

A.A. 2019/2020

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale
Algebra Lineare e Geometria

Prova scritta del 27-01-2019

Primo esercizio. (5 punti) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, rappresentata dalla seguente matrice A_k , è un isomorfismo. Per $k = 0$ trovare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f_0 .

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & -k & \\ 0 & 1 & -1 & \\ k & -2k & 2k & \end{pmatrix}.$$

Secondo esercizio. (8 punti) Trovare, se esiste, la forma canonica di Jordan J della seguente matrice A . In particolare trovare una base b di \mathbb{R}^4 che dà il cambiamento di base $[I]_e^b$ che permette di trovare la forma canonica di Jordan, dove e la base canonica di \mathbb{R}^4 . Dire a cosa è uguale $[I]_b^e$, senza calcolarla esplicitamente. Scrivere la formula che permette di ottenere J da A , tramite $[I]_e^b$ (sempre senza calcolare esplicitamente $[I]_b^e$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Terzo esercizio. (7 punti)

Al variare di k in \mathbb{R} , discutere il numero di soluzioni e risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k+1 & 2k-3 \\ 2k & 2k-2 & 2 & -2k-6 \\ 0 & k+1 & 2k & 6k \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2k \\ 2k \end{pmatrix}.$$

Quarto esercizio. (5 punti)

- a) Trovare il fascio \mathcal{F} di rette passanti per il punto $(1,0,0)$
- b) Tra le rette del fascio \mathcal{F} trovare la retta r che ha come vettore direzione $(-2, 3, 0)$.
- c) Dire qual è la posizione reciproca e qual è la distanza tra r e la retta l di equazione

$$l = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda, \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Quinto esercizio. (5 punti)

- a) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ classificare la seguente conica

$$\mathcal{C}_h : 2x^2 + 9y^2 + 2hxy - 4x + 6y = 0.$$

- b) Per $h = 12$ trovare centro, assi e matrice di rotazione (se è una conica a centro) oppure asse, vertice e formula di traslazione (se è una parabola).