A

Università degli Studi della Calabria

Facoltà di Ingegneria

Correzione[1] della Seconda Prova Scritta di Analisi Matematica 1

26 giugno 2012

[1] A cura dei Prof. B. Sciunzi e L. Montoro.

Esercizio 1.

Quesito a. Sia

$$f(x) = \ln\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^2-1} + 2.$$

Determinarne:

dominio

Svolgimento: La funzione è ben definita se $x^2-1>0$. Tale condizione garantisce che il logaritmo abbia un argomento positivo e allo stesso tempo che non si annulli il denominatore della frazione $\frac{1}{x^2-1}$. Indicando con $D(f)$ il dominio della funzione f, risulta quindi

$$D(f) = (-\infty\,,\,-1) \cup (1\,,\,\infty).$$

limiti agli estremi del dominio

Svolgimento: Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^2-1} + 2 = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} \ln\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^2-1} + 2 \;=\; \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)\ln(x^2-1)+1+2(x^2-1)}{(x^2-1)} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^2-1} + 2 \;=\; \lim_{x\to -1^-} \frac{(x^2-1)\ln(x^2-1)+1+2(x^2-1)}{(x^2-1)} = +\infty,$$

dove al numeratore si è utilizzato il limite notevole $\lim\limits_{t\to 0^+} t\log t = 0$.

eventuali asintoti orizzontali

Svolgimento: Dai limiti precedentemente svolti si deduce che non sono presenti asintoti orizontali.

eventuali asintoti verticali

Svolgimento: Dai limiti precedentemente svolti si deduce che le rette $x=\pm 1$ sono asintoti verticali.

eventuali asintoti obliqui

Svolgimento: Utilizzando la gerarchia degli infiniti si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\Big(\ln\left(x^2-1\right) + \frac{1}{x^2-1} + 2\Big) = 0\,,$$

quindi concludiamo che non sono presenti asintoti obliqui.

derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)} - \frac{2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$$

derivata seconda

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^2-4)(x^2-1)^2 - 4x(x^2-1)(2x^3-4x)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2-1)^4}(-x^4+3x^2+2). \end{aligned}$$

intervalli di monotonia, eventuali punti stazionari e loro classificazione
Svolgimento: $f'(x) > 0$ se $2x(x^2-2) > 0$ ovvero se

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

$f'(x) < 0$ se $2x(x^2-2) < 0$ ovvero se

$$x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}).$$

Pertanto i punti $x = \pm\sqrt{2}$ risultano essere punti di minimo relativo (difatti di minimo assoluto).
intervalli di convessità ed eventuali punti di flesso
Svolgimento:$f''(x) > 0$ se $-x^4 + 3x^2 + 2 > 0$. Tale disuguaglianza è bi-quadratica e può essere risolta ponendo

$$x^2 = t\,.$$

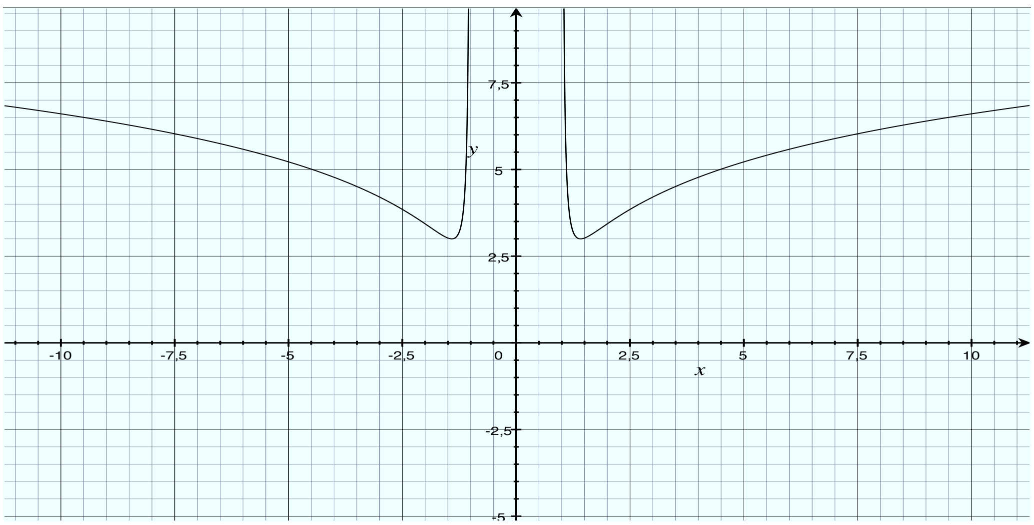
Con semplici conti si ottiene che $f''(x) > 0$ se

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right)$$

e di conseguenza $f(x)$ risulta essere convessa in tale intervallo.
$f''(x) < 0$ se $-x^4 + 3x^2 + 2 < 0$, ovvero se

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}, +\infty\right)$$

e di conseguenza $f(x)$ risulta essere concava in tale intervallo.
I punti $x = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}$ sono punti di flesso.
grafico qualitativo
Svolgimento:



