

3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, 2x) \end{array}$

4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto 2x \end{array}$

5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5 \\ x \mapsto (x, -x, 2x, -2x, 0) \end{array}$

6) $f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, 3y, -x, 2 + x) \end{array}$