A

Università degli Studi della Calabria

Facoltà di Ingegneria

Correzione[1] della Seconda Prova Scritta di Analisi Matematica 1

17 luglio 2012

[1] A cura dei Prof. B. Sciunzi e L. Montoro.

Esercizio 1.

<u>*Quesito a.*</u> Sia

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} + 2.$$

Determinarne:

dominio

Svolgimento: La condizione $x^2 - 1 \geq 0$ fa si che $\sqrt{x^2-1}$ sia ben definita. Affinchè il denominatore non si annulli imponiamo l'ulteriore restrizione $x^2 - 1 > 0$. Risulta quindi

$$D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

eventuali intersezioni con gli assi

Svolgimento: Tenendo conto del fatto che $0 \notin D(f)$ e tenendo conto del fatto che f è sempre positiva in $D(f)$, si deduce la non esistenza di intersezioni con gli assi.

limiti agli estremi del dominio

Svolgimento: Si ha

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty & \text{Dala gerarchia degli infiniti.} \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty & \text{Dala gerarchia degli infiniti.} \\
\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty & \text{Forma NON indeterminata.} \\
\lim_{x\to+1^+} f(x) = +\infty & \text{Forma NON indeterminata.}
\end{array}$$

eventuali asintoti orizzontali

Svolgimento: I limiti di $f(x)$ per $x \to \mp\infty$ precedentemente calcolati, escludono la presenza di asintoti orizontali.

eventuali asintoti verticali

Svolgimento: Dai limiti di $f(x)$ per $x \to \mp 1$ precedentemente calcolati, si evince che le rette

$$x = -1 \qquad \text{e} \qquad x = 1,$$

sono asintoti verticali.

derivata prima

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(x^2+1\right)}{x^2-1} \\
&= \frac{x^3-3x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{x^3-3x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.
\end{aligned}$$

derivata seconda

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(3x^2-3)\sqrt{(x^2-1)^3} - 3x(x^3-3x)\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^3} \\
&= 3\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^3}(x^2+1).
\end{aligned}$$

intervalli di monotonia, eventuali punti stazionari e loro classificazione
Svolgimento: Per lo studio del segno della derivata prima è sufficiente studiare gli zeri e il segno del polinomio $x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$. Si ha che i punti

$$x = \mp\sqrt{3}$$

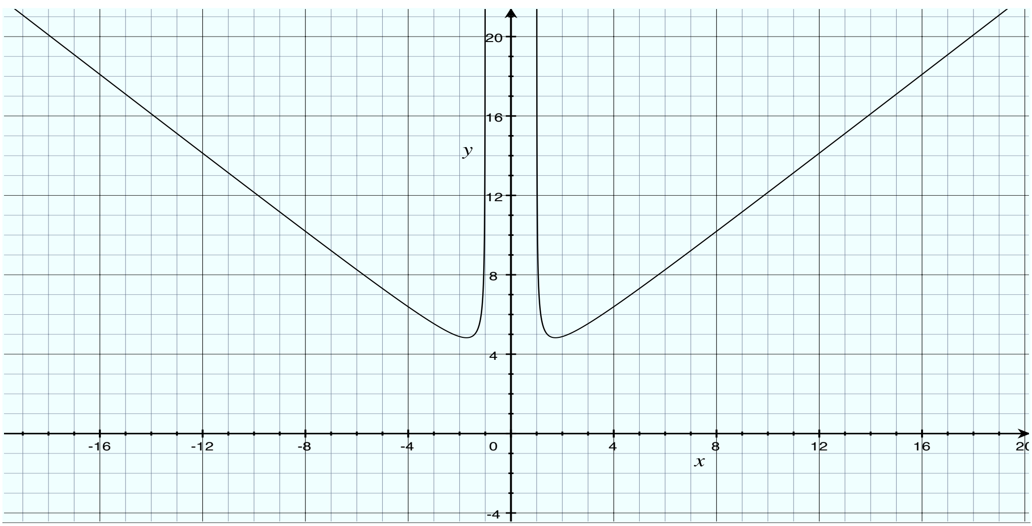
sono punti stazionari. Da un facile studio del segno segue che la funzione $f(x)$ è crescente nell'insieme $(-\sqrt{3}, -1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ e decrescente nell'insieme $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (1, \sqrt{3})$. I punti $x \mp \sqrt{3}$ sono quindi punti di minimo relativo (difatti punti di minimo assoluto), con

$$f(\mp\sqrt{3}) = 2(\sqrt{2} + 1).$$

intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso
Svolgimento: La funzione $f(x)$ risulta essere convessa in quanto

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in D(f).$$

grafico qualitativo
Svolgimento:



Quesito b. Sia

$$f(x) = 2\cos(x) - 2\ln(\cos(x)).$$

Determinare il dominio di $f(x)$ e i punti di minimo assoluto.
Svolgimento: Per determinare il dominio di f, si richiede la positività dell'argomento del logaritmo, ovvero che

$$\cos x > 0,$$

quindi

$$D(f) = [2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per determinare i punti di minimo assoluto, si calcola la derivata prima della funzione f, cioè

$$f'(x) = 2\frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x}.$$

I punti critici di f, sono le soluzioni delle due equazioni

$$\sin x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \cos x = 1,$$

che nel dominio di definizione $D(f)$ hanno come soluzione i punti

$$x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nel dominio di definizione $D(f)$ il denominatore della derivata prima f' è sempre positivo. Quindi per stabilire la natura dei punti critici basta analizzare il segno del numeratore (della derivata prima f'), ovvero il segno della funzione

$$\sin x(1 - \cos x).$$

Ricordando che il termine $(1 - \cos x)$ è sempre nonnegativo deduciamo che il segno della derivata è determinato dal segno della funzione $\sin x$. Si conclude quindi che i punti

$$x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

risultano essere minimi relativi per la funzione f.
Risultano di fatto essere punti di minimo assoluto come si può dedurre in uno dei seguenti modi

- Utilizzando il grafico qualitativo.
- Studiando gli intervalli di monotonia ed utilizzando la periodicità della funzione.
- Utilizzando opportunamente il Teorema di Weierstrass e i limiti agli estremi del dominio.

