

Università della Calabria
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2013-2014

Programma del corso di
Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

L. Paladino

Spazi affini. Spazi e sottospazi affini. Operazioni con i sottospazi affini e formula di Grassmann. Descrizione di uno spazio affine tramite un sistema lineare.

Spazi proiettivi. Note storiche e costruzione di Desargues. Definizione di uno spazio proiettivo come quoziente di uno spazio vettoriale. Definizione di uno spazio proiettivo come quoziente di una sfera in uno spazio euclideo o hilbertiano. Omeomorfismo tra i quozienti ottenuti utilizzando le due diverse definizioni. Dipendenza e indipendenza lineare. Punti in posizione generale, riferimenti proiettivi e basi normalizzate. Sottospazi proiettivi. Sistemi lineari associati ad un sottospazio proiettivo. Rette, piani e iperpiani nello spazio proiettivo. Operazioni con i sottospazi proiettivi. Formula di Grassmann e sua applicazione al caso delle rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

Proiettività. Definizione di proiettività. Isomorfismi tra spazi proiettivi. Definizione del gruppo proiettivo $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$. Descrizione del gruppo $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$ come quoziente di $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. Azioni di gruppi. Orbite e stabilizzatori. Azioni fedeli. Azioni di gruppi su spazi topologici. Azione di $\text{PGL}_n(\mathbb{K})$ su $\mathbb{P}^n(V)$ e azione di $\text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ su $\mathbb{P}^n(V)$. Sistemi di coordinate. Punti fissi. Teorema fondamentale delle proiettività. Teorema fondamentale dei riferimenti. Cambiamenti di riferimento. Matrici associate a cambiamenti di riferimento. Matrici associate a proiettività rispetto a un riferimento dato.

Immersione di uno spazio affine in uno spazio proiettivo. Descrizione delle immersioni canoniche e degli iperpiani ad esse associati. Omeomorfismo tra un tale iperpiano e $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$. Punti impropri.

Curve e superfici. Definizione di ipersuperficie (affine e proiettiva). Equazione e supporto. Varietà affini e proiettive. Omogeneizzazione di polinomi; come passare da una varietà affine a una proiettiva e viceversa. Punti singolari. Definizione dell'iperpiano tangente ad un'ipersuperficie in un punto. Definizione di curva algebrica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Risultante di due polinomi e sue proprietà. Teorema di Bézout in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Versione del teorema di Bézout in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Coniche e quadriche. Forme bilineari. Vettori isotropi e somma diretta di sottospazi vettoriali. Matrici congruenti. Matrici simmetriche e loro diagonalizzazione. Diagonalizzazione di matrici simmetriche su campi algebricamente chiusi. Teorema di Sylvester. Definizioni di conica (affine e proiettiva). Definizione di quadrica (affine e proiettiva). Classificazione delle coniche affini in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{C}^2 e delle coniche proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Classificazione delle quadriche affini in \mathbb{R}^3 e in \mathbb{C}^3 e delle quadriche proiettive in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Come disegnare una quadrica in \mathbb{R}^3 .

Spazi proiettivi duali. Spazi proiettivi duali e sottospazi proiettivi duali. Corrispondenza di dualità. Principio di dualità. Proposizioni autoduali.

Geometria proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Applicazione del principio di dualità alla dimostrazione del teorema di Desargues. Teorema di Pappo.

Testi consigliati.

- [1] SERNESI E., *Geometria I*, Bollati Boringhieri, 1989.
- [2] BELTRAMETTI M. C. ET AL., *Lezioni di geometria analitica a proiettiva*, Bollati Boringhieri, 2001.
- [3] FORTUNA E., FRIGERIO R., PARDINI R., *Geometria proiettiva. Problemi risolti e richiami di teoria*, Springer-Verlag, 2011.