Il Teorema di Lagrange

B. Sciunzi

Department of Mathematics
Università della Calabria

February 10, 2014

Theorem

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* (a,b)*. Allora esiste almeno un punto* $c \in (a,b)$ *tale che:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proof.

Definiamo

$$h(x) \; := \; f(x) - Kx \qquad\qquad K \in \mathbb{R}\,.$$

Notiamo che h risulta continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Determiniamo K in modo che $h(a) = h(b)$. Con alcuni calcoli si ricava

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Rightarrow \qquad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x\,.$$

Dal Teorema di Rolle deduciamo l'esistenza di $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Per tale c risulta

$$f'(c) \; = \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Proof.

Definiamo

$$h(x) := f(x) - Kx \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che h risulta continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Determiniamo K in modo che $h(a) = h(b)$. Con alcuni calcoli si ricava

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \Rightarrow \qquad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x.$$

Dal Teorema di Rolle deduciamo l'esistenza di $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Per tale c risulta

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proof.

Definiamo

$$h(x) := f(x) - Kx \qquad K \in \mathbb{R}\,.$$

Notiamo che h risulta continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Determiniamo K in modo che $h(a) = h(b)$. Con alcuni calcoli si ricava

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \qquad \Rightarrow \qquad h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,x\,.$$

Dal Teorema di Rolle deduciamo l'esistenza di $c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$. Per tale c risulta

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,.$$

□

Domande agli studenti

1) Perché definiamo la funzione ausiliaria h ? Perché la scelta giusta è $h(x) := f(x) - Kx$?

2) Come possiamo sapere che esisterà un K tale che $h(a) = h(b)$?

3) Quale è il significato geometrico del punto c ?

OBIETTIVO: introduzione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e del significato geometrico del Teorema di Lagrange.

Domande agli studenti

1) Perché definiamo la funzione ausiliaria h ? Perché la scelta giusta è $h(x) := f(x) - Kx$?

2) Come possiamo sapere che esisterà un K tale che $h(a) = h(b)$?

3) Quale è il significato geometrico del punto c ?

OBIETTIVO: introduzione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e del significato geometrico del Teorema di Lagrange.

Domande agli studenti

1) Perché definiamo la funzione ausiliaria h ? Perché la scelta giusta è $h(x) := f(x) - Kx$?

2) Come possiamo sapere che esisterà un K tale che $h(a) = h(b)$?

3) Quale è il significato geometrico del punto c ?

OBIETTIVO: introduzione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e del significato geometrico del Teorema di Lagrange.

Domande agli studenti

1) Perché definiamo la funzione ausiliaria h ? Perché la scelta giusta è $h(x) := f(x) - Kx$?

2) Come possiamo sapere che esisterà un K tale che $h(a) = h(b)$?

3) Quale è il significato geometrico del punto c ?

OBIETTIVO: introduzione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e del significato geometrico del Teorema di Lagrange.

Equazione retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$r_s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Possibilmente da ricavare dal fascio di rette

$$r_q(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + q.$$

Equazione retta tangente alla funzione nel punto $(c, f(c))$:

$$t_c(x) = f'(c)(x - c) + f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - c) + f(c).$$

Portiamo gli studenti a fare osservazioni sui coefficienti angolari.

Equazione retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$r_s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

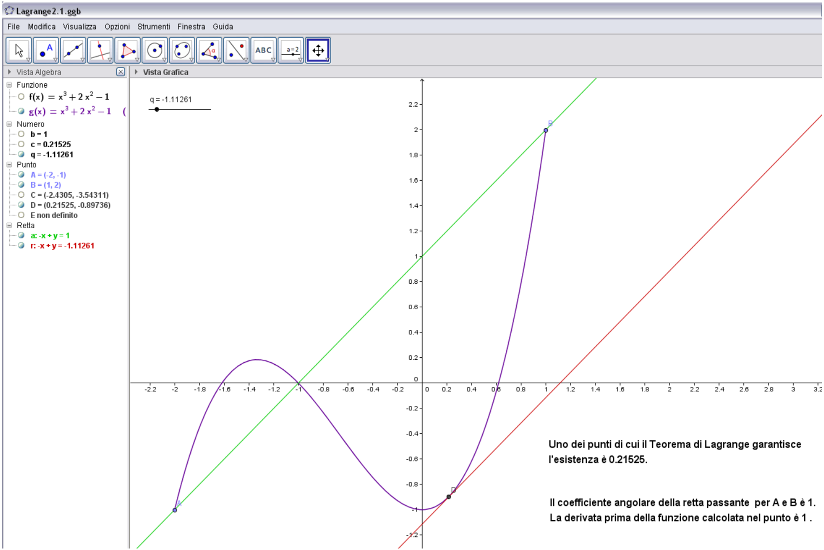
Possibilmente da ricavare dal fascio di rette

$$r_q(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + q.$$

Equazione retta tangente alla funzione nel punto $(c, f(c))$:

$$t_c(x) = f'(c)(x - c) + f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - c) + f(c).$$

Portiamo gli studenti a fare osservazioni sui coefficienti angolari.


