**A.A. 2013/2014**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile**
**Algebra Lineare e Geometria**

**Esame scritto del 07-02-2014**

**Primo esercizio.** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Descrivere il nucleo e l'immagine di $f$, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se $f$ è iniettiva, suriettiva, biettiva.

**Secondo esercizio.** Trovare autovalori, autovettori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se $A$ è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base $b$ diagonalizzante per $A$ e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra $b$ e la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

**Terzo esercizio.**

**a)** Scrivere la retta $r_1$ che passa per $P_1 = (1, 2, 3)$ ed è parallela alla retta

$$l = \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

**b)** Scrivere il fascio $\mathcal{F}$ di piani ortogonali alla retta $l$. Determinare il piano $\pi_1 \in \mathcal{F}$ che passa per $P_2 = (1, 1, 1)$. Il piano $\pi_2$ passa per $(0, 0, 0)$?

**c)** Scrivere la retta $r_2$ passante per $P_2$ e $P_3 = (1, 0, 1)$. Dire qual è la posizione reciproca di $r_1$ e $r_2$ e trovare la loro distanza.

**Quarto esercizio.** Risolvere il seguente sistema lineare al variare di $k$ in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx - y + z + k^2 t = 0 \\ 2x + (1-k)y + 2kz - 2t = -2k \\ x + y - z + kt = 1 \end{cases}$$