A.A. 2013/2014

Corso di Laurea in Matematica
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

L. Paladino

Esonero del 13-06-2014

Primo esercizio. (8 punti)

In $\mathbb{R}^3$ si consideri la quadrica di equazione

$$\mathcal{I}: \; -2x^2 - 3y^2 + 4xy + 2yz - \frac{1}{2}z^2 + 3z - 3 = 5.$$

a) Scrivere $\mathcal{I}$ in forma canonica. (5 punti)

b) Per ogni $i \in \{0,1,2,3\}$, sia j_i l'isomorfismo canonico tra $\mathbb{R}^3$ e $U_i = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) | x_i \neq 0\}$. Trovare l'immagine $j_0(\mathcal{I})$, dire di quale quadrica proiettiva si tratta e calcolare i suoi punti impropri rispetto all'immersione fatta con j_0. (3 punti)

Secondo esercizio. (10 punti)

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ si considerino le quadriche di equazione

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1 :&\ \ x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 = x_0^2;\\ \mathcal{Q}_2 :&\ \ x_2x_3 = x_0^2.\end{aligned}$$

a) Le due quadriche hanno punti singolari? Se si, trovarli. (2 punti)

b) Sia $i \in \{1, 2\}$ e sia $P = [2 : -1 : 0 : -1]$. Il punto P appartiene a $\mathcal{Q}_i$? Se si, calcolare l'iperpiano $T_P(\mathcal{Q}_i)$ tangente a $\mathcal{Q}_i$ in P. (2 punti)

c) Trovare l'immagine $j_0^{-1}(Q_i)$ per ogni $i \in \{1, 2\}$ e disegnarla in $\mathbb{R}^3$.

(6 punti)

Terzo esercizio. (2 punti)

Dire se i punti $P_1 = [1 : 2], P_2 = [i : 0], P_3 = [1 : -2]$ formano un riferimento proiettivo di $P^1(\mathbb{C})$. In caso affermativo trovare una base normalizzata di tale riferimento.

Quarto esercizio. (10 punti)

a) Trovare tutte le proiettività f di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che hanno due punti fissi tali che $f^4 = \mathrm{Id}$ e $f \neq \mathrm{Id}$. (5 punti)

b) Per ogni f trovata in **a)** calcolare $\beta(A, B, P, f(P))$ per ogni $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, dove A e B sono i punti fissi di f. (2 punti)

c) Se al posto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ abbiamo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, quante proiettività ci sono che soddisfano le condizioni in **a)**? (3 punti)

Le risposte a tutti gli esercizi devono essere giustificate. Buon lavoro!

Spazio per la costruzione della risposta.