Lagrange2.1.ggb
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Vista Algebra
Vista Grafica
Funzione
f(x) = x³ + 2 x² − 1
g(x) = x³ + 2 x² − 1
Numero
b = 1
c = 0.21525
q = -1.11261
Punto
A = (-2, -1)
B = (1, 2)
C = (-2.4305, -3.54311)
D = (0.21525, -0.89736)
E non definito
Retta
a: -x + y = 1
r: -x + y = -1.11261
q = -1.11261
Uno dei punti di cui il Teorema di Lagrange garantisce l'esistenza è 0.21525.
Il coefficiente angolare della retta passante per A e B è 1.
La derivata prima della funzione calcolata nel punto è 1 .

Seconda dimostrazione del Teorema di Lagrange

Proof.

Definiamo

$$h(x) := f(x) - r_s(x) = f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \Big) .$$

Notiamo che h risulta continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre risulta $h(a) = h(b) = 0$. Dal Teorema di Rolle deduciamo l'esistenza di $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Per tale c risulta

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e quindi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Seconda dimostrazione del Teorema di Lagrange

Proof.

Definiamo

$$h(x) := f(x) - r_s(x) = f(x) - \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\Big).$$

Notiamo che h risulta continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Inoltre risulta $h(a) = h(b) = 0$. Dal Teorema di Rolle deduciamo l'esistenza di $c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$. Per tale c risulta

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

e quindi

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Seconda dimostrazione del Teorema di Lagrange

Proof.

Definiamo

$$h(x) \,:=\, f(x) - r_s(x) \,=\, f(x) - \Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) \,+\, f(a) \Big)\,.$$

Notiamo che h risulta continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre risulta $h(a) = h(b) = 0$. Dal Teorema di Rolle deduciamo l'esistenza di $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Per tale c risulta

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e quindi

$$f'(c) \,=\, \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

$\square$

Domande agli studenti

1) Come è possibile intuire l'idea di questa dimostrazione ?

2) E' possibile utilizzare una retta diversa dalla retta secante ?

3) Come può essere individuato graficamente il punto c ?

Possiamo aiutarci con un software didattico.

OBIETTIVO: avviare l'intuizione verso una dimostrazione più geomtrica.

Domande agli studenti

1) Come è possibile intuire l'idea di questa dimostrazione ?

2) E' possibile utilizzare una retta diversa dalla retta secante ?

3) Come può essere individuato graficamente il punto c ?

Possiamo aiutarci con un software didattico.

OBIETTIVO: avviare l'intuizione verso una dimostrazione più geomtrica.

Domande agli studenti

1) Come è possibile intuire l'idea di questa dimostrazione ?
2) E' possibile utilizzare una retta diversa dalla retta secante ?
3) Come può essere individuato graficamente il punto c ?

   Possiamo aiutarci con un software didattico.

OBIETTIVO: avviare l'intuizione verso una dimostrazione più geomtrica.

Terza dimostrazione del Teorema di Lagrange

Theorem (Il Teorema di Lagrange per funzioni continue)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Se esiste* $\bar{x} \in (a,b)$ *tale che*

$$f(\bar{x}) < r_s(\bar{x}),$$

allora esistono anche $c \in (a,b)$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$f(x) \geq r_q(x) \quad in\ [a,b] \qquad e \qquad f(c) = r_q(c).$$

Ricordiamo

$$r_s(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

e

$$r_q(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + q.$$

Consideriamo, al variare del parametro $q \in \mathbb{R}$, la retta

$$r_q(x) \; = \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + q \,.$$

E' facilmente intuibile che per valori piccoli del parametro q ($q < 0$ e $|q|$ grande) si avrà

$$r_q(x) < f(x) \qquad \text{per ogni}\, x \in [a, b] \,.$$

Questo segue dall'ipotesi di continuità su f. Infatti, ponendo

$$m_f \; := \; \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{e} \quad M_q \; := \; \max_{x \in [a,b]} r_q(x)$$

si avrà $r_q(x) < f(x)$ in $[a, b]$, se $M_q < m_f$.

