Università della Calabria

Corso di Laurea in Fisica A.A. 2015-2016

Esercitazioni di Geometria

L. Paladino

Foglio di esercizi n.4

4.1. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4, -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$;

b) trovare le equazioni cartesiane, una base e la dimensione di $\mathrm{Ker}T$;

c) trovare le equazioni parametriche, una base e la dimensione di $\mathrm{Im}T$;

d) dire se T e iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da $W_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;

f) trovare un sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}T \oplus U = \mathbb{R}^3$;

g) trovare una base e la dimensione di $KerT \cap W_2$, dove W_2 è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da $W_2 : x_1 = 0$.

4.2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 5x_1 + 3x_2 - 4x_3, -2x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3, -2x_1 + x_2)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$;

b) trovare le equazioni cartesiane, una base e la dimensione di $\mathrm{Ker}T$;

c) trovare le equazioni parametriche, una base e la dimensione di $\mathrm{Im}T$;

d) dire se T e iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito da W_1 : $3x_2 + x_3 = 0$;

f) trovare un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}T \oplus U = \mathbb{R}^4$.

4.3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3 + 2x_4, 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4, -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4)$

a) scrivere una matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$;

b) trovare le equazioni cartesiane, una base e la dimensione di $\mathrm{Ker}T$;

c) trovare le equazioni parametriche, una base e la dimensione di $\mathrm{Im}T$;

d) dire se T e iniettiva, suriettiva, biettiva;

e) trovare l'immagine tramite T del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da W_1 : $x_1 - x_2 - x_3 = 0$;

f) trovare un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}T \oplus U = \mathbb{R}^4$.

4.4 Dire quali tra le seguenti applicazioni tra spazi vettoriali sono lineari

1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$

2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, x + y - z) \end{array}$

3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, 2x) \end{array}$

4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto 2x \end{array}$

5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5 \\ x \mapsto (x, -x, 2x, -2x, 0) \end{array}$

6) $f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, 3y, -x, 2 + x) \end{array}$

4.5. Descrivere il nucleo e l'immagine dell'applicazione f_5 definita in 4.5, in particolare trovandone una base e la dimensione.

4.6. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 2k & k & -k & k-1 \\ k & 1 & -1 & -1 \\ 2k & 2 & -1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di k in $\mathbb{R}$, descrivere il nucleo e l'immagine di T_k, in particolare dicendo qual è la loro dimensione come sottospazi vettoriali e trovando una loro base.

b) Dire se T_k è iniettiva, suriettiva, biettiva al variare di $k \in \mathbb{R}$.

4.7. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbf{K})$, $A = \{a_{i,j}\}_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$. Si definisce *traccia di A* l'elemento di $\mathbb{K}$ ottenuto come somma degli elementi della diagonale principale di A, i. e. $Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. L'applicazione definita da

$$\begin{aligned} T_r : & M_{n,n}(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & A \mapsto Tr(A) \end{aligned}$$

si chiama *Traccia*. Dire se la *Traccia* è un'applicazione lineare.