Università della Calabria

Corso di Laurea in Chimica - A.A. 2015-2016

Matematica - Parte B

L. Paladino

Foglio di esercizi n.6

6.1 Sia $b = (v_1, v_2)$ la base di $\mathbb{R}^2$ costituita dai vettori $v_1 = (-7, 5)$ e $v_2 = (2, 3)$.

a) Calcolare $[I]_b^e$ ed $[I]_e^b$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

b) Se al posto di b prendiamo la base $b' = (v_2, v_1)$, come cambia la matrice da $[I]_b^e$ a $[I]_{b'}^e$?

6.2 Si consideri l'applicazione lineare $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le basi $b = \{(1,1,0),(1,-1,1),(1,0,1)\}$ di R^3 e $b' = \{(1,1,0,1),(2,-2,1,0),(1,2,1,2),(0,1,1,1)\}$ di R^4. Calcolare $[f]_b^{b'}$ e $[f]_e^{b'}$, dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

6.3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Dire se $b = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$. In caso affermativo calcolare le matrici di cambiamento di base $[I]_b^e$ (dalla base b alla base e) ed $[I]_e^b$ (dalla base e alla base b), dove e è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

b) Calcolare le coordinate del vettore $[v]_e = (1, 2, 1, 1)$ rispetto alla base b.

6.4. Per ciascuna delle seguenti matrici trovare gli autovalori, gli autovettori, gli autospazi e le molteplicità algebriche e geometriche di ciascun autovalore. Dire se le matrici sono diagonalizzabili e in caso affermativo diagonalizzarle ed esibire le matrici che danno i cambi di coordinate dalla base di autovettori a quella canonica di $\mathbb{R}^3$ e viceversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 7 \\ 2 & -2 & 2 \\ -7 & 7 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5. Per ciascuna delle seguenti matrici trovare gli autovalori, gli autovettori, gli autospazi e le molteplicità algebriche e geometriche di ciascun autovalore. Dire se le matrici sono diagonalizzabili e in caso affermativo diagonalizzarle ed esibire le matrici che danno i cambi di coordinate dalla base di autovettori a quella canonica di $\mathbb{R}^3$ (risp. $\mathbb{R}^4$) e viceversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

6.6. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, per ciascuna delle seguenti matrici A_h trovare gli autovalori e dire se sono diagonalizzabili.

a) $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4k & 0 & 2(k-2) \end{pmatrix}$;

b) $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6.7. Calcolare gli autovalori reali e complessi della seguente matrice e dire se è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$