Poniamo

$$A := \{q \,:\, r_q(x) < f(x)\} \quad \text{e} \quad \bar{q} := \sup A\,.$$

Notiamo che $r_{\bar{q}}(x) \leq f(x)$ e che, necessariamente,

$$\exists\, c \in (a,b) \quad \text{tale che} \quad r_{\bar{q}}(c) = f(c)\,.$$

Per dedurre il Teorema di Lagrange ultilizzeremo il seguente

Lemma (Funzioni tangenti in un punto)

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili in* (a, b)*. Se*

$$f(x) \geq g(x) \qquad per\ x \in (a, b) \qquad e \qquad f(c) = g(c) \quad c \in (a, b)$$

allora

$$f'(c) = g'(c)\,.$$

Proof.

Ponendo

$$h(x) := f(x) - g(x)\,,$$

segue che $h(\cdot)$ *ha un minimo in* $x = c$*. Dal Teorema di Fermat si ha* $h'(c) = 0$ *da cui*

$$f'(c) = g'(c)\,.$$

□

Per dedurre il Teorema di Lagrange ultilizzeremo il seguente

Lemma (Funzioni tangenti in un punto)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili in* (a,b)*. Se*

$$f(x) \geq g(x) \qquad per\ x \in (a,b) \qquad e \qquad f(c) = g(c) \quad c \in (a,b)$$

allora

$$f'(c) = g'(c)\,.$$

Proof.

Ponendo

$$h(x) := f(x) - g(x)\,,$$

segue che $h(\cdot)$ *ha un minimo in* $x = c$*. Dal Teorema di Fermat si ha* $h'(c) = 0$ *da cui*

$$f'(c) = g'(c)\,.$$

□

Theorem (Il nostro approfondimento sul Teorema di Lagrange)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* (a,b). *Se esiste* $\bar{x} \in (a,b)$ *tale che* $f(\bar{x}) < r_s(\bar{x})$ *allora esistono anche* $c \in (a,b)$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *tali che* $f(x) \geq r_q(x)$ *in* $[a,b]$ *e* $f(c) = r_q(c)$. *Per tale valore c risulta*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Inoltre $r_q(x) \equiv t_c(x)$.

Proof.

Dal *Teorema di Lagrange per funzioni continue* otteniamo che esiste $c \in (a,b)$ e $q \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \geq r_q(x)$ in $[a,b]$ e $f(c) = r_q(c)$. Dal Lemma *Funzioni tangenti in un punto* segue

$$f'(c) = r_q'(c) \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Theorem (Il nostro approfondimento sul Teorema di Lagrange)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*. Se esiste* $\bar{x} \in (a, b)$ *tale che* $f(\bar{x}) < r_s(\bar{x})$ *allora esistono anche* $c \in (a, b)$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *tali che* $f(x) \geq r_q(x)$ *in* $[a, b]$ *e* $f(c) = r_q(c)$*. Per tale valore c risulta*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Inoltre $r_q(x) \equiv t_c(x)$*.*

Proof.

Dal *Teorema di Lagrange per funzioni continue* otteniamo che esiste $c \in (a, b)$ e $q \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \geq r_q(x)$ in $[a, b]$ e $f(c) = r_q(c)$. Dal Lemma *Funzioni tangenti in un punto* segue

$$f'(c) = r_q'(c) \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

□

Per gli studenti

Ottenere tutti i risultati precedenti nel caso analogo " $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) > r_s(\bar{x})$...".

Dedurre il seguente

Theorem (Il nostro approfondimento sul Teorema di Lagrange)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se esistono $\bar{x}_1 \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}_1) < r_s(\bar{x}_1)$ e $\bar{x}_2 \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}_2) > r_s(\bar{x}_2)$ allora esistono anche $c_1 \in (a, b)$, $q_1 \in \mathbb{R}$ e $c_2 \in (a, b)$, $q_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \geq r_{q_1}(x)$ in $[a, b]$ e $f(c_1) = r_{q_1}(c_1)$ e $f(x) \leq r_{q_2}(x)$ in $[a, b]$ e $f(c_2) = r_{q_2}(c_2)$.
Per tali c_1, c_2 risulta

$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c_2).$$

Per gli studenti

Ottenere tutti i risultati precedenti nel caso analogo " $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) > r_s(\bar{x})$...".
Dedurre il seguente

Theorem (Il nostro approfondimento sul Teorema di Lagrange)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se esistono $\bar{x}_1 \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}_1) < r_s(\bar{x}_1)$ e $\bar{x}_2 \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}_2) > r_s(\bar{x}_2)$ allora esistono anche $c_1 \in (a, b)$, $q_1 \in \mathbb{R}$ e $c_2 \in (a, b)$, $q_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \geq r_{q_1}(x)$ in $[a, b]$ e $f(c_1) = r_{q_1}(c_1)$ e $f(x) \leq r_{q_2}(x)$ in $[a, b]$ e $f(c_2) = r_{q_2}(c_2)$.
Per tali c_1, c_2 risulta

$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c_2).$$