LABORATORIO SU QUESTIONI DIDATTICHE NELLA MATEMATICA

Filomena Cianciaruso

3 Febbraio 2014

Riflessioni sull'Insegnamento di alcuni Concetti Fondamentali dell'Analisi Matematica

Nella ricerca di massimi e minimi l'Analisi Matematica è sicuramente lo strumento principale sia nello studio dell'esistenza di punti estremanti sia nei metodi di ricerca.
Però non sempre l'Analisi è lo strumento migliore per risolvere problemi di massimo e minimo.
Esporremo alcuni risultati algebrici (strettamente correlati ad uguaglianze o disuguaglianze algebriche) che ci consentono di risolvere problemi classici proposti nei testi scolastici.

1. Esistono casi significativi in cui la ricerca di massimi e minimi può essere effettuata senza ricorrere all'Analisi Matematica?

Problema

Sia a un numero positivo e

$$y = ax^2 + bx + c;$$

verificare che la funzione ha minimo per $x = -\dfrac{b}{2a}$ *e tale minimo vale* $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Soluzione:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right].$$

Problema

Se due numeri positivi x e y hanno somma costante k, allora il loro prodotto è massimo quando essi sono uguali.

Soluzione:

$$xy = x(k-x) = kx - x^2 = -\left[\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right].$$

Problema

Se due numeri positivi x e y hanno prodotto costante k, allora la loro somma è minima quando essi sono uguali.

Soluzione:

$$x + y = x + \frac{k}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{k}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{k}.$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

1. Se si assume la somma costante, il prodotto è massimo quando la differenza è nulla;
2. se si assume il prodotto costante, la somma è minima se la differenza, in valore assoluto, è minima, cioè $x = y$.

Problema

Si determini tra i rettangoli di perimetro assegnato quello di area massima.

Soluzione: Il quadrato.

Problema

Si determini tra i rettangoli di area data quello di perimetro minimo.

Soluzione: Il quadrato.

Problema

Si determini tra i triangoli di base b e perimetro assegnati, quello di area massima.

Soluzione: Triangolo Isoscele.
Infatti, se a e c gli altri lati e p è il semiperimetro,

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

che è massima quando lo è $(p-a)(p-c)$, ossia quando $a = c$.

Problema

Noti la somma di due lati a e b e l'angolo γ compreso, si determini tra i triangoli quello di area massima.

Soluzione: Il triangolo isoscele. Infatti l'area è data da:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

la somma dei lati è costante e ab è massimo quando $a = b$.

Problema

Tra i parallelogrammi di lati assegnati, determinare quello di area massima.

Soluzione: Il rettangolo. Infatti, l'area è data da:

$$A = ab\sin\gamma;$$

poichè a e b sono dati, l'area è massima quando $\sin\gamma = 1$.

Problema

Il prodotto di n numeri reali positivi $x_1 x_2 \ldots x_n$ di somma assegnata è massimo quando tutti i numeri sono uguali tra loro.

I Dim. Se esistono due numeri x_1 e x_2 diversi tra di loro, li sostituisco con la loro media aritmetica. Ció fa sí che la somma totale dei numeri rimane invariata, mentre il prodotto cresce. Infatti:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} > x_1 x_2.$$

Quindi *se esiste il massimo*, si avrà nel caso in cui i numeri sono tutti uguali tra di loro.
Questa dimostrazione è molto semplice ma non è elementare! Infatti provare che il massimo esiste è un problema di ottimizzazione per funzioni di più variabili.

II Dim.

Sia A la media aritmetica degli n numeri; la loro somma sarà allora nA. Supponiamo che i numeri non siano tutti uguali tra loro; esisteranno quindi il minimo ed il massimo tra essi, diciamo x_1 e x_2. Costruiamo allora una nuova successione sostituendo questi due numeri con A e $x_1 + x_2 - A$. La somma rimane invariata mentre il prodotto aumenta:

$$A(x_1 + x_2 - A) = (A - x_1)(x_2 - A) + x_1 x_2 > x_1 x_2.$$

Ora, lasciamo invariato il primo fattore e ripetiamo il procedimento per gli altri $n - 1$ fattori; questo sarà maggiore dei due precedenti. Iterando ancora il procedimento al più $n - 1$ volte, otteniamo il prodotto A^n che è maggiore di tutti i precedenti.

Disuguaglianza aritmetico-geometrica

$$x_1 \dots x_n \leq A^n$$

$$\sqrt{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}.$$

Problema

La somma di n numeri reali positivi $x_1 x_2 \dots x_n$ di prodotto assegnato è minimo quando tutti i numeri sono uguali tra loro.

Problema

Determinare il minimo della funzione $r^4 + s^4 + 2t^2$ su tutti i numeri positivi r, s, t che soddisfano la condizione $rst = 81$.

Se riscriviamo la funzione come $r^4 + s^4 + t^2 + t^2$, il prodotto è costante; infatti: $r^4 s^4 t^2 t^2 = r^4 s^4 t^4 = 81^4$. Allora

$$r^4 = s^4 = t^2, \; rst = 81,$$

cioè $r = s, t = r^2, r^4 = 81$ In conclusione $r = s = 3, t = 9$ ed il minimo vale 324.

Problema

Tra tutti i triangoli di perimetro assegnato si determini quello di area massima.

Soluzione: Il triangolo Equilatero.
Infatti massimizzare

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

vuol dire massimizzare il prodotto $(p-a)(p-b)(p-c)$. Poichè la somma dei tre fattori è costante:

$$p - a + p - b + p - c = 3p - 2p = p,$$

il prodotto è massimo quando $a = b = c$.

Problema

Tra tutti i quadrilateri di perimetro assegnato, si determini quello di area massima.

Soluzione: Il quadrato.

Possiamo limitare la nostra analisi ai quadrilateri convessi. Se, infatti, il quadrilatero non lo fosse, lo possiamo sostituire con uno quadrilatero convesso isoperimetrico a quello di partenza.

Dividiamo con una diagonale il quadrilatero in due triangoli avente come base la diagonale e perimetro fissato. Costruiamo, a partire dalla base di questi due triangoli, due triangoli isosceli isoperimetrici. L'area dei due triangoli isosceli è maggiore dell'area dei due triangoli di partenza; inoltre, essi sono congruenti tra loro. Consideriamo il nuovo quadrilatero unione dei nuovi triangoli; la sua area sarà maggiore di quello di partenza. Ripetiamo il procedimento costruendo due nuovi triangoli isosceli, isoperimetrici e congruenti fra di loro; il nuovo quadrilatero ottenuto è un rombo (in particolare, un parallelogramma). Da quanto visto per i parallelogrammi, tra tutti i rombi di perimetro assegnato, quello di area massima è il quadrato.

Vinicio Villani, Claudio Bernardi, Sergio Zoccante, Roberto Porcaro, *Non solo Calcoli-Domande e Risposte sui Perché della Matematica*, Springer-Verlag Italia 2012.

I. Niven, *Maxima and Minima without Calculus*, The Dolciani Mathematical Expositions of MAA 1981.