

A.A. 2012/2013

Corso di Laurea in Matematica
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

Esame scritto del 25-06-2013
Parte di geometria proiettiva

Primo esercizio di geometria proiettiva. (7 punti) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sia \mathcal{I} la quadrica di equazione

$$2x_0^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_3^2 - 3x_1^2 + 2x_1x_3.$$

- a) Scrivere \mathcal{I} in forma canonica.
b) Per ogni $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, sia j_i^{-1} l'isomorfismo canonico tra

$$U_i = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

e \mathbb{R}^3 . Trovare l'immagine $j_0^{-1}(\mathcal{I})$ e scriverla in forma canonica.

- c) Trovare l'insieme S dei punti impropri di \mathcal{I} rispetto alla coordinata x_1 .
Trovare l'immagine $j_0^{-1}(S)$ e disegnarla.

Spazio per la costruzione della risposta.

Secondo esercizio di geometria proiettiva. (8 punti)

a) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, siano

$$P_1 = [1, i], \quad P_2 = [i, 2], \quad P_3 = [2i, 1], \\ Q_1 = [i - 1, 2i], \quad Q_2 = [i + 2, 2i], \quad Q_3 = [2i + 1, 4i].$$

Dire se le terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ sono in posizione generale. Dire se esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$. In caso affermativo, trovare φ , dire se è unica e trovare i suoi punti fissi.

b) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, trovare un isomorfismo $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa tutti i punti della retta proiettiva di equazione $x_0 + x_1 = 0$. Dire se f è unico.

Tutte le risposte devono essere giustificate. Buon lavoro!

Spazio per la costruzione della risposta.