

A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Algebra Lineare e Geometria

Esame scritto - 08-07-2014

Primo esercizio. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k-1 & 0 \\ k-1 & 0 & 2k & 2k \\ k-1 & 1 & 1 & 0 \\ 2k-2 & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcolare il determinante della matrice T_k . Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice ha rango massimo?
- b) Per $k = 1$ calcolare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare associata a T_1 .

Secondo esercizio. Al variare di k in \mathbb{R} , discutere il numero di soluzioni del sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & 2 & k \\ k-1 & k & k & k \\ 2k-2 & k+2 & 2 & k \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Terzo esercizio. Trovare autovalori, autovettori e autospazi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare autovalori, autovettori e autospazi di A . Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base b diagonalizzante per A e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra b e la base canonica di \mathbb{R}^3 .

Quarto esercizio.

- a) Trovare il piano π passante per $P_1 = (-1, 1, 1)$, $P_2 = (0, 0, 1)$ e $P_3 = (2, 1, -2)$. Il piano passa per $(-1, 1, 3)$?
- b) Trovare il fascio di rette passanti per $P = (1, 1, 1)$. In particolare scrivere la retta r passante per $P = (1, 1, 1)$ e ortogonale a π .
- c) Trovare la distanza tra r e il punto $Q = (1, 0, 0)$.