E' un utile esercizio per lo studente approfondire le tre metodologie.

Esercizio 2. *Quesito a.* Dire se converge il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx.$$

Svolgimento: Prima di tutto si noti che la funzione integranda è positiva nel dominio di integrazione e che risulta NON limitata per $x \to 0^+$. Inoltre il dominio di integrazione risulta essere NON limitato. L'integrale è improprio *di prima specie* per $x \to +\infty$ e improprio *di seconda specie* per $x \to 0^+$. Pertanto, utilizzando la proprietà di additivià rispetto al dominio di integrazione degli integrali definiti, si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^{1} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx.$$

L'integrale proposto converge se e solo se ognuno dei due integrali che lo compongono converge.

- Per $x \to 0^+$ è noto (per esempio utilizzando il polinomio di Taylor $\sin t = t + o(t)$ o il limite notevole $\lim_{t\to 0} \sin t/t = 1$) che
$$\sin^2(x) \sim x^2$$
e quindi
$$\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Per il criterio del confronto asintotico (essendo la funzione integranda positiva, come già notato), l'integrale
$$\int_0^{1} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx$$
converge essendo convergente l'integrale noto
$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

- Per $x \to +\infty$ si utilizza il fatto che $\sin^2(x) \leq 1$. Utilizzando il confronto semplice (essendo la funzione integranda positiva), si ottiene
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx < +\infty\,.$$

L'integrale proposto risulta quindi convergente.

Quesito b. Calcolare l'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ della funzione integrale

$$\mathrm{F}(x) = \int_2^x \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^4} + \frac{x}{e^x}\, dx.$$

Svolgimento: Calcolare l'asintoto orizzontale significa calcolare l'integrale improprio *di prima specie.* Infatti

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{F}(x) := \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^4} + \frac{x}{e^x}\, dx,$$

ovvero (utilizzando la proprietà di linearità dell'integrale)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^4} + \frac{x}{e^x}\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^4} dx + \int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx.$$

1. Per definizione di integrale improprio si ha

$$
\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^4} dx &= \lim_{r\to+\infty} \int_2^r \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^4} dx \\
&\overset{t=\ln x}{=} \lim_{r\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln r} \frac{1}{t^4} dt \\
&= \lim_{r\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(\ln r)^3} - \frac{1}{(\ln 2)^3}\right) = \frac{1}{3(\ln 2)^3}.
\end{aligned}
$$

2. Integrando per parti si ha

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(1+x).$$

   Quindi

$$\lim_{r\to+\infty} \int_2^r xe^{-x} dx = \lim_{r\to+\infty} \left(-e^{-r}(r+1) + 3e^{-2}\right) = 3e^{-2}.$$

Sommando i due contributi trovati, si deduce che la retta

$$y = \frac{1}{3(\ln 2)^3} + 3e^{-2}$$

è asintoto orizzontale della funzione $\mathrm{F}(x)$.

Esercizio 3. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-8)^n}{(n+2)2^n}.$$

Svolgimento: Mettendo a fattore comune il 2 in parentesi a numeratore riscriviamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-8)^n}{(n+2)2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+2)}.$$

Riconosciamo quindi la serie proposta come una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, di coefficiente $a_n = 1/(n+2)$ e centro $x_0 = 4$.
Utilizzando il criterio del rapporto, si calcola il raggio di convergenza R della serie ottenuta dato da

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1.$$

Essendo $R = 1$, la serie data converge semplicemente (di fatti assolutamente) nell'intervallo aperto $(x_0 - R, x_0 + R)$, ovvero nell'intervallo $(3, 5)$.

Si studia ora il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza:

- $x = 3$. La serie di potenze diventa
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+2)},$$
cioè una serie numerica a termini di segno alterno, convergente per il criterio di Leibniz. La verifica è un facile esercizio per lo studente.

- $x = 5$. La serie di potenze diventa
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)},$$
che è una serie numerica a termini positivi divergente in quanto il termine generale della serie risulta *asintoticamente equivalente* a quello della serie armonica (come ben noto una serie numerica divergente), cioè
$$\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n}, \quad \text{per } n \to +\infty.$$
Concludendo la serie assegnata converge nell'intervallo
$$[3, 5).$$

Esercizio 4. Utilizzare opportunamente la formula di Taylor per calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x + \cos(\sqrt{x}) - 2)^2}{2\arctan(x^2) + 2\sin(x^4)}.$$

Svolgimento: Utilizzando in modo opportuno le formule di Taylor si ha

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + o(x); \\ \cos(\sqrt{x}) &= 1 - \frac{x}{2} + o(x); \\ \arctan(x^2) &= x^2 + o(x^2); \\ \sin(x^4) &= x^4 + o(x^4) = o(x^2). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x + \cos(\sqrt{x}) - 2)^2}{2\arctan(x^2) + 2\sin(x^4)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^2}{2x^2 + o(x^2)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la definizione di $o(\cdot)$.