Quesito b. Sia

$$f(x) = e^{-(x+2\cos(x))}.$$

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di f nell'intervallo $[0, 3\pi]$.
Svolgimento:

$$f'(x) = e^{-(x+2\cos(x))} \cdot (-1 + 2\sin x).$$

Determiniamo gli intervalli di monotonia della funzione studiando il segno della derivata prima: $f'(x) > 0$ se e solo se

$$\sin x > \frac{1}{2},$$

che nell'intervallo $[0, 3\pi]$ ha come soluzione

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right).$$

Allo stesso modo, $f'(x) < 0$ nell'intervallo $[0, 3\pi]$ se e solo se

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{17\pi}{6}, 3\pi\right).$$

I punti

$$\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right\},$$

risultano essere punti di massimo relativo interni.
I punti

$$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\},$$

risultano essere punti di minimo relativo interni.
Valutando la funzione nei punti di massimo relativo interni e nei punti di minimo relativo interni ottenuti, e confrontando il risultato con i valori della funzione agli estremi del domio 0 e 3π, si ottiene che

$$x = \frac{5\pi}{6},$$

è un punto di massimo assoluto e il punto

$$x = 3\pi,$$

è un punto di minimo assoluto.

Nel calcolo (e confronto) dei valori che la funzione assume in tali punti, si tiene conto della monotonia della funzione e^t per poterli ordinare con facilità.

Esercizio 2. *Quesito a.* Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3+2x}{e^{x^2}}dx.$$

Svolgimento: Inizialmente svolgiamo l'integrale indefinito per calcolare la primitiva della funzione integranda.
Utilizzando la sostituzione $x^2 = t$ $(2xdx = dt)$ arriviamo all'integrale

$$\frac{1}{2}\int e^{-t}(t+2)dt.$$

Risolvendo tramite il metodo di integrazione per parti

$$\frac{1}{2}\int e^{-t}(t+2)dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\cdot(t+3)+C.$$

Applicando la definizione di integrale improprio:

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{x^3+2x}{e^{x^2}}dx &= \frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\int_9^{+\infty} e^{-t}(t+2)dt \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty} e^{-t}\cdot(t+3)\Big|_9^k = 6e^{-9}.\end{aligned}$$

Quesito b. Utilizzando opportuni criteri di convergenza, dire se converge il seguente integrale improprio:

$$\int_3^{+\infty} \frac{x+2\sin^2(x)}{e^x - x + \ln(x)}dx.$$

Svolgimento: Per il confronto asintotico (essendo l'integranda positiva nell'intervallo $(3,+\infty)$), si ha

$$\frac{x+2\sin^2(x)}{e^x - x + \ln(x)} \sim \frac{x}{e^x}, \quad \text{se } x\to+\infty.$$

Utilizzando quindi anche il confronto semplice, si ha

$$\int_3^{+\infty} \frac{x+2\sin^2(x)}{e^x - x + \ln(x)}dx \sim \int_3^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx \le \int_3^{+\infty}\frac{x}{x^{100}}dx = \int_3^{+\infty}\frac{1}{x^{99}}dx < +\infty\,,$$

quindi l'integrale converge. NOTE:

- Il criterio del confronto semplice si applica intendendo che la disuguaglianza utilizzata è verificata *definitivamente*. Lo studente si interroghi sul ruolo della potenza 100 e osservi che sono possibili molte altre scelte. Quali?
- E' anche possibile utilizzare il confronto semplice al primo passaggio, notando che $0 \le \sin^2(x) < 1$ e successivamente procedere in modo analogo a quanto esposto sopra.
- Un volta arrivati all'integrale $\int_3^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$ si potrebbe anche procedere con il calcolo esplicito di quest'ultimo tramite il metodo di integrazione per parti. Il valore ottenuto in tal caso rapresenta qualcosa?

Esercizio 3. Studiare la **convergenza semplice** e convergenza assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}}.$$

Svolgimento: E' conveniente iniziare con lo studio della convergenza assoluta, dato che questa implicherebbe la convergenza semplice. Studiamo quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}}.$$

Si ha

$$\frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}} \sim \frac{1}{\ln(n)}, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi, dal criterio del confronto asintotico, ed utilizzando la disuguaglianza $\ln x < x$ (per $x > 0$), si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

e concludiamo che la serie NON è assolutamente convergente.

Per lo studio della **convergenza semplice** utilizziamo il criterio di Leibniz:

(i) Facilmente si verifica che

$$\frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}} > 0 \quad \forall n \geq 1;$$

(ii) inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}} = 0;$$

(iii) il termine $\frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}}$ risulta essere *definitivamente* decrescente, come si vede studiando la monotonia della funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(x) + \frac{2}{x}}$. Si ha infatti

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(\ln(x) + \frac{2}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right),$$

che risulta essere negativa per ogni $x > 2$. Pertanto $\frac{1}{\ln(n) + \frac{2}{n}}$ è decrescente per ogni $n \geq 2$.

La serie risulta quindi essere semplicemente convergente.

Esercizio 4. Utilizzare opportunamente la formula di Taylor per calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{\sin(x^2) - \ln(1+x^2)}.$$

Svolgimento: Utilizzando la formula di Taylor, si ha

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2); \\ \sin(x^2) &= x^2 + o(x^4); \\ \ln(1+x^2) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi

$$(e^x - 1 - x)^2 = (\frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)\,,$$

e

$$\sin(x^2) - \ln(1+x^2) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

Sostituendo nel limite, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{2}.$$

Nell'ultimo passaggio si usa la definizione di $o(\cdot)$.