

Geometria Proiettiva, Curve e Superfici

Esame scritto del 25-06-2013

Esercizio 1. (7 punti)

a) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, siano

$$\begin{aligned}P_1 &= [1, i], & P_2 &= [i, 2], & P_3 &= [2i, 1], \\Q_1 &= [i - 1, 2i], & Q_2 &= [i + 2, 2i], & Q_3 &= [2i + 1, 4i].\end{aligned}$$

Dire se le terne $\{P_1, P_2, P_3\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ sono in posizione generale. Dire se esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$, per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$. In caso affermativo, trovare φ e dire se è unica.

b) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, trovare un isomorfismo $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che fissa tutti i punti della retta proiettiva di equazione $x_0 + x_1 = 0$. Dire se f è unico.

Esercizio 2. (8 punti) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sia \mathcal{I} la quadrica di equazione

$$2x_0^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_3^2 - 3x_1^2 + 2x_1x_3.$$

- a) Scrivere \mathcal{I} in forma canonica.
- b) Sia j_i^{-1} è l'isomorfismo canonico tra

$$U_i = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

e \mathbb{R}^3 , per ogni $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Trovare $j_0^{-1}(\mathcal{I})$ e scriverla in forma canonica.

- c) Trovare i punti impropri di \mathcal{I} rispetto alla coordinata x_0 e i punti impropri di \mathcal{I} rispetto alla coordinata x_2 .
- d) Sia H_1 l'iperpiano di equazione $x_1 = 0$. Trovare l'immagine $j_0^{-1}(\mathcal{I} \cap H_1)$ e disegnarla.