

A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica  
Algebra Lineare e Geometria

Esame scritto del 04-02-2014

**Primo esercizio.** Sia  $h \in \mathbb{R}$  e sia  $T_h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$\begin{pmatrix} h & h+2 & -1 & 3 \\ h-2 & 1 & h & 2 \\ h & 1 & h & h+2 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \end{pmatrix}.$$

Al variare di  $h$  in  $\mathbb{R}$ , descrivere il nucleo e l'immagine di  $T_h$ , in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

**Secondo esercizio.** Risolvere il seguente sistema lineare al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2kx - ky + kz + 2kt = 0 \\ 2kx + (1 - 2k)y + z + 2t = -k \\ x - y + z + 2t = -k \end{cases}$$

**Terzo esercizio.** Trovare autovalori, autovettori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire se  $A$  è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base  $b$  diagonalizzante per  $A$  e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra  $b$  e la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

**Quarto esercizio.**

a) Scrivere la retta  $r_1$  che passa per  $P_1 = (0, 4, -2)$  ed è parallela alla retta

$$l = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 17 + 4\lambda \end{cases}$$

b) Scrivere il fascio  $\mathcal{F}$  di piani paralleli al piano  $\pi_1 : 2x + 3y - z = 2$ .  
Determinare il piano  $\pi_2 \in \mathcal{F}$  che passa per  $(-1, 1, 1)$ . Il piano  $\pi_2$  passa per  $(0, 0, 0)$ ?

c) Scrivere la retta  $r_2$  ortogonale a  $\pi_1$  e passante per il punto  $P_2 = (1, 0, 1)$ .  
Dire qual è la posizione reciproca di  $r_1$  e  $r_2$  e trovare la loro distanza.