

A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica
Algebra Lineare e Geometria

Esame scritto del 18-02-2014

Primo esercizio. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, sia $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} k-2 & 2k-4 & k^2-4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ k & 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, descrivere il nucleo e l'immagine di T_k , in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base. Dire se T_k è iniettiva, suriettiva, biiettiva, per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- b) Al variare di k in \mathbb{R} , discutere il numero di soluzioni del sistema $T_k X = B$, dove $X = (x, y, z, t)$ e $B = (2, 1, 1, k)$.

Secondo esercizio. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Trovare autovalori, autovettori e autospazi di A . Dire se A è diagonalizzabile e in caso affermativo diagonalizzarla. In particolare scrivere, se esiste, una base b diagonalizzante per A e scrivere le matrici che danno i cambiamenti di coordinate tra b e la base canonica di \mathbb{R}^3 .

- b) Dire se esiste una base ortonormale diagonalizzante per A . In caso affermativo trovarla.

Terzo esercizio.

- a) Scrivere il piano π che passa per i punti $P_1 = (1, 2, -4)$, $P_2 = (0, 0, -3)$, $P_3 = (-1, 1, 1)$. Scrivere il fascio \mathcal{F} di piani paralleli a π .
- b) Scrivere la retta r ortogonale a π e passante per $P_4 = (1, 3, -1)$.
- c) Dire quali sono la posizione reciproca e la distanza di r rispetto alla retta

$$l = \begin{cases} x = 2 - 6\lambda \\ y = 2 - 2\lambda, \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$