

A.A. 2012/2013

Corso di Laurea in Matematica
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

Esame scritto del 17-07-2013
Parte di geometria proiettiva

Primo esercizio di geometria proiettiva. (8 punti)

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sia \mathcal{I} la quadrica di equazione

$$4x_1^2 + x_3^2 - x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2 + x_1x_2 = 0$$

- a) Scrivere \mathcal{I} in forma canonica.
b) Per ogni $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, sia j_i^{-1} l'isomorfismo canonico tra

$$U_i = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

e \mathbb{R}^3 . Trovare l'immagine $j_1^{-1}(\mathcal{I})$ e scriverla in forma canonica.

- c) Trovare l'insieme S dei punti impropri di \mathcal{I} rispetto alla coordinata x_2 . Trovare l'immagine $j_0^{-1}(S)$ e disegnarla in \mathbb{R}^3 .
d) Sia $\tilde{\mathcal{I}}$ l'ipersuperficie di equazione $x_2^2x_3^4 + x_0x_1^2x_3^3 + x_0^2x_1^4 = 0$. E' possibile dire quante sono le intersezioni di \mathcal{I} con $\tilde{\mathcal{I}}$ senza calcolarle esplicitamente? Se si, quante sono?

Tutte le risposte devono essere giustificate.

Spazio per la costruzione della risposta.

Secondo esercizio di geometria proiettiva. (7 punti)

a) (6 punti) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, siano

$$P_1 = [2, 3], \quad P_2 = [1, 4], \quad P_3 = [-1, 6], \\ Q_1 = [-16, -14], \quad Q_2 = [27, 18], \quad Q_3 = [11, 4].$$

Dire se le terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ sono in posizione generale. Dire se esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$. In caso affermativo, trovare φ , dire se è unica e trovare i suoi punti fissi.

b) (1 punto) Sia r la retta proiettiva di equazione $x_1 + x_2 = 0$. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, trovare un isomorfismo $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(r) = r$.

Tutte le risposte devono essere giustificate. Buon lavoro!

Spazio per la costruzione della risposta.