A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Matematica
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

A. Canetti-L. Paladino

Appello del 04-09-2014
Parte di geometria proiettiva

Primo esercizio di geometria proiettiva. (8 punti)

a) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sia $\widetilde{\mathcal{I}}$ l'ipersuperficie di equazione

$$x_0x_1 + x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_4 + x_4^2 - x_0x_2 - x_0x_3 = 0.$$

a.1) Calcolare i punti singolari di $\widetilde{\mathcal{I}}$ in $\mathbb{P}^4$. (1 punto)

a.1) Calcolare i punti impropri $\mathcal{I}$ di $\widetilde{\mathcal{I}}$ rispetto all'iperpiano

$$H_4 = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R}) | x_4 = 0\}.$$

(1 punto)

a.2) Identificare H_4 con uno spazio proiettivo su $\mathbb{R}$ e trovare la forma canonica di $\mathcal{I}$ in H_4. (2 punti)

a.3) Sia U_2 il sottospazio proiettivo di H_4 formato dai punti aventi la coordinata x_2 non nulla e sia j_2^{-1} l'isomorfismo canonico tra U_2 e $\mathbb{R}^3$. Trovare l'immagine $j_2^{-1}(\mathcal{I})$ e scriverla in forma canonica. (2 punti)

b) Disegnare in $\mathbb{R}^3$ la quadrica di equazione $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 0$.

(2 punti)

Spazio per la costruzione della risposta.

Secondo esercizio di geometria proiettiva. (7 punti)

Sia $R_S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ il riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

a) Considerare l'isomorfismo $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con applicazione lineare associata rappresentata dalla matrice

$$[\varphi_l]_{R_S}^{R_S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a.1) Trovare l'immagine tramite φ del punto proiettivo P in cui si intersecano le rette di equazione $x_0 + 2x_1 = 0$ e $x_2 = x_1$.

(1 punto)

a.2) Trovare i punti fissi di φ e scrivere, se esiste, un riferimento di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in cui tutti i generatori siano punti fissi di φ. (2 punti)

b) Sia $R = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ il riferimento proiettivo formato dai punti $P_1 = [2, 2, 2]$, $P_2 = [0, 2, -2]$, $P_3 = [2, 0, 2]$ e $P_4 = [2, 2, 1]$. Trovare una proiettività ϕ tale che $\phi(P_i) = E_i$, per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. La proiettività trovata è unica? (4 punti)

Tutte le risposte ai due esercizi devono essere giustificate. Buon lavoro!

Spazio per la costruzione della risposta.